TD Maple n°10 : Résolution numérique d'équations différentielles ordinaires

Lycée Louis le Grand

PCSI 1

Lundis 5 et 12 mai 2008

On appelle équation différentielle ordinaire (EDO ou ODE en anglais), une équation de la forme :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \tag{1}$$

où l'inconnue y est une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et f est une fonction quelconque de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Le paramètre t peut représenter le temps ou bien une abscisse etc... On appelle problème de Cauchy un problème de la forme :

Trouver une fonction $y(t)$ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = f(t, y(t)) \\ y(0) & = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Voici quelques exemples d'EDO :

1 Exemples d'EDO

1. $\dfrac{dy}{dt} = y(t)$. Dans ce cas, y est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction f ne dépend pas explicitement de t, elle est égale à l'identité sur $\mathbb{R}$. La solution, vous la connaissez tous, est $y : t \mapsto Ce^t$ où $C = y(0)$ est donné.
2. L'équation d'un oscillateur non amorti : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle ordinaire. En effet, en posant deux inconnues $y_1 = x$ et $y_2 = \dfrac{dx}{dt}$ (c'est ce qu'on avait fait lors du TD sur les oscillateurs), ces deux inconnues vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} & = y_2 \\ \\ \dfrac{dy_2}{dt} & = -\omega^2 y_1 \end{cases}$$

D'où, en posant le vecteur $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, on voit que y vérifie $\dfrac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} y$. Donc, l'équation d'un oscillateur amorti peut s'écrire sous la forme d'une EDO où y est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et où la fonction f, qui ne dépend que de y, est une application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ représentée par la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$.

En fait, toute équation différentielle linéaire à coefficients constants peut se mettre sous cette forme.

3. Un problème de Cauchy : $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = -2t - y(t) \\ y(0) & = -1 \end{cases}$ dont la solution est $y : t \mapsto 2 - 2t - e^{-t}$.

4. Un autre problème de Cauchy bien connu : $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = 1 + y^2 \\ y(0) & = 0 \end{cases}$. Je vous laisse trouver la solution.

2 Schémas numériques-stabilité

Sous certaines hypothèses sur la fonction f (typiquement f lipschitzienne), on peut montrer qu'un problème de Cauchy admet une unique solution sur un intervalle donné. Comme il n'est pas toujours possible de trouver une formule analytique pour la solution de l' EDO, des méthodes numériques ont été mises au point pour approcher ces solutions. Une méthode numérique ne fournit pas une fonction mais une suite de couples (t_n, y_n) tels que $\begin{cases} y_0 & = y(0) \\ \forall n \quad y_n & \approx y(t_n) \end{cases}$ où y est la vraie solution de (2).

Dans ce TD, nous allons étudier trois schémas numériques permettant d'approcher la solution du problème de Cauchy suivant, où la fonction f ne dépend pas explicitement de t :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = f(y) \\ y(0) & = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

2.1 Schéma Euler explicite

On choisit un petit pas de temps dt (le sens de "petit" sera à déterminer) et on cherche à calculer itérativement des valeurs approchées de la solution en $t_0 = 0$, $t_1 = t_0 + dt$, $t_2 = t_0 + 2dt$,...,$t_N = t_0 + Ndt$. Pour cela, effectuons un développement limité à l'ordre 1 de la solution y en t_n :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = y(t_n + dt) &= y(t_n) + dt \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_n} + o(dt) \\ &= y(t_n) + dt f(y(t_n)) + o(dt) \end{aligned}$$

Si on considère que $y_n \approx y(t_n)$ et $y_{n+1} \approx y(t_{n+1})$, on peut déduire de ce développement limité un schéma numérique permettant d'approcher la solution :

$$\begin{cases} y_0 \quad \text{donné} \\ \forall n \geq 0 \quad y_{n+1} = y_n + dt f(y_n) \end{cases} \tag{4}$$

1. Ecrire un procédure `EE(y0,dt,T)` qui prend comme arguments une condition initiale $y0$, un pas de temps dt et une période T (multiple de dt), et qui renvoie la liste des couples $[t_n, y_n]$ qui approche la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = -y \\ y(0) & = 1 \end{cases} \tag{5}$$

sur l'intervalle $[0, T]$.

2. Choisir un pas de temps et tracer sur le même graphe la solution exacte ainsi que la solution approchée. (On pourra utiliser la fonction `display` de la librairie `with(plots)`).
3. Essayer plusieurs pas de temps.
4. Que se passe-t-il si $dt > 2$? Expliquer ce phénomène.
   On dit alors que le schéma Euler explicite est *conditionnellement stable* c'est-à-dire qu'il est stable (la solution approchée n'explose pas) à la condition que $dt \leq 2$.
5. Pour les courageux, écrire une procédure `EE2(y0,dt,T)` qui résout le problème de Cauchy lié à l'oscillateur harmonique non amorti. On prendra $\omega = 1$, $x(0) = 0$ et $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1$.
6. Tester plusieurs pas de temps. Essayer comme plus haut de formuler une condition de stabilité (indication : calculer les valeurs propres de la matrice).

2.2 Schéma Euler implicite

Pour palier à ces problèmes d'instabilité et pouvoir utiliser de grands pas de temps (ce qui accélère les calculs), on fait appelle à des schémas dits implicites. Le schéma Euler explicite est explicite au sens où la solution approchée en t_{n+1} ne dépend que de l'information déjà calculée en t_n. On construit le schéma Euler implicite en modifiant le schéma Euler explicite comme suit :

$$\begin{cases} y_0 \quad \text{donné} \\ \forall n \geq 0 \quad y_{n+1} = y_n + dt f(y_{n+1}) \end{cases} \tag{6}$$

Cette fois-ci, on voit que pour calculer y_{n+1}, il faut connaître y_{n+1} ! Cela implique qu'à chaque étape, on a une équation supplémentaire à résoudre. Il existe des algorithmes qui font ça très bien, mais il y a quand même des calculs supplémentaires par rapport aux schémas explicites. Dans le cas du problème de Cauchy (5), cette équation est très facile à résoudre et nous allons utiliser cet exemple pour comprendre pourquoi les schémas implicites sont plus stables que les schémas explicites.

1. Dans le cas particulier du problème (5), écrire y_{n+1} en fonction de y_n pour le schéma Euler implicite.
2. En déduire une procédure `EI(y0,dt,T)` qui permet d'approcher la solution avec le schéma Euler implicite.
3. Tracer la solution ainsi que les solutions approchées pour plusieurs pas de temps. Observer qu'il n'y a plus de problème d'instabilité c'est-à-dire que quelque soit le pas de temps dt, la solution approchée n'explose pas : on dit que le schéma Euler implicite est *inconditionnellement stable.*
4. Pour les courageux (les mêmes que plus haut). Ecrire une procédure `EI2(y0,dt,T)` qui résout le problème de Cauchy lié à l'oscillateur harmonique non amorti avec le schéma Euler implicite. On prendra $\omega = 1$, $x(0) = 0$ et $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1$.
5. Tester plusieurs pas de temps.

2.3 Schéma de Crank-Nicholson

Le schéma de Crank-Nicholson est donné par :

$$\begin{cases} y_0 \quad \text{donné} \\ \forall n \geq 0 \quad y_{n+1} = y_n + dt\dfrac{f(y_n) + f(y_{n+1})}{2} \end{cases} \tag{7}$$

1. Dans le cas particulier du problème (5), écrire y_{n+1} en fonction de y_n pour le schéma de Crank-Nicholson.

2. En déduire la procédure `CN(y0,dt,T)` qui permet d'approcher la solution avec le schéma de Crank-Nicholson.
3. Tracer la solution ainsi que les solutions approchées pour plusieurs pas de temps.

3 Consistance des schémas

Dans la section précédente, nous avons étudié la stabilité de trois schémas numériques, c'est-à-dire leur capacité (ou incapacité) à ne pas "exploser en temps long". Dans cette section, nous cherchons à étudier la *consitance* des schémas c'est-à-dire leur degré de précision sur un pas de temps dt.
Pour cela, on suppose qu'au temps t_n, on a exactement $y_n = y(t_n)$, où $y(t_n)$ est la vraie solution, et on cherche à évaluer l'erreur commise sur y_{n+1} en appliquant le schéma numérique sur un seul pas de temps (par exemple $y_{n+1} = y_n + dtf(y_n)$ pour Euler explicite).

On dit qu'un schéma numérique est consistant d'ordre p si, pour toute fonction f de classe C^p, on a

$$|y_{n+1} - y(t_{n+1})| = \mathcal{O}(dt^{p+1})$$

où la fonction y est solution du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dy}{dt} & = f(y) \\ y(t_n) & = y_n \end{array} \right. \tag{8}$$

et où y_{n+1} est obtenu en appliquant le schéma numérique à y_n. En particuler, si un schéma numérique est consistant d'ordre p, alors l'erreur numérique commise sur un pas de temps tend vers 0 quand $dt \to 0$.

1. En faisant un développement limité à l'ordre 2 de la solution y de (8) en t_n, montrer que les schémas Euler explicite et Euler implicite sont consistants d'ordre 1.
2. Pour les courageux, montrer que le schéma de Crank-Nicholson est consistant d'ordre 2.

Remarque : La stabilité d'un schéma numérique est directement liée à la façon dont les erreurs de consistance s'accumulent lorsqu'on itère le schéma.