Oral de Maths de Centrale

Exercices avec Maple

Lundis 11 et 18 mai 2009

Exercice 1

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$.

1. Déterminer le nombre de racines réelles de P_n.
2. Soit a_n l'unique racine réelle de P_{2n+1}. Etudier avec Maple quelques valeurs.
3. Etudier la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = \dfrac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$. A l'aide de Maple, étudier quelques valeurs de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
2. Donner la limite et un équivalent de x_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
3. On pose $x_n = n + u_n$. Donner un équivalent de u_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
4. On pose $I_n = \int_0^{x_n} f_n(x)dx$. Montrer que $I_n = n(1 + 2\ln 2) - 1 + o(1)$.

Exercice 3

(Maple) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B = {}^t A$.

1. Calculer $(A+B)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $K = \mathrm{Vect}(A, B)$. Calculer AB, BA, A^2 et B^2. En déduire que K est stable par le produit matriciel.
3. Montrer qu'il existe $E \in K$ tel que $AE = EA = A$ et $BE = EB = B$. Qu'est-ce que E ?
4. Montrer que K est un coprs.

Exercice 4

(Maple) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \sin t$, puis l'équation différentielle $y'' + y = |\sin t|$.

Exercice 5

1. Résoudre $y'' + \dfrac{y}{x^2} = 0$ sur $[1, +\infty[$ à l'aide de Maple. Existe-t-il des solutions bornées ?
2. Soit $(E)\quad y'' + \dfrac{y}{x^2+4x+3} = 0$. On se donne une solution f bornée de (E) sur $[1, +\infty[$. Montrer que f' admet une limite nulle en $+\infty$. Existe-t-il des solutions non bornées sur $[1, +\infty[$?

Exercice 6

1. Montrer qu'il existe une base $(K_0, K_1 ..., K_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = P(0)K_0 + P'(1)K_1 + ... + P^{(n)}(n)K_n$. *Indication :* On pourra considérer les applications $P \mapsto P^{(k)}(k)$.
2. Calculer avec Maple $K_0, K_1 ..., K_5$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n'(X+1) = K_{n-1}(X)$ et $K_n(0) = 0$.

Exercice 7

(Maple) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec A si et seulement s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI_3 + bA + cA^2$.
3. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

Exercice 8

1. Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2^n}$.
2. Montrer que f est bornée sur $[0, 1[$.
3. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x^4)$ si $x \in]-1, 1[$.
4. On suppose qu'il existe x_0 dans $]0, 1[$ tel que $f(x_0) > \dfrac{1}{2}$. Montrer que f n'a pas de limite en 1^-.
5. Montrer que $f(0,995) > \dfrac{1}{2}$.

Exercice 9

(Maple) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^{n\pi} \sin^2(nt) f(t)dt$.

1. Pour $a > 0$, on pose $f(t) = e^{-at}$. Calculer u_n et déterminer sa limite.
2. Dans le cas général, montrer que u_n converge et donner sa limite.
3. Montrer que, losqu'on ne suppose pas la convergence de $\int_0^{+\infty} f$, la suite (u_n) peut diverger.

Exercice 10

On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $N(x, y) = \int_0^1 |x + ty|dt$. Cette application définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, représenter sa boule unité avec Maple.