TD Maple n°6 : Méthodes d'intégration numérique
Corrigé

Lundis 28 janvier et 4 février 2008

1 Calculs de primitives et d'intégrales

1. Trivial.
2. On charge la librairie *student* qui permet de faire des intégrations par parties.
   `[>with(student) ;`

$$
\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \\
&= \int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n} dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} dt - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^n} dt \\
&= I_{n-1}(x) - \int_0^x \frac{2t\frac{1}{2}t}{(1+t^2)^n} dt
\end{aligned}
$$

   Puis on fait une IPP en dérivant $u(t) = \frac{1}{2}t$. Avec Maple cela donne :

```
[>Integrale :=Int(t^2/(1+t^2)^n,t=0..x) ;
[>intparts(Integrale,t/2) ;
```

   On obtient alors après quelques réarangements que

$$I_n(x) = \left(1 + \frac{1}{2(1-n)}\right) I_{n-1}(x) - \left[\frac{1}{1-n}\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}\frac{1}{2}t\right]_0^x$$

2 Intégration numérique

2.1 Méthode des rectangles

1. Voici la procédure permettant de mettre en oeuvre la méthode des rectangles à gauche :

```
[>rectgauche :=proc(f,a,b,N)
local i,h ;
h :=(b-a)/N ;
evalf(h*sum(f(a+i*h),i=0..N-1)) ;
end ;
```

2. Pour la méthode des rectangles à droite, la somme va de $i = 1$ à $i = N$:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(t_i)$$

   Ce qui donne avec Maple :

```
[>rectdroite :=proc(f,a,b,N)
local i,h;
h :=(b-a)/N;
evalf(h*sum(f(a+i*h),i=1..N));
end;
```

3. `rectgauche(f,a,b,N)` surestime l'intégrale à coup sûr si la fonction f est décroissante sur $[a, b]$.
4. Testons maintenant nos procédures.

```
[>int(exp,0..1);
```

$$e-1$$

```
[>evalf(%);
```

$$1.718281828$$

Puis on regarde ce que donnent nos procédures avec $N = 10$ intervalles de discrétisation.

```
[>rectgauche(exp,0,1,10);
```

$$1.633799400$$

```
[>rectdroite(exp,0,1,10);
```

$$1.805627583$$

5. Vérification de l'ordre de la méthode : On remplit une liste `graphe` dans laquelle on met les couples `[ln(1/N),ln(erreur)]`. Pour cela, on parcourt la liste L des différents pas de discrétisation.

```
[>L :=[10,20,30,40,50,60];
[>graphe :=[];
[>for N in L do
    graphe :=[op(graphe),[ln(1/N),ln(abs(e-1-rectgauche(exp,0,1,N)))]];
od :
[>plot(graphe);
```

On obtient bien une droite de pente 1 pour les deux méthodes ce qui veut dire que l'erreur est proportionnelle à la taille h du pas de discrétisation :

$$\Big| \int_a^b f(t)dt - \texttt{rectgauche(f,a,b,N)} \Big| = Ch$$

La constante C est l'exponentielle de l'ordonnée à l'origine de la droite obtenue. Elle ne dépend que de la fonction f et de l'intervalle $[a, b]$ mais pas de h.

2.2 Méthode du point milieu

1. Voici la procédure mettant en oeuvre la méthode du point milieu :
Cette fois-ci on approche l'intégrale par :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\Big(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\Big) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\Big(a + \frac{(2i+1)h}{2}\Big)$$

```
[>pointmilieu :=proc(f,a,b,N)
local i,h;
h :=(b-a)/N;
evalf(h*sum(f(a+(2*i+1)*h/2),i=1..N));
end;
[>pointmilieu(exp,0,1,10);
```

$$1.717566087$$

2. On trace le ln de l'erreur en fonction de ln$h$. On obtient un droite de pente 2. Ceci veut dire que l'erreur commise est proportionnelle au carré du pas de discrétisation. Donc quand h est petit (N grand), cette méthode est plus présice que la méthode des rectangles.
3. Si λ est différent de $\frac{1}{2}$, on retombe sur une methode d'ordre 1. En effet, on montre que la méthode du point milieu est la seule méthode à 1 point d'interpolation qui soit d'ordre 2.

2.3 Méthode des trapèzes

1. L'aire du trapèze délimité par la fonction affine sur $[t_i, t_{i+1}]$ est $(t_{i+1}-t_i)\dfrac{f(t_i)+f(t_{i+1})}{2} = h\dfrac{f(t_i)+f(t_{i+1})}{2}$.
   D'où une nouvelle formule d'approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$:
$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{N}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i)\right)$$
2. Voici la procédure qui met en ouvre la méthode des trapèzes :
```
[>trapeze :=proc(f,a,b,N)
local i,h;
h :=(b-a)/N;
evalf(h*((f(a)+f(b))/2+sum(f(a+i*h),i=1..N-1)));
end;
[>trapeze(exp,0,1,10);
```
   1.719713492
3. Toujours la même démarche, on obtient un méthode d'odre 2. Il est donc plus efficace d'interpoler la fonction f par une fonction affine.

2.4 Méthode de Simpson

1. Ce polynôme doit s'annuler en $t_{i+\frac{1}{2}}$ et t_{i+1}. Il s'écrit donc sous la forme :
$$\lambda(X - t_{i+\frac{1}{2}})(X - t_{i+1})$$
   On choisit λ de sorte que le polynôme prenne la valeur 1 en t_i, donc λ vérifie :
$$1 = \lambda(t_i - t_{i+\frac{1}{2}})(t_i - t_{i+1})$$
   Finalement, le polynôme recherché est :
$$\frac{(X - t_{i+\frac{1}{2}})(X - t_{i+1})}{(t_i - t_{i+\frac{1}{2}})(t_i - t_{i+1})}$$
   Si on veut que ce polynôme prenne la valeur $f(t_i)$ en t_i, il suffit de le multiplier par $f(t_i)$.
2. Le polynôme de degré 2 qui coïncide avec f aux points t_i, t_{i+1} et $t_{i+\frac{1}{2}}$ est la somme des trois polynômes obtenus comme ci-dessus pour les trois points soit :
$$P(X) = f(t_i)\frac{(X - t_{i+\frac{1}{2}})(X - t_{i+1})}{(t_i - t_{i+\frac{1}{2}})(t_i - t_{i+1})} + f(t_{i+\frac{1}{2}})\frac{(X - t_i)(X - t_{i+1})}{(t_{i+\frac{1}{2}} - t_i)(t_{i+\frac{1}{2}} - t_{i+1})} + f(t_{i+1})\frac{(X - t_i)(X - t_{i+\frac{1}{2}})}{(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_{i+\frac{1}{2}})}$$
3. A l'aide de Maple, on intègre ce polynôme entre t_i et t_{i+1}. Pour simplifier les notations, on notera $c = t_i$, $d = t_{i+1}$. On exprime le polynôme :
```
[>p :=F(c)*(x-(c+d)/2)*(x-d)/((c-(c+d)/2)*(c-d))
+F((c+d)/2)*(x-c)*(x-d)/(((c+d)/2-c)*((c+d)/2-d))
+F(d)*(x-c)*(x-(c+d)/2)/((d-c)*(d-(c+d)/2));
```
   Puis on le développe :
```
[>expand(%);
```
   Puis on calcule l'aire sous la parabole :
```
[>int(p,x=c..d);
[>simplify(%);
```

```
[>factor(%) ;
```

Finalement, on voit que l'aire sous la parabole est donnée par :

$$(t_{i+1}-t_i)\frac{f(t_i)+4f(t_{i+\frac{1}{2}})+f(t_{i+1})}{6}=h\frac{f(t_i)+4f(t_{i+\frac{1}{2}})+f(t_{i+1})}{6}$$

4. Ce qui donne pour le calcul approché de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{h}{6}\left(f(a)+f(b)\right)+\frac{h}{3}\sum_{i=1}^{N-1} f(t_i)+\frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{N-1} f\left(a+\frac{(2i+1)h}{2}\right)+\frac{2h}{3}f\left(a+\frac{h}{2}\right)$$

5. Voici la procédure qui met en oeuvre la méthode de Simpson :

```
[>simpson :=proc(f,a,b,N)
local i,h ;
h :=(b-a)/N ;
evalf(h/6*(f(a)+f(b)+2*sum(f(a+i*h)+2*f(a+(2*i+1)*h/2),i=1..N-1)+4*f(a+h/2))) ;
end ;
[>simpson(exp,0,1,10) ;
```

$$1.718282781$$

6. On trace le ln de l'erreur en fonction de ln$h$. On obtient un droite de pente 4. Ceci veut dire que l'erreur commise est proportionnelle à h^4. Donc quand h est petit (N grand), cette méthode à trois points d'interpolation est plus précise que les méhodes à un point et deux points précédentes.