# TD Maple n°7 : Méthodes d'intégration numérique

Lycée Louis le Grand

PCSI 1

Lundis 11 et 18 février 2008

## 1 Calculs de primitives et d'intégrales

1. Caluler les intégrales et les primitives suivantes :

   $\int_0^\infty e^{-x^2} dx \qquad \int_0^\infty \frac{x^9}{1+x^{20}} dx \qquad \int_0^1 x^4 e^{-x} dx \qquad \int \frac{1}{cos^4 x + sin^4 x} dx \qquad \int \frac{1}{chx\sqrt{ch2x}} dx$

2. Soit

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

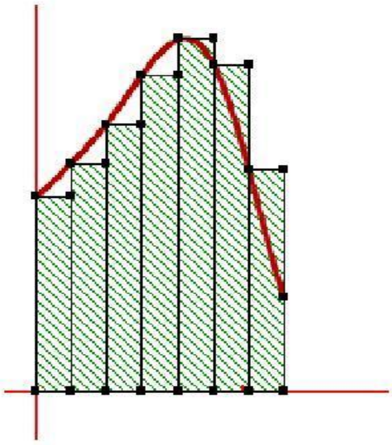
   A l'aide d'un intégration par partie (et d'une petite astuce...), déterminer une relation entre $I_n$ et $I_{n-1}$. On pourra charger le package *student* avec l'instruction `with(student)`.

## 2 Intégration numérique

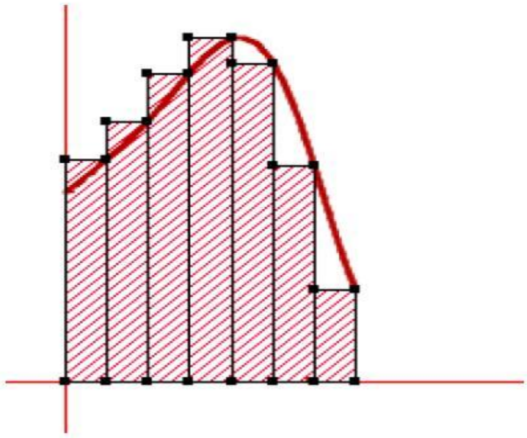
Dans cette partie, on étudie plusieurs méthodes numériques permettant de calculer de manière approchée l'intégrale d'une fonction $f$ continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour cela, on découpe l'intervalle $[a, b]$ en $N$ petits intervalles de longueurs identiques $h = \dfrac{b-a}{N}$. On construit ainsi une subdivision régulière de l'intervalle $t_0 = a < t_1 < .. < t_N = b$ où $t_i = a + ih$.

### 2.1 Méthode des rectangles

La méthode des rectangles *à gauche* consiste à interpoler la fonction $f$ sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ par sa valeur en $t_i$, c'est-à-dire qu'on considère que sur le petit intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, la fonction $f$ est constante égale à $f(t_i)$.



Méthode des rectangles à gauche



Méthode des rectangles à droite

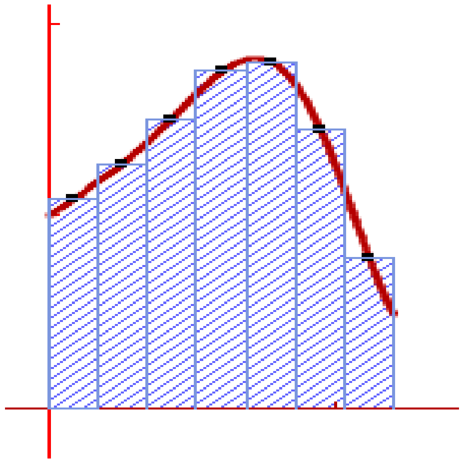
Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, l'intégrale est donc approchée par l'air du rectangle soit $(t_{i+1} - t_i)f(t_i) = hf(t_i) = \dfrac{b-a}{N}f(t_i)$. Donc l'intégrale sur l'intervalle $[a, b]$ est approchée par :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i)$$

1. Ecrire une procédure `rectgauche(f,a,b,N)`, qui calcule la valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ avec $N$ intervalles de discrétisation par la méthode des rectangles à gauches.
2. De même, écrire une procédure `rectdroite(f,a,b,N)`, qui calcule la valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ avec $N$ pas par la méthode des rectangles à droite.
3. Dans quels cas est-on sûr que `rectgauche(f,a,b,N)` surestime l'intégrale ?
4. Tester vos procédures sur la fonction $f(t) = \exp(t)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et pour $N = 10$.
5. On note
$$\Big|\int_a^b f(t)dt - \texttt{rectgauche(f,a,b,N)}\Big|$$
l'erreur commise lorsqu'on utilise la méthode des rectangles à gauche avec N pas. Vérifier (“avec les mains”) que l'erreur commise pour la fonction $f(t) = \exp(t)$ est un $\mathcal{O}(\frac{1}{N}) = \mathcal{O}(h)$. Pour cela, on pourra tracer le logarithme de l'erreur en fonction de $\ln h$ pour $N = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ et calculer la pente de la droite obtenue. On dit alors que la méthode est d'ordre 1.

## 2.2 Méthode du point milieu

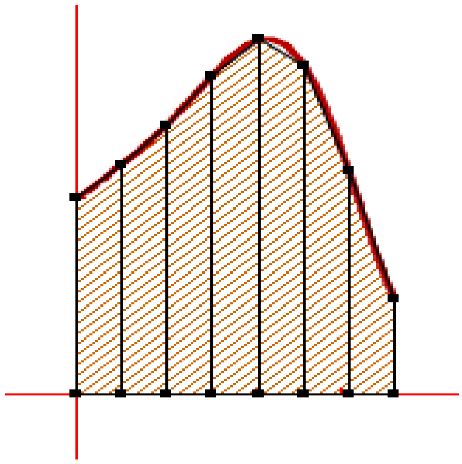
Cette méthode consiste elle aussi à interpoler la fonction $f$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ par une seule valeur, la valeur prise au milieu de l'intervalle. Sur $[t_i, t_{i+1}]$, $f(t) \approx cste = f\Big(\dfrac{t_i + t_{i+1}}{2}\Big)$.



1. Ecrire une procédure `pointmilieu(f,a,b,N)`, qui calcule la valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ avec $N$ pas par la méthode du point milieu.
2. Vérifier que cette méthode est aussi d'ordre 2 c'est-à-dire que l'erreur commise en utilisant cette méthode est un $\mathcal{O}(\frac{1}{N^2}) = \mathcal{O}(h^2)$.
3. Que peut-on dire de l'odre de la méthode si, sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, on avait pris $f(t) \approx f(\lambda t_i + (1-\lambda)t_{i+1})$ avec $\lambda \in [0,1], \lambda \neq \frac{1}{2}$ ?

### 2.3 Méthode des trapèzes

Pour obetenir de meilleures approximations le l'intégrale, on peut augmenter la précision de l'interpolation de $f$ sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, ie augmenter le nombre de points utilisés pour approcher $f$ sur cet intervalle. La méthode des trapèzes consiste à utiliser les points $t_i$ `et` $t_{i+1}$ en approchant la fonction $f$ par la droite affine passant par les points $(t_i, f(t_i))$ et $(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$.

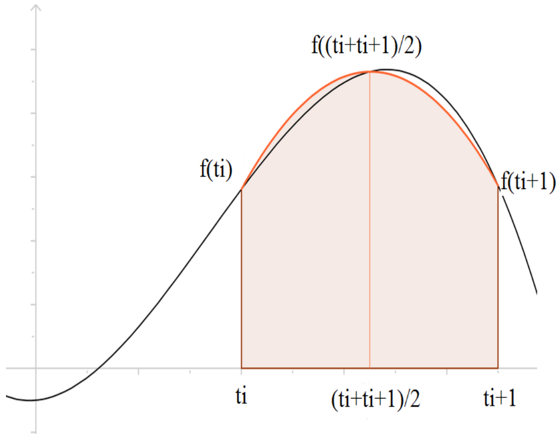


1. Calculer l'aire du trapèze délimité par la fonction affine sur $[t_i, t_{i+1}]$. En déduire une nouvelle formule pour le calcul approché de l'intégrale sur l'intervalle $[a, b]$.
2. Ecrire la procédure `tapeze(f,a,b,N)` et tester cette procédure.
3. Vérifier que la méthode des trapèzes est d'ordre 2.

### 2.4 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson est une méthode d'ordre 4. Elle repose sur une interpolation à trois points de la fonction $f$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

1. On note $t_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{t_i + t_{i+1}}{2}$ le milieu du segment $[t_i, t_{i+1}]$. Quel est le polynôme qui s'annule en $t_{i+\frac{1}{2}}$ et en $t_{i+1}$ et qui vaut 1 en $t_i$ ?
2. En déduire l'équation du polynôme de degré 2 qui coïncide avec $f$ aux points $t_i$, $t_{i+1}$ et $t_{i+\frac{1}{2}}$.




Comme il est très facile d'intégrer des polynômes, on va approcher l'intégrale de $f$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ par l'air sous la parabole.

3. A l'aide de Maple, exprimer l'aire sous la parabole sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ en fonction de $t_i$, $t_{i+1}$, $f(t_i)$, $f(t_{i+1})$ et $f(t_{i+\frac{1}{2}})$.
4. En déduire une nouvelle formule pour le calcul approché de l'intégrale de $f$ sur l'intervalle $[a, b]$.
5. Ecrire la procédure `simpson(f,a,b,N)` puis la tester.
6. Vérifier que cette méthode donne une approximation en $\mathcal{O}(h^4)$ de l'intégrale de $f$. On peut ainsi construire des méthodes aussi précises que l'on veut en augmentant le degré du polynôme interpolateur.