TD Maple n°4 : Systèmes oscillants

Lycée Louis le Grand

PCSI 1

Mercredis 26 novembre et 17 décembre 2008

1 Indications Maple

Avant toute chose, il vous faudra charger les deux librairies suivantes :

```
[>with(plots) ;
[>with(DEtools) ;
```

Dans cette première partie, on ne vous demande pas de taper les instructions Maple. Cette partie sert uniquement de référence pour le reste du TD. A chaque fois que vous aurez à résoudre une équation différentielle et à tracer la solution, il faudra vous référer à la section 1.1. Quand on vous demandera de tracer un portrait de phase, vous vous référerez à l'exemple donné dans la section 1.2. Il est donc très important que vous lisiez attentivement ces deux sections avant de commencer.

1.1 Résolution d'une équation différentielle et tracé de la solution

Prenons en exemple une équation différentielle quelconque :

$$\begin{cases} y^{''}(t) + 3y^{'}(t) + y(t) = cos(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre *analytiquement* l'équation différentielle avec Maple, on commence par définir l'équation ainsi que les conditions initiales comme suit :

```
[>eq :=diff(y(t),t,t)+3*diff(y(t),t)+y(t)=cos(t) :
[>cini :=y(0)=2,D(y)(0)=0 :
```

Puis on résout avec la comande `dsolve` :

```
[>sol :=dsolve({eq,cini}) ;
```

Pour tracer la solution entre $t = 0$ et $t = 100$, on s'y prend comme suit :

```
[>x :=unapply(rhs(sol),t) ;
[>plot(x,0..100) ;
```

Parfois, lorsque l'équation différentielle n'admet pas de solution analytique, il est nécessaire de la résoudre *numériquement* (i.e. de façon approchée). On définit comme plus haut l'équation et les conditions initiales puis on utilise `dsolve` avec l'option `numeric` :

```
[>sol :=dsolve({eq,cini},y(t),numeric,range=0..100) :
```

Notez que lorsqu'on fait une résolution numérique, il faut préciser dans `dsolve` l'intervalle sur lequel on veut une solution approchée, ici on ajouté `range=0..100`. Pour tracer la solution obenue, on utilise la commande `odeplot` :

```
[>odeplot(sol,[t,y(t)],0..100,refine=1) ;
```

`refine` sert à lisser la courbe.

1.2 Tracé d'un portrait de phase

Pour tracer un portrait de phase, on utilise l'instruction Maple `phaseportrait` (aprés avoir chargé les librairies `with(plots)` et `with(DEtools)`). La liste des arguments à donner à `phaseportrait` est :

1. Entre crochets la liste des équations différentielles du premier odre vérifiées par les grandeurs utilisées :
   `[D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-x(t)]`
   Ici, on a juste découplé la relation $\ddot{x}(t)+x(t)=0$ en deux équations différentielles en introduisant l'inconnue vitesse $v(t)=\dot{x}(t)$. En effet, on a l'équivalence suivante :
   $$\ddot{x}(t)+x(t)=0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=v(t)\\ \dot{v}(t)=-x(t)\end{array}\right.$$
2. Entre crochets la liste des variables inconnues :
   `[x(t),v(t)]`
3. Le domaine de variation du paramètre temps :
   `t=0..10`
4. Entre crochets l'ensemble de la liste des conditions initiales :
   `[[x(0)=0,v(0)=2],[x(0)=0,v(0)=4]]`
5. Le pas de temps entre chaque point de la trajectoire (par défaut égal à 1) :
   `stepsize=0.1`
6. La couleur de chaque trajectoire (par défaut, elles sont toutes en jaune) :
   `linecolor=[black,green]`

Ainsi, la commande

```
[>phaseportrait([D(x)(t)=v(t),D(v)(t)=-x(t)],[x(t),v(t)],t=0..10,
[[x(0)=0,v(0)=2],[x(0)=0,v(0)=4]],stepsize=0.1,linecolor=[black,green]) ;
```

trace dans l'espace des phases deux trajectoires pour un intervalle de temps compris entre 0 et 10, avec les conditions initiales suivantes : x(0)=0, v(0)=2 pour la première trajectoire qui sera tracée en noir, et v(0)=4 pour la seconde qui sera tracée en vert.

2 Oscillateur harmonique non amorti en régime libre

L'équation différentielle pour ce type d'oscillateur s'écrit

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0$$

1. Pour notre étude, nous prendrons $\omega = 1$. Pourquoi cela n'enlève-t-il rien à la généralité de l'étude ?

2. A l'aide de la commande `dsolve`, résoudre analytiquement l'équation différentielle puis tracer la solution obtenue. On prendra pour conditions initiales :
$x(t = 0) = 1$, $\dot{x}(t = 0) = 0$.

3. Tracer sur le même graphe les trajectoires dans l'espace des phases sur deux périodes et pour une série de six conditions initiales différentes :
$x(t = 0) = 0$, $\dot{x}(t = 0) = i$, $i \in \{-3 \dots 3\}, i \neq 0$.

4. A quoi voit-on que la solution est toujours périodique ?

5. Combien y a-t-il de courbes ? Quelle propriété de l'équation différentielle est à l'origine de ce résultat ?

6. Comment se traduit la conservation de l'énergie sur le portrait de phase ?

3 Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide en régime libre

L'équation différentielle s'écrit

$$\ddot{x} + \frac{\omega}{Q}\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

1. On garde toujours $\omega = 1$. Pour $Q = 20, 10, 1, 0.5$ et 0.25, résoudre analytiquement l'équation différentielle et tracer les solutions obtenues. On prendra pour conditions initiales $x(t = 0) = 1$, $\dot{x}(t = 0) = 0$.

2. Retrouver par le calcul le facteur de qualité Q_c correspondant au régime critique puis, pour chacune des solutions obtenues, donner le régime correspondant.

3. Quelle est l'influence du facteur de qualité en régime pseudo-périodique ? Vérifier que Q donne une bonne approximation du nombre d'oscillations visibles en régime pseudo-périodique.

4. Sur trois graphes différents, tracer les portraits de phase sur 15 secondes pour $Q = 10, 0.5$ et 0.25. Pour chacun des graphes, on prendra deux conditions initiales différentes :
$x(t = 0) = 0$, $\dot{x}(t = 0) = i$, $i \in \{-1, 1\}$

5. Identifier les trois régimes.

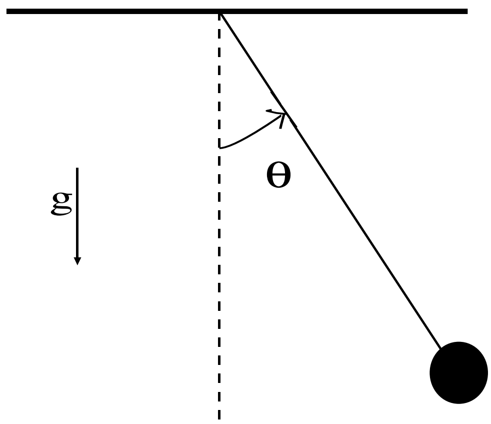
6. Les solutions sont-elles périodiques ?

7. Comment se traduit le perte d'énergie par frottement fluide ?

8. En analysant l'équation différentielle, expliquer pourquoi on n'obtient pas les mêmes portraits de phase pour $\dot{x}(t = 0) = +1$ et $\dot{x}(t = 0) = -1$.

4 Pendule simple non amorti

On considère une masse ponctuelle m suspendue à une tige rigide de longueur l et de masse négligeable. On repère la position du pendule par l'angle $\theta(t)$ entre la tige et la verticale.



1. En prenant une énergie potentielle nulle en $\theta = 0$, donner l'expression de l'énergie mécanique du système. En déduire que l'équation différentielle régissant le mouvement du pendule s'écrit
$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$$
avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. On prendra $\omega = 2\pi\ s^{-1}$

2. Résoudre numériquement cette équation différentielle avec comme conditions initiales :
$\theta(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 13\ rad.s^{-1}$
$\theta(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 8\ rad.s^{-1}$
$\theta(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 4\ rad.s^{-1}$
$\theta(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 1\ rad.s^{-1}$

3. Dans les quatre cas, tracer sur le même graphe la solution obtenue ainsi que la solution calculée dans le cadre de petites oscillations. Conclusion ?

4. Tracer sur le même graphe les portraits de phase entre 0 et 2 secondes pour quatre jeux de conditions initiales :
$\theta(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 4\ rad.s^{-1}$
$\theta(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 8\ rad.s^{-1}$
$\theta(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 12\ rad.s^{-1}$
$\theta(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 13\ rad.s^{-1}$

5. Montrer par le calcul que le pendule effectue un tour complet s'il est lancé depuis sa position d'équilibre avec une vitesse angulaire initiale strictement supérieure à 2ω en valeur absolue. Retrouver le résultat sur le portrait de phase.

6. On suppose que la vitesse angulaire initiale donnée au pendule est exactement 2ω. Ecrire $\frac{dt}{d\theta}$ en fonction de θ puis exprimer, à l'aide d'une intégrale, le temps nécessaire au pendule pour atteindre la position $\theta = \pi$. Que vaut ce temps ? Pourquoi cette situation n'est-elle en pratique jamais observée ?

5 Pendule simple amorti par frottement fluide, pour ceux qui vont plus vite que leur ombre

Dans ce cas, l'équation différentielle régissant le système s'écrit

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

1. Tracer entre 0 et 20 secondes le portrait de phase en prenant :
   $\alpha = 0.3\ s^{-1}$
   $\theta(t = 0) = 0$, $\dot{\theta}(t = 0) = 16\ rad.s^{-1}$

2. Observer l'amortissement de la solution. On pourra tester d'autres valeurs de α.