

TD Maple n°6 : Petit exercice de logique

Lycée Louis le Grand

PCSI 1

Lundis 2 et 9 mars 2009

On demande à deux logiciens, que nous appellerons par commodité Peter et Samantha de bien vouloir se prêter au petit jeu suivant : on choisit deux nombres entiers compris entre 2 et 100 et on en confie le produit p à Peter et la somme à s à Samantha, en leur demandant de calculer ces deux nombres. S'ensuit alors le mystérieux dialogue suivant.

- Peter (se grattant le menton) : “Je ne suis pas capable de calculer ces deux nombres”.
- Samantha (avec un sourire en coin) : “Je le savais”.
- Peter (le visage s'illuminant) : “Dans ce cas, je connais les deux nombres !”
- Samantha (qui a toujours le dernier mot) : “Alors moi aussi !”

Quels peuvent donc bien être ces deux nombres ?

Etape 1

Créer une procédure `decomp(p)` qui prend en argument un entier p et qui renvoie la liste des couples d'entiers $[i, j]$ tels que $p = i \times j$ avec i et j compris entre 2 et 100. On pourra utiliser les fonctions `irem` et `iquo` de Maple.

Etape 2

p est un entier compris entre 4 et 10 000. De tous ces entiers, quels sont ceux que l'on peut éliminer à l'aide de la première observation de Peter ? Créer une liste `Lprod` de tous les produits possibles compte tenu de cette première phrase.

Etape 3

s est un entier compris entre 4 et 200. D'après la première remarque de Samantha, toutes les combinaisons de s en $i + j$ donnent des produits $i \times j$ qui sont dans `Lprod`.

Exemple : $s = 11$ est un entier possible car $11 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$ et que
 $2 \times 9 = 18$ est aussi décomposable en 3×6 ,
 $3 \times 8 = 24$ est aussi décomposable en 4×6 ,
 $4 \times 7 = 28$ est aussi décomposable en 2×14 ,
 $5 \times 6 = 30$ est aussi décomposable en 2×15 ,

Créer une liste Lsom qui resence toutes ces sommes possibles compte tenu de la première phrase de Peter et de la première phrase de Samantha. *On pourra créer une procédure desomme(s) analogue à decomp(p) et utiliser l'instruction member relative aux ensembles.*

Etape 4

Soit maintenant une somme s de Lsom. Soit i et j une décomposition $s = i + j$. On pose $p = i \times j$. Créer une liste L de tous les produits p ainsi obtenus. *On pourra passer par les ensembles pour éliminer les doublons.*

Etape 5

Soit p un élément de L. On décompose p en $i \times j$. Pour que Peter, qui est loin d'être insensible au sourire de Samantha, puisse déterminer i et j après son affirmation, il faut que, parmi toutes ces décompositions, une seule fasse partie de Lsom. Cela permet de déterminer Lprod2, la liste des produits possibles.

Etape 6

A vous de déterminer quelle est la dernière étape et le résultat final.
Question subsidiaire : Peter et Samantha vivront-ils heureux, auront-ils de nombreux enfants ?

Annexe : Rappels sur les listes

Pour définir une liste : [$>$ L :=[1,4,9,16] ;

Liste vide : [$>$ L :=[] ;

Nombre d'éléments d'une liste : [$>$ nops(L) ;

i -ème élément d'une liste : [$>$ L[i] ;

Extraction d'une sous-liste : [$>$ L[i..j] ;

Ajout d'un élément à la fin d'une liste : [$>$ L :=[op(L),25] ;

Ajout d'un élément à la i -ème place d'une liste : [$>$ L :=[op(L[1..i-1]),25,op(L[i..nops(L)]]] ;

Pour boucler sur les éléments d'une liste, deux possibilités :

```
[>for i from 1 to nops(L) do
```

```
  L[i] :=2 ;
```

```
  ...
```

```
od ;
```

ou bien :

```
[>for m in L do
```

```
  m :=2 ;
```

```
  ...
```

```
od ;
```