TD Maple n°4 : Séries et courbe de Tagaki

Lycée Louis le Grand

PCSI 1

Lundis 10 et 17 décembre 2007

Rappel : pour définir une suite u_n ou une fonction f, deux méthodes possibles :

1. `u := n->` *expression* ou `f := x->` *expression*, des valeurs s'obstiennent par `u(10)` ou `f(1)`.
2. `u :=` *expression* ou `f :=` *expression*, des valeurs s'obstiennent par `subs(n=10,u)` ou `subs(x=1,f)`.

1 Calcul de sommes de série

Pour calculer certains réels, il est parfois judicieux de trouver des séries numériques qui tendent vers ce réel. Si la série converge rapidement, il suffit alors de calculer une somme partielle de cette série pour avoir une valeur approchée du réel. Nous allons par exemple calculer $\ln(2)$ grâce à la série harmonique alternée.

1. Vérifier avec Maple que
$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
Ainsi, pour calculer une valeur approchée de $\ln(2)$, on choisit un entier n et on calcule “à la main” $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$. Le choix de l'entier n se fait en fonction de la précision voulue.
2. En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}dx$, montrer que
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} - S_n = \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}$$
3. Montrer que
$$\left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$
4. En déduire n pour que S_n donne une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-4} près. Que vaut cette approximation ?
5. Au vu de la vitesse de convergence de la série, utiliser la série harmonique alternée pour approcher $\ln(2)$ vous semble-t-il une bonne stratégie ?
6. Donner une série qui permette d'approcher e^x. La convergence est-elle rapide ?

2 Série alternée vérifiant le critère spécial à partir d'un certain rang

Soit $u_n = (-1)^n \dfrac{(\ln n)^2}{n+2}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n).
2. Trouver le rang à partir duquel la suite $(|u_n|)$ est décroissante.
   Rappel : à partir de ce rang, le reste de la série $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est majoré en valeur absolue par $|u_{n+1}|$ et R_n est du signe de u_{n+1}.

   On souhaite déterminer le signe de la somme $S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.
3. Calculer S_{20},u_{21} puis S_{21},u_{22}. Peut-on en déduire le signe de S ? A quelle condition pourrait-on déterminer le signe de S ?
4. Ecrire une boucle qui calcule les sommes partielles S_n et compare $|S_n|$ et $|u_{n+1}|$. La boucle s'arrête lorsque l'on peut conclure sur le signe de S. On affiche alors S_n et u_{n+1} et la valeur de n.

   NB : On peut initialiser le calcul à S_{20} que l'on peut obtenir avec la command `sum`.
   Ensuite, pour bien visualiser le rang à partir duquel on peut conclure, on affichera $[n, S_n, u_{n+1}]$ pour les 10 dernières valeurs de n.

3 Courbe de Tagaki : une fonction continue mais dérivable nulle part

Pour x réel, on note $g(x) = dist(x, \mathbb{Z})$ la distance de x à l'entier relatif le plus proche, et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k(x) = \dfrac{g(2^k x)}{2^k}$.

1. Vérifier que $x \to f_k(x)$ est une fonction $\dfrac{1}{2^k}$-périodique d'amplitude maximale $\dfrac{1}{2^{k+1}}$. Tracer sur $[0,1]$ les fonctions f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5.
2. Pour x réel, montrer que la série $\sum_{k\geq 0} f_k(x) = \sum_{k\geq 0} \dfrac{g(2^k x)}{2^k}$ est convergente.

   On peut donc définir sur $\mathbb{R}$ la fonction somme : $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{g(2^k x)}{2^k}$.
   On notera $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{g(2^k x)}{2^k}$ la somme partielle et $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{g(2^k x)}{2^k}$ le reste.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |R_n(x)| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$. En déduire l'entier N pour lequel S_N approche S à 10^{-4} près.
4. Tracer les sommes partielles d'ordre $n = 2, 5, 10$ et N sur $[0,1]$.
5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On cherche à montrer que S est continue en x_0. Soit $\epsilon > 0$. En remarquant que :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| \quad (1)$$

   et en utilisant la majoration de $|R_n(x)|$ et le fait que la fonction S_n est continue en x_0, conclure sur la continuité de S en x_0.
6. Examiner la courbe de S sur $[0.3, 0.4]$ puis sur $[0.33, 0.34]$. Regarder en d'autres points.
7. On prend $x = 0.3$. Calculer $\dfrac{S(x+h) - S(x)}{h}$ pour $h = \pm 2^{-k}$ avec $k = 1..10$.
   Que suggèrent ces résultats ? On démontre en s'inspirant de cette méthode que S n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.