TD Maple n°3 : Etude de suites

Lycée Louis le Grand

PCSI 1

Mercredis 12 et 19 octobre 2007

Il est vivement conseillé d'avoir à portée de main feuille de brouillon et crayon, et de sauver votre page de calcul dès le début. En *italique*, vous trouverez des indications et des commandes Maple que vous pourrez utiliser pour répondre aux questions.

1 Etude de quelques suites

1. Pour chacune des suites suivantes, écrire une procédure Maple qui prend comme arguments le premier terme de la suite et un entier n, et qui renvoie le n-ième terme de la suite.
   (a) $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n+1)}$, équivalent en $+\infty$: $\frac{n}{2}$
   (b) $v_0 = 1$, $v_{n+1} = v_n cos(\frac{v_n}{2})$, équivalent en $+\infty$: $\frac{2}{\sqrt{n}}$
   (c) $w_0 = 1$, $w_{n+1} = \sqrt{n + w_n}$, équivalent en $+\infty$: $\sqrt{n}$

2. Pour chaque suite, afficher les valeurs des 10 premiers termes, ainsi que du 100-ième et du 1000-ième termes. Comparer ces valeurs avec celles de la suite équivalente.

   NB : Il est péférable de donner comme valeur initiale "1.0" plutôt que "1" à vos procédures. Ceci permet de passer automatiquement en calcul approché plutôt que de traîner des formules exactes et inutilisables. Attention tout de même, car le calcul approché peut avoir des conséquences dramatiques comme nous le verrons dans la section 2.

3. Afficher les représentations graphiques correspondant à diverses valeurs de w_0. *On pourra utiliser l'instruction* `seq` *pour générer le tableau* $[[0, w_0], [1, w_1], ..., [N, w_N]]$.

2 Instabilité numérique

On étudie dans cette section des suites à récurrence linéaire double, c'est à dire définies par une relation linéaire entre u_{n+2}, u_{n+1}, et u_n. On comparera les valeurs numériques de certains termes de la suite obtenus d'une part, avec la formule exacte de u_n et d'autre part, avec un programme calculant u_n de façon approchée à partir de u_0 et u_1.

1. La suite de Fibonacci est définie par $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$
   (a) Donner la formule exacte de f_n en fonction de n. Avec cette formule, donner la valeur de f_{100}. *On pourra utiliser l'instruction* `rsolve`.
   (b) Ecrire une procédure qui prend en arguments un entier n, deux réels f_0 et f_1, et qui renvoie la valeur de f_n calculée à l'aide d'une boucle *for*. Que vaut alors f_{100} ?
2. Reprendre la même étude avec cette fois-ci $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_{n+2} = \frac{5}{2} g_{n+1} - g_n$

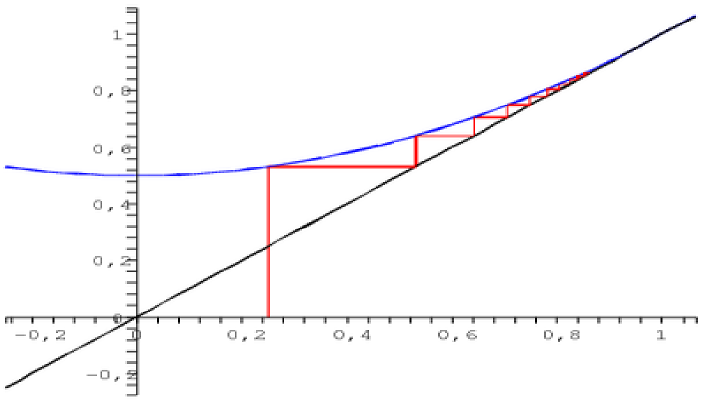
3. On garde la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais on change les conditions initiales : $g_0 = 2$, $g_1 = 1$. Les valeurs de g_{100} calculées par la solution exacte et par votre programme sont-elles les mêmes ? Expliquer ce phénomène. *On pourra demander à Maple de résoudre la récurrence sans conditions initiales.*
4. Donner des conditions initiales f_0 et f_1 à la suite de Fibonacci pour la rendre instable. *On pourra résoudre la récurrence sans conditions, puis trouver une relation entre* f_0 et f_1 *qui annulerait le terme qui explose.*

3 Ligne brisée décrivant une suite

On considère une fonction f continue et la suite $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in \mathbb{R}$. On prendra pour illuster ici la suite $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$, $u_0 = 0.25$. Nous allons visualiser le comportement de la suite par une représentation graphique. En partant du point de coordonées $(u_0, 0.)$, on construit la ligne brisée obtenue en prenant un point sur la première bissectrice, de coordonnées (u_k, u_k), puis un point sur la courbe de coordonnées (u_k, u_{k+1}). On rangera les coordonnées des points de la ligne brisée dans une liste initialisée aux deux premiers points $(u_0, 0.)$, et (u_0, u_1).

```
[>u0 :=1.25 ;
[>n :=20 ;
[>L :=[[u0,0.],[u0,f(u0)]] ;
```

1. Ecrire une procédure `lignebrisee :=proc(f,n,u0)`, où f est une fonction, n un entier et $u0$ le terme initial, et qui retourne le graphe de la ligne brisée des n premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On pourra utiliser `plot,display`.
2. Etudier ainsi les suites $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$, et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$, $u_0 \in \mathbb{R}$.



4 Suite de Syracuse, pour les sprinters du Maple

Un entier p étant donné, on définit $f(p)$ par :

$$\begin{cases} f(p) = \dfrac{p}{2} & \text{si p est pair} \\ f(p) = 3p+1 & \text{si p est impair} \end{cases}$$

1. Ecrire une procédure qui affiche, à partir de l'entrée d'un entier p, la liste des images successives par f jusqu'à arriver à 1.
Exemple : $p = 2$ donne $[2, 1]$, $p = 3$ donne $[3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]$.

2. Modifier la procédure pour qu'elle fournisse la longueur de la liste. Quel est l'entier compris entre 2 et 100 qui fournit la plus longue suite de Syracurse ?