Calcul Différentiel et Analyse Complexe
–
10ème séance de cours

Singularité isolées

On rappelle les définitions. Si on a une fonction $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ définie au voisinage d'un point on dit que z_0 est une singularité isolée si f est holomorphe sur $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ pour un certain $R > 0$. Aussi, on dit que

- z_0 est une singularité artificielle s'il existe un voisinage de z_0 où f est bornée,
- z_0 est un pôle si $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$,
- z_0 est une singularité essentielle s'il n'est ni une singularité artificielle ni un pôle.

Une fonction $f : \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$, définie sur un ouvert Ω privé d'un fermé S, est dité méromorphe si

- elle est holomorphe sur $\Omega \setminus S$,
- l'ensemble S est composé de points isolés
- tout point de S est soit une singularité artificielle soit un pôle.

Par abus de language, on dit que f est méromorphe sur Ω (c'est comme si on acceptait de dire que f est définie sur S et prend éventuellement la valeur ∞).

On insiste que les singulairté artificielles sont des fausses singularités : la fonction pourrait être étendue à ce point tout en restant holomorphe. En effet, si une fonction f est holomorphe sur un ouvert étoilé (une boule $B(z_0, R)$, par exemple) sauf en un point, où elle est localement bornée, on peut utiliser le théorème de Goursat pour trouver une fonction g, holomorphe sur toute la boule (y compris en z_0) telle que $g' = f$ en tout point où f est continue (revoir la preuve de la construction d'une primitive). Puisque la dérivée d'une fonction holomorphe est une fonction holomorphe (ceci est une conséquence de la formule de Cauchy), g' est aussi holomorphe. Donc f peut être étendue à une fonction holomorphe définie aussi en z_0 (la fonction g').

On a le théorème suivant

Proposition 1. *Un point z_0 est une singularité artificielle pour f si et seulement si les coefficients $(a_n)_{n<0}$ de la partie singulière de son développement de Laurent sont tous nuls. Il est un pôle s'ils sont tous nuls sauf un nombre fini, et une singularité essentielle s'il y en a une infinité qui sont non-nuls. De plus, z_0 est une singularité essentielle si et seulement si l'image $f(B(z_0, R) \setminus \{z_0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$ pour tout $R > 0$.*

On rappelle qu'un ensemble dense est un ensemble qui a une intersection non vide avec toute boule.

Démonstration. On commence par distinguer deux cas. Soit l'image $f(B(z_0, R) \setminus \{z_0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$ pour tout $R > 0$, soit ce n'est pas le cas. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors il existe $R > 0$, $b \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $f(B(z_0, R) \setminus \{z_0\}) \cap B(b, r) = \emptyset$. Autreent dit, $|f(z) - b| \geq r > 0$ pour tout z tel que $0 < |z - z_0| < R$. Considerons alors la fonction $g(z) := 1/(f(z) - b)$. Elle est holomorphe sur $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ parce que le dénominateur ne s'annule pas, et elle y est aussi bornée. On peut donc l'étendre à une fonction holomorphe $\tilde{g}(z)$ qu'on écrira sous la forme $(z - z_0)^m h(z)$, où h est une fonction holomorphe avec $h(z_0) \neq 0$ (pour faire ça, on prend $m = 0$ si déjà la valeur en z_0 n'est pas nulle, sinon on prend $m =$ l'ordre de zéro de z_0). Quitte a réduire R, on peut supposer $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in B(z_0, R)$ et on appelle $\hat{h} = 1/h$, qui est aussi une fonction holomorphe. On obtient donc

$$f(z) = b + \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} = b + \frac{\hat{h}(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{\hat{h}_b(z)}{(z - z_0)^m},$$

où la fonction $\hat{h}_b(z) := \hat{h}(z) + b(z - z_0)^m$ est une autre fonction holomorphe. On peut à nouveau écrire $\hat{h}_b(z) = (z - z_0)^k u(z)$ pour une fonction holomorphe u telle que $u(z_0) \neq 0$ et $k \geq 0$. Quitte à simplifier

$(z-z_0)^m$ avec $(z-z_0)^k$ on a maintenant

$$f(z) = \frac{u(z)}{(z-z_0)^m} = \sum_n c_n (z-z_0)^n (z-z_0)^m$$

avec $c_0 \neq 0$ (car $u(z_0 \neq 0)$. Ceci montre que f s'écrit en série de Laurent en commençant à partir de l'exposant $-m$ (attention, après avoir simplifié $(z-z_0)^k$ on ne sait plus si m est positif ou négatif).

On peut donc distinguer deux sous-cas : si $m \leq 0$ la série de Laurent n'a pas d'exposants négatifs, la fonction f est donc holomorphe jusqu'en z_0 et ce point est une singularité artificielle ; si $m > 0$ (donc $m \geq 1$) on a bien des exposants négatifs, mais en nombre fini. On peut donc écrire

$$|f(z)| = \frac{1}{|z-z_0|^m}(|c_0| + o(1)),$$

ce qui montre qu'on a $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$. On a donc un pôle.

Reste le cas où $f(B(z_0, R) \setminus \{z_0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$ pour tout $R > 0$. Dans ce cas f ne peut pas être bornée au voisinage de z_0, sinon l'image serait contenue dans une boule et ne serait pas dense. Aussi, on ne peut pas avoir $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ sinon l'image serait contenue dans le complémentaire de toute boule, pour R suffisamment petit, et ne serait pas dense non plus. Alors z_0 est bien une singularité essentielle. Quid de son développement en série de Laurent ? s'il n'y avait qu'on nombre fini de termes avec exposants négatifs on pourrait appliquer le même raisonnement qu'auparavant (en factorisant celui avec l'exposant le plus grand… c'st justement le fait que quand il y en a une infinité on ne peut pas procéder ainsi qui fait la différence entre pôles et singularités essentielles) et trouver un pôle ; s'il n'y avait pas de termes avec exposants négatifs on aurait une fonction bornée… donc il faut forcément avoir une infinité de coefficients a_n, pour $n < 0$, non-nuls. $\square$