Calcul Différentiel et Analyse Complexe
–
Questions pour un QCM

Exercice 1. En quatre versions

Version 1

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 + y^4 - xy - 1$ et l'ensemble $E := \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Au voisinage du point $(1, 0)$ peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites pour écrire l'ensemble E comme le graphe d'une fonction C^1 ?

— oui, pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ mais pas $x = \phi(y)$
— oui, pour avoir un graphe du type $x = \phi(y)$ mais pas $y = \phi(x)$
— oui, tant pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ que du type $x = \phi(y)$ (BONNE)
— non

Version 2

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 + y^4 - xy - 15$ et l'ensemble $E := \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Au voisinage du point $(1, 2)$ peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites pour écrire l'ensemble E comme le graphe d'une fonction C^1 ?

— oui, pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ mais pas $x = \phi(y)$ (BONNE)
— oui, pour avoir un graphe du type $x = \phi(y)$ mais pas $y = \phi(x)$
— oui, tant pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ que du type $x = \phi(y)$
— non

Version 3

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 + y^4 - xy - 13$ et l'ensemble $E := \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Au voisinage du point $(4, 1)$ peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites pour écrire l'ensemble E comme le graphe d'une fonction C^1 ?

— oui, pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ mais pas $x = \phi(y)$
— oui, pour avoir un graphe du type $x = \phi(y)$ mais pas $y = \phi(x)$ (BONNE)
— oui, tant pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ que du type $x = \phi(y)$
— non

Version 4

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 + y^4 - xy - 1$ et l'ensemble $E := \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Au voisinage du point $(0, 1)$ peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites pour écrire l'ensemble E comme le graphe d'une fonction C^1 ?

— oui, pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ mais pas $x = \phi(y)$
— oui, pour avoir un graphe du type $x = \phi(y)$ mais pas $y = \phi(x)$
— oui, tant pour avoir un graphe du type $y = \phi(x)$ que du type $x = \phi(y)$ (BONNE)
— non

Corrigé

On peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour obtenir $y = \phi(x)$ si $\partial f/\partial y \neq 0$ et pour obtenir $x = \phi(y)$ si $\partial f/\partial x \neq 0$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - x.$$

Dans les quatre points qui nous intéressent on a la situation suivante : dans la V1 et la V4, les deux dérivées partielles sont non nulles ; dans V2 c'est celle part rapport à x qui s'annulle, donc on peut juste avoir $y = \phi(x)$, et dans la V3 c'est celle par rapport à y, donc on a $x = \phi(y)$.

Exercice 2. En quatre versions

Version 1

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (e^{3x}\cos y, e^x \sin y)$. Une seule parmi les affirmations suivantes est vraie : laquelle ?

— f est un difféomorphisme locale au voisinage de chaque point de $\mathbb{R}^2$ (BONNE)

— f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image

— f est surjective mais pas injective

— f est injective mais pas surjective

Version 2

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (e^{-x}\cos y, e^x \sin y)$. Une seule parmi les affirmations suivantes est vraie : laquelle ?

— f est un difféomorphisme locale au voisinage de chaque point de $\mathbb{R}^2$

— f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image

— f est surjective mais pas injective

— f n'est ni injective ni surjective (BONNE)

Version 3

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (e^{-3x}\cos y, e^{-x} \sin y)$. Une seule parmi les affirmations suivantes est vraie : laquelle ?

— f est un difféomorphisme locale au voisinage de chaque point de $\mathbb{R}^2$ (BONNE)

— f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image

— f est surjective mais pas injective

— f est injective mais pas surjective

Version 4

Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (-e^{x}\cos y, e^{-x} \sin y)$. Une seule parmi les affirmations suivantes est vraie : laquelle ?

— f est un difféomorphisme locale au voisinage de chaque point de $\mathbb{R}^2$

— f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image

— f est surjective mais pas injective

— f n'est ni injective ni surjective (BONNE)

Corrigé

A cause des fonctions trigonométriques, aucune de ces quatre fonctions n'est injective parce que $f(x,y+2\pi) = f(x,y)$. Aucune n'est surjective non plus, parce qu'on ne peut jamais obtenir $(0,0)$ dans l'image : il faudrait $\cos(y) = \sin(y) = 0$. En particulier, on n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image parce qu'il n'y a pas d'injectivité. Reste à voir si on a un difféomorphisme locale, ce qui dépend exclusivement du déterminant de la Jcobienne. Si $f(x,y) = (ce^{\alpha x}\cos y, e^{\beta x}\sin y)$ on a

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} c\alpha e^{\alpha x}\cos y & -ce^{\alpha x}\sin y \\ \beta e^{\beta x}\sin y & e^{\beta x}\cos y \end{pmatrix},$$

et donc

$$\det(Df(x,y)) = ce^{(\alpha+\beta)x}(\alpha\cos^2 y + \beta\sin^2 y)$$

. Si α et β ont le même signe (et sont non nuls, tout comme c) ce déterminant ne s'annule jamais, s'ils ont des signes opposés il peut s'annuler.

Dans V1 et V3 les deux exposants ont le même signe et on a donc un difféomorphisme local, dans V2 et V4 ils ont des signes opposés, le déterminant s'annule pour tous les (x,y) où $\cos^2 y = \sin^2 y$, et on n'a donc pas de difféomorphisme local, la réponse correcte étant donc celle qui dit “ni injective ni surjective”.

Exercice 3. En quatre versions

Version 1

Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta > 0$, considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |x|^\alpha |\sin(y)|^\beta/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Pour quelles valeurs de α et β la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

- pour $\alpha, \beta > 1$
- pour $\alpha + \beta > 2$
- pour $\alpha, \beta \geq 1$
- pour $\alpha + \beta > 3$ (BONNE)

Version 2

Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta > 0$, considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(|x|^\alpha)|\sin(y)|^\beta/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Pour quelles valeurs de α et β la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

- pour $\alpha, \beta > 1$
- pour $\alpha + \beta > 2$
- pour $\alpha, \beta \geq 1$
- pour $\alpha + \beta > 3$ (BONNE)

Version 3

Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta > 0$, considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \arctan(|x|^\alpha)|y|^\beta/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Pour quelles valeurs de α et β la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

- pour $\alpha, \beta > 1$
- pour $\alpha + \beta > 2$
- pour $\alpha, \beta \geq 1$
- pour $\alpha + \beta > 3$ (BONNE)

Version 4

Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta > 0$, considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |x|^\alpha |y||^\beta/\arctan(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Pour quelles valeurs de α et β la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

- pour $\alpha, \beta > 1$
- pour $\alpha + \beta > 2$
- pour $\alpha, \beta \geq 1$
- pour $\alpha + \beta > 3$ (BONNE)

Corrigé

Toutes ces fonctions s'annulent sur les axes cordonnées, les dérivées partielles sont donc nulles. Pour que la fonction soit différentiable, il faut et il suffit donc d'avoir $|f(x,y)| = o(\sqrt{x^2+y^2})$. Puisque le dénominateur est le carré de la norme et le numérateur est d'ordre $\alpha + \beta$, il faut $\alpha + \beta - 2 > 1$, donc $\alpha + \beta > 3$.

Exercice 4. En quatre versions

Version 1

Considérer la fonction $F : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ définie par $F(f)(x) = f(x)f(1-x)$. L'application linéaire $DF(f)$, différentielle de F en f, est donnée par...

— $h \mapsto H$ où $H(x) = h(x) + h(1-x)$
— $h \mapsto H$ où $H(x) = h(x) - h(1-x)$
— $h \mapsto H$ où $H(x) = f(1-x)h(x) + f(x)h(1-x)$ (BONNE)
— $h \mapsto H$ où $H(x) = f(x)h(x) + f(1-x)h(1-x)$

Version 2

Considérer la fonction $F : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ définie par $F(f)(x) = (\int_0^1 f(t)dt)f(x)$. L'application linéaire $DF(f)$, différentielle de F en f, est donnée par...

— $h \mapsto (\int_0^1 h(t)dt)h$
— $h \mapsto (\int_0^1 h(t)dt) + h$
— $h \mapsto f(\int_0^1 h(t)dt) + (\int_0^1 f(t)dt)h$ (BONNE)
— $h \mapsto \int_0^1 f(t)h(t)dt$

Version 3

Considérer la fonction $F : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ définie par $F(f)(x) = (f - f(0) - f(1))^2$ (c'est-à-dire $F(f)(x) = (f(x) - f(0) - f(1))^2$). L'application linéaire $DF(f)$, différentielle de F en f, est donnée par...

— $h \mapsto (h - h(0) - h(1))^2$
— $h \mapsto h - h(0) - h(1)$
— $h \mapsto (f - f(0) - f(1))(h - h(0) - h(1))$
— $h \mapsto 2(f - f(0) - f(1))(h - h(0) - h(1))$ (BONNE)

Version 4

Considérer la fonction $F : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ définie par $F(f) = (f - \int_0^1 f(t)dt)^2$ (c'est-à-dire $F(f)(x) = (f(x) - \int_0^1 f(t)dt)^2$). L'application linéaire $DF(f)$, différentielle de F en f, est donnée par...

— $h \mapsto (h - \int_0^1 h(t)dt)^2$
— $h \mapsto 2h - 2\int_0^1 h(t)dt$
— $h \mapsto 2(f - \int_0^1 f(t)dt)(h - \int_0^1 h(t)dt)$ (BONNE)
— $h \mapsto 2(f - \int_0^1 f(t)dt)(\int_0^1 h(t)dt)$

Corrigé

Toutes ces fonctions sont de la forme $f \mapsto F(f) = A(f)B(f)$ où $A(f)$ et $B(f)$ sont des fonctions continues qui dépendent linéairement de f et satisfont $||A(f)||_\infty, ||B(f)||_\infty \leq C||f||_\infty$. Les deux applications linéaires peuvent être égales, comme dans le cas de V3 et V4. En général, elles utilisnet les valeurs de f en certains points, variables ou fixes, et/ou l'intégrale de f. Si on calcule $F(f+h)$ on a

$$F(f+h) = A(f+h)B(f+h) = A(f)B(f) + A(h)B(f) + A(f)B(h) + A(h)B(h).$$

Comme on a $||A(h)B(h)||_\infty \leq C||h||_\infty^2 = o(|h||_\infty)$ on identifie la différentielle de F comme étant

$$h \mapsto A(h)B(f) + A(f)B(h).$$

Évidemment, si $A = B$, ceci donne $2A(f)A(h)$. Les quatres bonnes réponses sont obtenues de cette manière.

Exercice 5. En quatre versions

Version 1

Soit $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ une courbe parametrée par longueur d'arc. Une seule parmi les affirmations suivantes est toujours vraie : laquelle ?

- γ est forcement injective
- on a $|\gamma(t) - \gamma(s)| = |t - s|$ pour tout $t, s \in [0, T]$
- on a $|\gamma(t) - \gamma(s)| \geq |t - s|$ pour tout $t, s \in [0, T]$
- si $\gamma \in C^2$ alors $\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) = 0$ pour tout t (BONNE)

Version 2

Soit $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ une courbe parametrée par longueur d'arc. Une seule parmi les affirmations suivantes est fausse : laquelle ?

- on a forcément $|\gamma(t) - \gamma(s)| \leq |t - s|$ pour tout $t, s \in [0, T]$
- on a forcément $|\gamma(t) - \gamma(s)| \geq |t - s|$ pour tout $t, s \in [0, T]$ (BONNE)
- si $\gamma \in C^2$ alors $\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) = 0$ pour tout t
- si $\gamma \in C^3$ alors $\gamma'(t) \cdot \gamma'''(t) = -|\gamma''(t)|^2$ pour tout t

Version 3

Soit $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ une courbe parametrée par longueur d'arc. Une seule parmi les affirmations suivantes est toujours vraie : laquelle ?

- γ est forcement injective
- on a $|\gamma(t) - \gamma(s)| = |t - s|$ pour tout $t, s \in [0, T]$
- on a $|\gamma(t) - \gamma(s)| \geq |t - s|$ pour tout $t, s \in [0, T]$
- si $\gamma \in C^3$ alors $\gamma'(t) \cdot \gamma'''(t) = -|\gamma''(t)|^2$ pour tout t (BONNE)

Version 4

Soit $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ une courbe parametrée par longueur d'arc. Une seule parmi les affirmations suivantes est fausse : laquelle ?

- γ est forcement injective (BONNE)
- on a forcément $|\gamma(t) - \gamma(s)| \leq |t - s|$ pour tout $t, s \in [0, T]$
- si $\gamma \in C^2$ alors $\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) = 0$ pour tout t
- si $\gamma \in C^3$ alors $\gamma'(t) \cdot \gamma'''(t) = -|\gamma''(t)|^2$ pour tout t

Corrigé

Si on pense à $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ on voit bien qu'une courbe paramétrée par longueur n'est pas forcément injective, que l'inégalité $|\gamma(t) - \gamma(s)| \leq |t - s|$ (qui est vraie par l'inégalité des accroissements finis et $|\gamma'| = 1$) n'est pas toujours une égalité, et que donc $|\gamma(t) - \gamma(s)| \geq |t - s|$ est aussi faux, en général. Par contre, il est vrai que si γ est suffisamment dérivable, en dérivant $\gamma' \cdot \gamma' = 1$ on obtient $2\gamma' \cdot \gamma'' = 0$ et ensuite, en divisant par deux, $\gamma' \cdot \gamma''' + \gamma'' \cdot \gamma'' = 0$. Cecipermet de dire que dans V1 toutes les affirmations sont fausses sauf la dernière, dans V2 elles sont toutes vraies sauf la deuxième, dans V3 toutes fausses sauf la dernière, et dans V4 toutes vraies sauf la première.

Exercice 6. En quatre versions

Version 1

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^n z^{n^2}$ est

- $\sqrt{2}$
- $1/\sqrt{2}$
- 1 (BONNE)
- $+\infty$

Version 2

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^n z^{2n}$ est

- $\sqrt{2}$
- $1/\sqrt{2}$ (BONNE)
- 2
- $+\infty$

Version 3

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^{\sqrt{n}} z^n$ est

- $\sqrt{2}$
- $1/\sqrt{2}$
- 1 (BONNE)
- $+\infty$

Version 4

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^{n\sqrt{n}} z^n$ est

- $\sqrt{2}$
- $1/\sqrt{2}$
- 0 (BONNE)
- $+\infty$

Corrigé

Le rayon de convergence R est donnée par $R^{-1} = \limsup_n |a_n|^{1/n}$ où les a_n sont les coefficients. Dans V1, comme on a z^{n^2}, la plupart des coefficients sont nuls, et pour les autres il faut calculer $(2^n)^{1/n^2}$, qui tend vers 1. On a donc $R = 1$. Dans V2 aussi on a des coefficients nuls (pour n impaires) et pour les autres il faut calculer $(2^n)^{1/(2n)}$, qui tend vers (en fait, vaut) $\sqrt{2}$. On a donc $R = 1/\sqrt{2}$. Dans V3 et V4 on a tous les coefficients, mais $\lim_n (2^{\sqrt{n}})^{1/n} = 2^0 = 1$ (donc $R = 1$) et $\lim_n (2^{n\sqrt{n}})^{1/n} = \lim_n 2^{\sqrt{n}} = \infty$ (donc $R = 0$).

Exercice 7. En quatre versions

Version 1

Considérer le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{-it}(2 - \sin(3t))$. L'indice $\mathrm{Ind}(0; \gamma)$ vaut

— 1
— 0
— -1 (BONNE)
— n'est pas défini parce que le point appartient à l'image du lacet.

Version 2

Considérer le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{it}(1 + \cos(3t))$. L'indice $\mathrm{Ind}(0; \gamma)$ vaut

— 1
— 0
— -1
— n'est pas défini parce que le point appartient à l'image du lacet. (BONNE)

Version 3

Considérer le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{it}(2 + \sin(3t))$. L'indice $\mathrm{Ind}(2e^{i\pi/6}; \gamma)$ vaut

— 1 (BONNE)
— 0
— -1
— n'est pas défini parce que le point appartient à l'image du lacet.

Version 4

Considérer le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{it}(1 + \sin(3t))$. L'indice $\mathrm{Ind}(e^{i\pi/6}; \gamma)$ vaut

— 1 (BONNE)
— 0
— -1
— n'est pas défini parce que le point appartient à l'image du lacet.

Corrigé

Ces lacets sont tous de la forme $t \mapsto e^{\pm it}h(t)$ avec $h \geq 0$. Cela signifie qu'ils sont parcourue dans le sens direct si on a $+it$ à l'exposant, et dans le sens inverse si on a $-it$. Dans V1 on a $h \geq 1$ donc 0 est bien à l'intérieur du lacet. Son indice vaut donc -1 (à cause de l'orientation du lacet). Dans V2 h peut valoir 0, donc 0 est sur le lacet. Son indice n'est pas défini. Dans V3 et V4 il faut vérifier si le point est à l"intérieur du lacet ou pas. Comme il est de la forme $e^{it_0}h_0$, il faut vérifier si on a $h_0 \leq h(t_0)$, ce qui est bien le cas. Il est donc à l'intérieur, avec un indice de 1. Dans le cas de V4 le lacet n'st pas injectif parce que h peut valoir 0, mais ce n'est pas grave.

Exercice 8. En quatre versions

Version 1

Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, considérer la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \alpha(z + \bar{z}) + \beta z^2$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si

- $\alpha, \beta = 0$
- $\alpha = 0$ (BONNE)
- $\beta = 0$
- $\alpha \in \mathbb{R}$

Version 2

Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, considérer la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \alpha(z^3 + z^2) + \beta \mathrm{Im}(z)$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si

- $\alpha, \beta = 0$
- $\alpha = 0$
- $\beta = 0$ (BONNE)
- $\alpha \in \mathbb{R}$

Version 3

Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, considérer la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \alpha \mathrm{Re}(z^2) + \beta z^2$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si

- $\alpha, \beta = 0$
- $\alpha = 0$ (BONNE)
- $\beta = 0$
- $\alpha = -\beta$

Version 4 Etant donnés deux nombres $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, considérer la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \alpha|z|^2 + \beta z^2$. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si

- $\alpha, \beta = 0$
- $\alpha = 0$ (BONNE)
- $\beta = 0$
- $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$

Corrigé

Les fonctions $z \mapsto \mathrm{Re}(z), |z|^2, \bar{z}$ ne sont pas holomorphes (on peut s'en convaincre en regardant les conditions de Cauchy-Riemann ou, pour la partie réelle et le module au carré, en remarquant que c'est des fonctions non-constantes dont l'image n'est pas un ouvert). Par contre touts les autres fonctions qui apparaissent sont des polynômes et sont donc holomorphes. La seule possibilité pour obtenir une fonction holomorphe est annuler le coefficient de la partie qui contient un terme non-holomorphe, ce qui permet de trouver les réponses cherchées.

Exercice 9. En quatre versions

Version 1

Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct, $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre avec $|\alpha| \neq 1$, et $f : C \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = (z^2 - (\alpha+2)z + 2\alpha)^{-1}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $\int_C f(z)dz = 0$?

— Pour $|\alpha| < 1$
— Pour $|\alpha| > 1$ (BONNE)
— Pour tout α
— Seulement pour $\alpha = 0$

Version 2

Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct, $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre avec $|\alpha| \neq 1$, et $f : C \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = (\alpha z^2 - (2\alpha+1)z + 2)^{-1}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $\int_C f(z)dz = 0$?

— Pour $|\alpha| < 1$ (BONNE)
— Pour $|\alpha| > 1$
— Pour tout α
— Seulement pour $\alpha = 0$

Version 3

Soit C le cercle de rayon 1 centré en 1, parcouru dans le sens direct, $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre avec $|\alpha| \neq 1$, et $f : C \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = (z^2 - (\alpha+4)z + 3(1+\alpha))^{-1}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $\int_C f(z)dz = 0$?

— Pour $|\alpha| < 1$
— Pour $|\alpha| > 1$ (BONNE)
— Pour tout α
— Seulement pour $\alpha = 0$

Version 4

Soit C le cercle de rayon 1 centré en 1, parcouru dans le sens direct, $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre avec $|\alpha| \neq 1$, et $f : C \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = (\alpha z^2 - (4\alpha+1)z + 3(1+\alpha))^{-1}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $\int_C f(z)dz = 0$?

— Pour $|\alpha| < 1$ (BONNE)
— Pour $|\alpha| > 1$
— Pour tout α
— Seulement pour $\alpha = 0$

Corrigé

Toutes ces fonctions sont holomorphes en déhors des points où le dénominateur s'annule. Le dénominateur étant un polynôme d'ordre au plus deux, il s'annule en au plus deux points. Il faut voir si ces points tombent à l'intérieur du cercle ou pas. Si les deux tombent à l'extérieur alors l'intégrale s'annule parce que la fonction est holomorphe sur un ouvert étoilé contenant le lacet. Si un seul tombe à l'intérieur alors l'intégrale ne s'annule pas, parce qu'on aurait en ce point un pôle d'ordre 1, donc un résidu non nul. Ce srait plus compliqué si deux pôles tombaient à l'intérieur parce que les deux résidus pourraient se compenser, mais heureusement ce n'est jamais le cas. Et si le pôle tombait exactement sur le cercle alors l'intégrale ne serait pas définie, mais ce n'est pas le cas non plus.

Pour V1 le dénominateur s'écrit comme $(z-\alpha)(z-2)$; les pôles sont α et 2 ; 2 est à l'extérieur et pour que α le soit il faut $|\alpha| > 1$. Pour V2 le dénominateur s'écrit comme $(\alpha z - 1)(z-2)$; les pôles sont α^{-1} et 2 ; 2 est à l'extérieur et pour que α^{-1} le soit il faut $|\alpha| < 1$. Ceci ne marche pas pour $\alpha = 0$, mais dans ce cas le polynôme est d'ordre 1, avec un seule racine, à l'extérieur. Pour V3 le dénominateur s'écrit comme $(z-(1+\alpha))(z-3)$; les pôles sont $1+\alpha$ et 2 ; le cercle est centré en 1, donc 3 est à l'extérieur et pour que $1+\alpha$ le soit il faut $|\alpha| > 1$. Pour V4 le dénominateur s'écrit comme $(\alpha z - (1+\alpha))(z-3)$; les pôles sont $1+\alpha^{-1}$ et 3 ; le cercle est centré en 1, donc 3 est à l'extérieur et pour que $1+\alpha^{-1}$ le soit il faut $|\alpha| < 1$. Ceci ne marche pas pour $\alpha = 0$, mais dans ce cas le polynôme est d'ordre 1, avec un seule racine, à l'extérieur.

Exercice 10. En quatre versions

Version 1

La fonction $z \mapsto e^{iz}$ est bornée…

— … sur $\mathbb{C}$

— … sur $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ est la seule droite du plan complexe où elle est bornée

— … sur $\mathbb{R}$, ainsi que sur d'autres droites du plan complexe (BONNE)

— … sur toute droite du plan complexe

Version 2

La fonction $z \mapsto \sin z := \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ est bornée…

— … sur $\mathbb{C}$

— … sur $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ est la seule droite du plan complexe où elle est bornée

— … sur $\mathbb{R}$, ainsi que sur d'autres droites du plan complexe (BONNE)

— … sur toute droite du plan complexe

Version 3

La fonction $z \mapsto \cos z := \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ est bornée…

— … sur $\mathbb{C}$

— … sur $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ est la seule droite du plan complexe où elle est bornée

— … sur $\mathbb{R}$, ainsi que sur d'autres droites du plan complexe (BONNE)

— … sur toute droite du plan complexe

Version 4

La fonction $z \mapsto e^{z}$ est bornée…

— … sur $\mathbb{C}$

— … sur l'axe imaginaire pur $i\mathbb{R}$, et cet axe est la seule droite du plan complexe où elle est bornée

— … sur l'axe imaginaire pur $i\mathbb{R}$, ainsi que sur d'autres droites du plan complexe (BONNE)

— … sur toute droite du plan complexe

Corrigé

Aucune de ces fonctions n'est bornée sur $\mathbb{C}$, puisqu'elles sont holomorphes mais non constantes. La fonction e^{iz} est bornée sur $\mathbb{R}$, mais également sur toute droite où la partie imaginaire est fixée, puisqu'on obtient alors $|e^{iz}| = e^{-\mathrm{Im(z)}} = const$. De même, en utilisant l'écriture de $\sin z$ et $\cos z$ en termes de $e^{\pm iz}$, ces fonctions sont aussi bornées sur toute droite où la partie imaginaire est fixée. En ce qui concerne e^z, c'est la partie réelle qui doit être fixée pour obtenir un module constant. D'autre part, si on regarde e^{iz} sur l'axe imaginaire, ou e^z sur l'axe réel, ou même $\sin z = (e^b - e^{-b})/2i$ pour $z = ib$ ou $\sin z = (e^b + e^{-b})/2$, on obtient des fonctions non-bornées. Du coup, pour toutes, la bonne réponse est celle où sur plusieurs droites, mais pas sur toutes, la fonction est bornée.

Exercice 11. En quatre versions

Version 1

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction (pas nécessairement holomorphe) telle que e^f est bornée. Que peut-on déduire sur f ?

— que f est bornée
— que $\mathrm{Re} f$ est bornée
— que $\mathrm{Re} f$ est bornée supérieurement (BONNE)
— que $\mathrm{Re} f$ est bornée inférieurement

Version 2

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction (pas nécessairement holomorphe) telle que e^{if} est bornée. Que peut-on déduire sur f ?

— que f est bornée
— que $\mathrm{Im} f$ est bornée
— que $\mathrm{Im} f$ est bornée supérieurement
— que $\mathrm{Im} f$ est bornée inférieurement (BONNE)

Version 3

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction (pas nécessairement holomorphe) telle que e^{-f} est bornée. Que peut-on déduire sur f ?

— que f est bornée
— que $\mathrm{Re} f$ est bornée
— que $\mathrm{Re} f$ est bornée supérieurement
— que $\mathrm{Re} f$ est bornée inférieurement (BONNE)

Version 4

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction (pas nécessairement holomorphe) telle que e^{-if} est bornée. Que peut-on déduire sur f ?

— que f est bornée
— que $\mathrm{Im} f$ est bornée
— que $\mathrm{Im} f$ est bornée supérieurement (BONNE)
— que $\mathrm{Im} f$ est bornée inférieurement

Corrigé

Pour borner $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}(\cos \mathrm{Im}(z) + i \sin \mathrm{Im}(z)))$ il faut borner supérieurement la partie réelle de z. On l'applique aux quatre cas où f est multipliée fois ± 1 ou $\pm i$: en utilisant $\mathrm{Re}(-f) = -\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Re}(if) = -\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Re}(-if) = \mathrm{Im}(f)$ on obtient les quatre réponses.

Exercice 12. En quatre versions

Version 1

La série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^{2n}$ converge sur $B(0,1)$ et sur cette boule vaut

- $\frac{1}{(1-z)^2}$
- $\frac{z}{1-z^2}$
- $\frac{1}{(1-z^2)^2}$ (BONNE)
- $\frac{n+2}{1-z^2}$

Version 2

La série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^{3n}$ converge sur $B(0,1)$ et sur cette boule vaut

- $\frac{1}{(1-z^3)^3}$
- $\frac{z}{1-z^3}$
- $\frac{n+3}{1-z^3}$
- $\frac{1}{(1-z^3)^2}$ (BONNE)

Version 3 La série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^{2n+1}$ converge sur $B(0,1)$ et sur cette boule vaut

- $\frac{z}{(1-z)^2}$
- $\frac{1}{1-z^2}$
- $\frac{z}{(1-z^2)^2}$ (BONNE)
- $\frac{2n+1}{1-z^2}$

Version 4

La série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^{3n+2}$ converge sur $B(0,1)$ et sur cette boule vaut

- $\frac{1}{(1-z^3)^3}$
- $\frac{z}{1-z^3}$
- $\frac{n+3}{1-z^3}$
- $\frac{z^2}{(1-z^3)^2}$ (BONNE)

Corrigé

Tout d'abord on calcule $\sum_{n\geq 0} z^n = 1/(1-z)$ et $\sum_{n\geq 0} z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} z^n = 1/(1-z) - 1$. En dérivant, on a

$$S(z) := \sum_{n\geq 0}(n+1)z^n = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z} - 1\right) = \frac{1}{1-z^2}.$$

On observe que dans V1 il faut calculer $S(z^2)$, dans V2 on a $S(z^3)$, dans V3 on a $zS(z^2)$, et dans V4 on a $z^2S(z^3)$, ce qui donne les formules cherchées.

Exercice 13. En quatre versions

Version 1

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction donnée par $f(z) = (z^2+1)(z+1)^2$ et C le cercle centré en l'origine et de rayon 2, parcouru dans le sens direct. Combien vaut $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$?

- $4\pi i$
- 4
- $8\pi i$ (BONNE)
- 0

Version 2

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction donnée par $f(z) = (z^2-1)(z+3)^2$ et C le cercle centré en l'origine et de rayon 2, parcouru dans le sens direct. Combien vaut $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$?

- $4\pi i$ (BONNE)
- 4
- $8\pi i$
- 0

Version 3

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction donnée par $f(z) = (z^2+9)(z+1)^2$ et C le cercle centré en l'origine et de rayon 2, parcouru dans le sens direct. Combien vaut $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$?

- $4\pi i$ (BONNE)
- 4
- $8\pi i$
- 0

Version 4

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction donnée par $f(z) = (z^3-1)(z+1)^3$ et C le cercle centré en l'origine et de rayon 2, parcouru dans le sens direct. Combien vaut $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$?

- $12\pi i$ (BONNE)
- 6
- $8\pi i$
- 0

Corrigé

La réponse vient du théorème de Rouché : l'intégrale de f'/f sur un lacet est égale à $2\pi i$ fois la somme des multiplicités des zéros de f contenus à l'intérieur du lacet. Dans V1 les quatre zéros sont à l'intérieur, dans V2 il y en a deux à l'intérieur et deux à l'extérieur, dans V3 aussi, et dans V4 les six zéros sont à l'intérieur.

Exercice 14. En quatre versions

Version 1

Soit f la fonction donnée par $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$, définie sur l'ensemble où son dénominateur ne s'annule pas. Combien de singularités isolées la fonction f a-t-elle dans l'ouvert $B(0,7)$?

- aucune.
- deux pôles et une singularité essentielle
- deux pôles et une singularité artificielle (BONNE)
- trois pôles

Version 2

Soit f la fonction donnée par $f(z) = \frac{z}{e^{iz} - 1}$, définie sur l'ensemble où son dénominateur ne s'annule pas. Combien de singularités isolées la fonction f a-t-elle dans l'ouvert $B(0,7)$?

- aucune.
- deux pôles et une singularité essentielle
- deux pôles et une singularité artificielle (BONNE)
- trois pôles

Version 3

Soit f la fonction donnée par $f(z) = \frac{2z}{e^{2z} - 1}$, définie sur l'ensemble où son dénominateur ne s'annule pas. Combien de singularités isolées la fonction f a-t-elle dans l'ouvert $B(0,7)$?

- aucune.
- trois pôles et deux singularité essentielles
- trois pôles et deux singularité artificielles
- quatre pôles et une singularité artificielle (BONNE)

Version 4

Soit f la fonction donnée par $f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1}$, définie sur l'ensemble où son dénominateur ne s'annule pas. Combien de singularités isolées la fonction f a-t-elle dans l'ouvert $B(0,7)$?

- aucune.
- deux pôles et une singularité essentielle
- deux pôles et une singularité artificielle (BONNE)
- trois pôles

Corrigé

La fonction $e^z - 1$ s'annule pour $z = 2k\pi i$, ce qui donne trois zéros dans la boule de rayon 7 puisque 2π vaut un peu moins que 7. Attention, pour la fonction $e^{2z} - 1$ les zéros sont ceux de la form $z = k\pi i$ et il y en a cinq dans la boule $B(0,7)$. Chacun de ces zéros est simple et donne lieu à un pôle d'ordre 1, sauf si le numérateur s'annule en ême temps, ce qui est le cas pour $z = 0$, qui donne finalement une singularité artificielle parce que la fonction est bornée au voisinage de 0.

Exercice 15. En quatre versions

Version 1

Soit f la fonction donnée par $f(z) = e^{z^2}$. Une seule parmi les affirmations suivantes est vraie, laquelle ?

- f est périodique de période $i\sqrt{2\pi}$
- f est périodique de période $\sqrt{2\pi i}$
- f est bornée sur l'ensemble des complexes z avec $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ (BONNE)
- Il n'existe pas de suite $(z_k)_k$ où la différence $z_{k+1} - z_k$ est une constante non nulle telle que $f(z_k) = 1$

Version 2

Soit f la fonction donnée par $f(z) = e^{z^2}$. Une seule parmi les affirmations suivantes est vraie, laquelle ?

- f est périodique de période $2\pi i$
- f est périodique de période $\sqrt{2\pi i}$
- Il n'existe pas de suite $(z_k)_k$ où la différence $z_{k+1} - z_k$ est est une constante non nulle telle que $f(z_k) = 1$
- Il existe une suite $(z_k)_k$ telle que $|z_k| \to \infty$ et $f(z_k) = 1$ (BONNE)

Version 3

Soit f la fonction donnée par $f(z) = e^{z^2}$. Une seule parmi les affirmations suivantes est vraie, laquelle ?

- f est périodique de période $2\pi i$
- f est périodique de période $\sqrt{2\pi}i$
- f est bornée sur l'ensemble des complexes z avec $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 0$ (BONNE)
- Il n'existe pas de suite $(z_k)_k$ où la différence $z_{k+1} - z_k$ est une constante non nulle telle que $f(z_k) = 1$

Version 4

Soit f la fonction donnée par $f(z) = e^{z^2}$. Une seule parmi les affirmations suivantes est vraie, laquelle ?

- f est périodique de période $2\pi i$
- f est périodique de période $\sqrt{2\pi}i$
- f est bornée sur l'ensemble des complexes qui sont imaginaires purs (BONNE)
- Il n'existe pas de suite $(z_k)_k$ telle que $|z_k| \to \infty$ et $f(z_k) = 1$

Corrigé

Ce qui est vrai :

- que f est bornée sur les imaginaires pures, parce que dans ce cas z^2 est un réel négatif
- que f est bornée sur les z tels que $\mathrm{Re}(z) = \pm\mathrm{Im}(z)$ parce que dans ce cas z^2 est un imaginaire pur
- que la suite $z_k = \sqrt{k}\alpha$ où $\alpha^2 = 2\pi i$ satisfait $f(z_k) = 1$ et cette suite est telle que $|z_k| \to \infty$
- que, bien que pas évident, il existe une suite z_k où $z_{k+1} - z_k$ est une constante non-nulle telle que $f(z_k) = 1$: il suffit de prendre $z_k = k\alpha$, avec le même α ci-dessus

Ce qui est faux :

- que la fonction est périodique. Si elle était périodique de période T, il faudrait avoir $f(z+T) = f(z)$ donc $(z+T)^2 - z^2 = 2k\pi i$ pour tout z. La constante k pourrait dépendre de z mais si on définit $k(z) := (2\pi i)^{-1}((z+T)^2 - z^2)$ on obtiendrait une fonction continue à valeurs entières, donc une constante. Or, la fonction $z \mapsto (z+T)^2 - z^2 = 2Tz + T^2$, n'est pas constante.