

Filippo Santambrogio

CV

Novembre 2015

Né à Milan (Italie), le 13 juin 1980. 35 ans. Double nationalité Française et Italienne ; marié, sans enfants.
<http://www.math.u-psud.fr/~santambr/>

1 Études et carrière

Depuis 2010 Professeur à l'Université Paris-Sud, dans l'équipe Analyse Numérique et EDP.

Promu à la *Première Classe* des professeurs des universités en mai 2014.

2009 *Habilitation à diriger des recherches*, soutenue à l'université Paris-Dauphine (25 Novembre), présentée par Ivar Ekelet. Titre : *Problèmes classiques et moins classiques en transport optimal: régularité, approximation, EDP et applications*. Jury : Y. Brenier, G. Buttazzo, G. Carlier, J.-A. Carrillo, I. Ekelet, P.-L. Lions, J.-M. Morel, C. Villani. Rapporteurs : J.-A. Carrillo, L. C. Evans, C. Villani.

2007-2010 *Maître de Conférences* à l'Université Paris-Dauphine, dans l'équipe Économie Mathématique, Jeux et Finance.

2007 Post-doc au CMLA de l'ENS Cachan sous la supervision de Jean-Michel Morel (Janvier-Août).

2006 Thèse en Mathématiques (Perfezionamento in Matematica à la SNS de Pise). Soutenance le 12 décembre 2006. Titre *Variational problems in transport theory avec mass concentration*, directeur G. Buttazzo.

2003-2006 Doctorant à la SNS de Pise (majeur au concours national d'admission au doctorat SNS) ; directeur de thèse : Giuseppe Buttazzo.

2003 Laurea (équivalent Master 2) en Mathématiques à l'Università di Pisa : 110/110 cum laude ; Diplôme de la SNS (soutenance du mémoire *Optimal measures in urban planning problems*, sous la supervision de G. Buttazzo.

1999-2003 Études à la SNS de Pise (normalien) et à l'Università di Pisa (majeur au concours national d'admission au cours ordinaire en Sciences de la SNS).

Prix : Médaille de Bronze aux Olympiades Internationales de Mathématiques, IMO 1999, Bucharest ; Premio B. Sciarra, attribué par la SNS Pisa en 2003 (niveau master) ; Premio G. Iapichino, attribué par l'*Accademia dei Lincei* en 2007 (jeunes analystes italiens). PEDR en 2008-2012 et PES en 2012-2016.

2 Enseignement, responsabilités, encadrement

2.1 Enseignement

Depuis 2007, j'ai régulièrement donné des cours d'analyse et optimisation dans plusieurs établissements en France et à l'étranger.

- Analyse, niveau L1 à Paris-Dauphine : 2008, 2009 et 2010, et à l'Institut Tunis Dauphine : 2010 et 2011 ; Analyse niveau L1 à Polytech Paris-Sud : 2010 et 2011 ;
- Analyse, niveau L2, pour mathématiciens et physiciens à Paris-Sud : 2015 et 2016 ;
- Optimisation dynamique, niveau M1 (2e année école d'ingénieur) : à l'ISSEA (Yaoundé, Cameroun) : 2008 et 2009 ; à l'ENSAE Sénégal (Dakar) : 2009 et 2012 ; à l'ENSAE (Malakoff) : 2010, 2011, 2012, 2013 ;
- Optimisation numérique (M1 Ingénierie Mathématique à Paris-Sud) : 2011, 2012, 2013, 2014 et 2015 ; en 2015/16 la structure a changé, le cours est maintenant en commun avec l'ENSTA : je donne des TD et des compléments de cours pour les étudiants d'Orsay.

J'ai également été chargé de TD en analyse, algèbre linéaire, programmation dynamique et optimisation, surtout entre 2007 et 2010. Auparavant (en thèse à Pise) j'avais donné des TD d'analyse pour ingénieurs. Aussi, j'ai donné des cours plus avancés de niveau M2-école doctorale.

- Transport optimal à Paris-Sud en 2011 et 2012 ; j'avais également participé à un cours sur le transport optimal en commun avec F. Bolley et B. Nazaret à Paris-Dauphine et 2008 et 2009 ;
- Euler Incompressible à Paris-Sud (2013, le même cours avait été proposé à Tsinghua, Pékin, en 2012) ;
- Équations Elliptiques et Calcul des Variations en M2 à Paris-Sud, en 2012, 2013 et 2014.
- Calcul des Variations, M2 Paris-Saclay, 2015.

2.2 Responsabilités pédagogiques principales

- De 2011 à 2015, j'ai été responsable du Master 2 en *Équations aux Dérivées Partielles et Calcul Scientifique* à Paris-Sud.
- Depuis septembre 2015, je suis responsable du nouveau Master 2 *Optimization*, créé en 2015 dans le cadre du Master de Mathématiques et Applications de Paris-Saclay.
- De 2011 à 2015 : membre du conseil de l'École Doctorale en Mathématiques de Paris-Sud.

2.3 Vulgarisation et activité avec les écoles

- Tuteur dans plusieurs stages de préparation aux Olympiades de Mathématiques en Italie, de 2000 à 2005 ; tuteur lors d'une rencontre d'orientation pour étudiants de terminale organisée par la SNS Pisa, 2006.
- Pre-conférences pour la conférence de C. Villani sur J. Nash à la BNF, 2010 (dans des lycées de Paris et de St. Germain-en-Laye).
- Membre du comité éditorial de la brochure de vulgarisation "L'explosion des mathématiques", 2012.
- Intervention dans une classe de 6e à Briis-sous-Forges, 2015.
- Séminaire pour des étudiants de classe préparatoire au "Mathematik Park", 2015.

2.4 Encadrement Doctoral

- Lorenzo Brasco, *cotutelle* Pisa-Dauphine, co-dirigé (33%) avec G. Buttazzo et G. Carlier. Sujet : "Geodesics et PDE methods in transport models", soutenue en Octobre 2010. L. Brasco est maintenant professeur à l'Università de Ferrara (Italie).
- Nicolas Bonnotte, *cotutelle* SNS Pisa - Orsay, co-dirigé avec L. Ambrosio (50%): "Unidimensional et evolution methods for optimal transport". Soutenue en Décembre 2013. Nicolas travaille actuellement comme data scientist dans une start-up à Bordeaux.
- Jean Louet: "Problèmes de transport optimal avec pénalisation en gradient". Soutenue en Juillet 2014. Jean est actuellement ATER à Paris-Dauphine.
- Alpár Mészáros, "Mean Field Games avec density constraints". Soutenue en Septembre 2015. Alpár est maintenant adjunct assistant professor à UCLA.
- Antonin Monteil, co-dirigé (50%) avec R. Ignat, "Approximations elliptiques d'énergies singulières sous contrainte de divergence". Soutenance prévue le 7 décembre 2015.
- Paul Pegon, 2e année : "Fractal issues in branched transport".
- Samer Dweik, 1ère année : "Estimates and regularity questions on transport densities".

J'ai également supervisé 10 stages de M2 à Orsay, Polytechnique et Paris 6, 7 TER de niveau L3-M1, 4 stages d'initiation à la recherche de l'ENS Cachan et un group de travail ENSAE.

2.5 Organisation d'évènements scientifiques

- Organisation du colloque "Optimal Transport et Applications to Economics", Paris Juin 2009 (Ecole des Mines), avec G. Carlier et A. Galichon.
- Co-organisateur du GT de Calcul des Variations, 2009/10 à Paris-Dauphine.
- Depuis 2010 : co-organisateur du Séminaire Parisien d'Optimisation (SPO, une fois par mois à l' IHP). Mes coorganisateur sont actuellement P. Cardaliaguet, P.-L. Combettes, S. Gaubert et S. Sorin
- Organisation du colloque "Optimal Transport (to) Orsay", Juin 2012, avec F. Bolley, N. Bonnotte, G. Carlier et J. Louet.

- Organisation (avec B. Maury) d'une journée de travail sur le mouvement de foules pour l'ANR ISOTACE, Orsay, Avril 2013.
- Organisation (avec L. Moonens) d'une rencontre de l'ANR GEOMETRYA à Orsay, Mars 2014.
- Organisation (avec L. Brasco, A. Briani, L. De Pascale, I. Fragalà et P. Trebeschi) du colloque international "Calculus of Variations and Optimization (A conference on the occasion of the 60th birthday of Giuseppe Buttazzo)", Pise, Mai 2014.
- Organisation de l'école d'hiver et du colloque international "Optimal transport in the Applied Sciences", au RICAM de Linz, pendant le trimestre spécial sur le Calcul des Variations, Decembre 2014 (avec G. Carlier et T. Champin). Le budget qu'on a géré pour ces deux évènements était de 55k euros.
- Organisation (pour juin 2016) d'un mini-symposium de "Calcul des Variations" lors de la conférence PICOF 2016, Autrans.

2.6 Projets de recherche collaboratifs

- Actuellement membre de deux projets ANR pour 2012/16: ISOTACE (porteur: J.-D. Benamou, INRIA) et GEOMETRYA (porteur: H. Pajot, Grenoble).
- Auparavant membre de deux projets ANR : OTARIE (2007/11, porteur : A. Sobolevskii, Moscou) et EVAMEF (2009/12, porteur : A. Blanchet, Toulouse I).
- 2013/16: responsable d'un projet PGMO (financé par EDF et Fondation Hadamard, 11 participants en France, 25k euros de budget).
- 2014/16: co-responsable (avec F. Bonnans) d'un projet iCODE project (financé par Paris-Saclay, 9 participants, 11k euros de budget).
- 2010: responsable d'un projet franco-italien Galilée (6 participants en France, 6 en Italie, 6+6k euros).

2.7 Autres responsabilités

Expertise scientifique, comités scientifiques et de sélection

- Referee pour plus de 25 différents journaux en mathématiques pures et appliquées (dont *Comm. Pure Appl. Math.*, *J. Math. Pures Appl.*, *SIAM J. Math. An.*, *Calc. Var. PDE, Math. Op. Res.*, *J. Funct. An.*).
- Reviewer pour Mathscinet, jusqu'en 2011.
- Rapporteur pour plusieurs institutions finançant la recherche en Belgique, Italie, Israël et pour l'ERC.
- Membre du comité scientifique du PGMO (Programme Gaspard Monge pour l'Optimisation, EDF & FMJH) depuis sa création en 2012.
- Membre du jury du prix de thèse PGMO en 2013, président du même jury en 2014.
- Member du comité scientifique des journées MODE de Rennes, Mars 2014, et de la conférence PGMO-COPI, Palaiseau, Octobre 2014.

- Membre des comités de sélection à l'Université Pierre et Marie Curie (2009 et 2010), à l'Université de Nice-Sophia Antipolis (2010), à l'Université Paris-Dauphine (2010), à l'Université Lyon 1 Claude Bernard (2011), à l'Université Paris-Sud (2013, PR en informatique) et à l'Université Toulouse III (2015, PR).

Activité éditoriale

- Guest Editor d'un volume spécial de Discrete et Continuous Dynamical Systems, Series A, sur "*Optimal Transport et Applications*", co-édité avec A. Figalli, publié en 2014 (Vol. 34, no 4). 20 spécialistes ont soumis, essentiellement sur invitation, des articles pour ce numéro spécial (et 19 ont été publiés).
- Guest Editor d'un volume spécial d'ESAIM M2AN, Mathematical Modelling et Numerical Analysis, sur "*Optimal Transport in Applied Mathematics*" co-édité avec B. Maury publié en 2015 (Vol. 49, No. 6). Ce volume contient 13 articles de spécialistes, essentiellement sur invitation.
- Co-Editeur d'un volume spécial "*New Trends in Calculus of Variations: Shape et topological optimization, Optimal Transport in the Applied Sciences*", issu du trimestre thématique de RICAM (publication en 2016, la partie de transport optimal contiendra 8 articles écrits par les participants au colloque et à l'école).

Responsabilités administratives diverses

- Depuis Mai 2015, membre élu du conseil du laboratoire du LMO.
- Membre depuis 2015 des CCSU (Commission Consultative de Spécialistes de l'Université) des sections 25-26 et 27 (informatique) à l'Université Paris-Sud.

3 Conférences, Invitations et Visites

3.1 Conférences invitées

Une liste non-exhaustive de conférence internationales où j'ai exposé mes résultats dans les 5 dernières années :

- Mai 2011, *Roma I*, Mean field games et related topics ;
- Mai 2011, *SISSA*, Trieste, Modeling et Control of Nonlinear Evolution Equations ;
- Juin 2011, *IST*, *Lisboa*, Nonlinear PDEs ;
- Déc 2011, *Kyoto*, SNP 2011 "Singularities in nonlinear problems";
- Mars 2012 : *journées MODE* (Mathematics of Optimization et Decision, plenary speaker), Dijon ;
- Avril 2012 : international conference *PICOF* (plenary speaker), at Ecole Polytechnique ;
- Mai 2012 : "Geometry et Dynamics of Fluid", *CRM*, *Montréal* ;
- Juin 2012 : "Monge-Kantorovich optimal transportation problem, transport metrics et their applications" dedicated to the centenary of L. V. Kantorovich, *Euler Institute*, *St Petersburg* ;
- Nov 2012, *SNS Pisa*, Optimal Transportation and Applications ;
- Juil 2013, New Developments in Stochastic Analysis, *LIASFMA Summer School 2013*, Beijing ;

- Juil 2013, *International workshop on stochastics in economics, finance and physics*, Bielefeld ;
- Aug 2013, *MSRI Berkeley*, Introductory Workshop on Optimal Transport: Geometry and Dynamics ;
- Oct 2013, *LJK, Grenoble*, Modelisation avec optimal transport ;
- Sept 2014, *Fields Institute, Toronto*, Optimization, Transport and Equilibrium in Economics ;
- Oct 2014, *SNS Pisa*, Optimal Transportation et Applications ;
- Fév 2015, *BIRS, Canada*, Advances in Numerical Optimal Transportation ;
- Fév 2015, *HIM, Bonn*, New Trends in Optimal Transport ;
- Avril 2015, *ICMS, Edinburgh*, Gradient Flows ;
- Juin 2015, *IHP, Paris*, Mean field games and related topics ;
- Juin 2015, *Paris 6*, Gradient Flows in Paris ;
- Sept 2015, conférence *M3ST 2015* à Kalamata (Grèce) ;
- Oct 2015, *International Conference on Stochastic Analysis and Applications* à Hammamet, Tunisie ;
- Nov 2015, *Imperial College, London*, Workshop on Mathematics and Social Sciences ;
- (prévu pour déc 2015), *IMS Workshop on Congestion Games*, Singapour;;
- (prévu pour juin 2016) *KIAS, Seoul*, Conference on Analysis, Geometry, and Optimal Transport.

3.2 Séminaires, Colloquia, contributed talks

Depuis 2001 je participe chaque année à la rencontre italienne de Calcul des Variations à Levico Terme, et j'y ai exposé plusieurs fois. J'ai également proposé des séminaires dans plusieurs conférences en Italie et en France.

J'ai exposé dans les séminaires ou groupes de travail de plusieurs laboratoires en France (Paris 6, Paris-Dauphine, Paris-Sud, ENS - Cachan, Lyon, Ulm et Rennes -, Ecole Polytechnique, Dijon, Chambéry, Marseille, Montpellier, Rennes, Brest, Lille, Grenoble, Limoges, Tours), et à l'étranger (Pisa, Pavia, Bari, Torino, Milan Politecnico, Oxford, Reading, Imperial College, Yaoundé, Steklov Inst. at St Petersburg, Hefei, Nicosie, Athènes, Heraklion, Canberra).

J'ai également donné des exposés de type colloquium à Dijon, Canberra et Limoges.

3.3 Invitation Internationales d'enseignement

- Deux cours lors de l'école d'été de l'Institut Fourier à Grenoble en 2009, sur la théorie générale du transport (3h) et ses applications en économie (4h).
- Un cours de 6h lors d'une école d'été à Luminy en 2011 autour du transport branché.
- Cours de niveau master à Tsinghua University, Beijing, dans le cadre des FMJH-Tsinghua Lectures, en Avril 2012. Le cours a été partagé avec E. Miot, et portait sur les Équations d'Euler Incompressibles. 12h chacun.
- Un cours de transport optimal lors de la 5th European Summer School on Mathematical Finance, École Polytechnique (7.5h), 2012

- Mini-cours (5h) de transport optimal à l'Université d'Athènes, en Mai-Juin 2014, invité par N. Alikakos.
- Mini-cours (5x45') "Inside et around optimal transport" à Sant Feliu de Guíxols (Catalunya), European network MANET, Juin 2015.
- Cours d'école doctorale "Optimal Transport and Applications" à Trento-Verona, 20h, prévu pour mars-avril 2016.
- Cours de 7h lors d'une période thématique organisée à Lyon par l'ANR GEOMETRYA, prévu en juin 2016.

3.4 Séjours à l'étranger

Ci-dessous la liste de mes séjours à l'étrangers de plus d'une semaine après la fin de mes études.

- Bonn, 3 semaines en 2007, invité par F. Otto et Y. Brenier ;
- UCLA, 1 mois en 2008, lors du trimestre spécial de transport optimal ;
- Fields Institute, Toronto, 1 mois en 2014, lors du semestre spécial sur les problèmes variationnels ;
- ANU, Canberra, 3 semaines en 2015, invité par X.-J. Wang.

4 Résumé de l'activité scientifique des 5 dernières années

Les cinq dernières années coïncident environ avec mon activité en tant que Professeur des Universités à Paris-Sud. Avant de rentrer dans les détails des thèmes de recherche que j'ai le plus approfondis pendant ces années, je veux présenter le cadre de mon travail en résumant les traits principaux de mes autres activités (mon encadrement, mon enseignement, mes responsabilités pédagogiques et la rédaction d'une monographie).

4.1 Encadrement, enseignement, masters, ouvrages

Encadrement Dès l'arrivée à Paris-Sud j'ai dédié à l'encadrement doctoral une part très importante de mon temps. J'ai pris deux étudiants en thèse en 2010 (N. Bonnotte, J. Louet), dont un co-dirigé par L. Ambrosio. Les deux étudiants ont soutenu en fin 2013 et juillet 2014, respectivement. La thèse de N. Bonnotte a donné lieu à une publication dans *SIAM J. Math. An.* et comporte également deux parties non publiées: une étude numérique issue des résultats théoriques contenus dans l'article, et l'étude du flot de gradient de la Sliced-Wasserstein distance, un sujet que j'aimerais approfondir. Cela ne se fera sans doute pas en collaboration avec N. Bonnotte, qui travaille maintenant dans le secteur privé dans le domaine des big data. La thèse de J. Louet a donné lieu à des petits articles concernant le transport avec pénalisation en gradient (voir plus bas) et à un article plus consistant, récemment accepté dans *J. Math. Pures Appl.*.

Ensuite, en 2012 j'ai pris deux nouveaux doctorants (A. Mészáros et A. Monteil), dont un en co-direction avec R. Ignat. Un étudiant a soutenu en septembre, la soutenance de l'autre est fixée pour le 7 décembre. La thèse d'A. Mészáros, actuellement à UCLA, portait sur les jeux à champ moyen et a donné lieu à 5 articles, dont 2 acceptés (*J. Math. Pures Appl.*, *Arch. Rati. Mech. An.*), un en revision (avec rapports plutôt favorables) pour *Analysis and PDEs*, et deux soumis. La thèse d'A. Monteil, comportait une partie liée au transport branché (un article accepté dans *ESAIM COCV*) et une partie, plus proches des intérêts de l'autre directeur, R. Ignat, sur le micromagnétisme (un article accepté dans *Calc. Var. PDEs*, un autre en préparation), et est actuellement dans les mains des rapporteurs.

Deux autres thèses sont en cours, encadrées à 100% par moi-même : celle de P. Pegon (un étudiant de l'ENS Cachan avec qui j'ai déjà écrit des articles sur des sujets de transport optimal, qui étudie en ce moment l'existence de structures fractales en transport branché, 2e année) et celle de S. Dweik (étudiant libanais de notre M2, avec qui on a étudié des propriétés des densités de transport, voir plus en bas, 1ère année).

J'ai décidé au début de mon activité professorale de ne pas encadrer d'étudiants italiens, pour me dédier principalement au vivier local, mais je suis en train de rendre cela plus souple, et je co-encadre depuis un an un post-doc italien (S. Di Marino, thèse avec L. Ambrosio à la SNS de Pise). Son travail post-doctoral est co-encadré en collaboration avec B. Maury, et a donné lieu à un papier avec B. Maury et moi, un autre avec A. Mészáros, et un troisième avec d'autres jeunes chercheurs de notre ANR ISOTACE, qui le finance (ces trois papiers sont actuellement soumis), et d'autres études sont en cours.

Aussi, j'ai encadré plusieurs stages de M2 (dont 4 la dernière année) et des stages d'initiation à la recherche de l'ENS Cachan (par voie d'une convention avec Paris-Sud, cette activité est comptabilisée dans mon service d'enseignement), dont celui de P. Pegon qui a, trois ans plus tard, commencé une thèse avec moi.

Enseignement Il n'est pas question ici de détailler tous les cours que j'ai donnés, mais je signale les points plus importants de mon enseignement en ces dernières années. J'ai donné pendant 5 ans un cours d'optimisation numérique (algorithmes de gradient, . . .), sujet dont je ne suis pas spécialiste, au niveau M1. J'ai donné pendant mes deux premières années à Paris-Sud un cours spécialisé de transport optimal (qui a été suivi par une quinzaine d'étudiants ou chercheurs à chaque année), avant d'arrêter pour permettre de tourner. J'ai laissé la main à Yann Brenier, qui donne maintenant un cours sur des thèmes similaires, et j'ai pris depuis un cours du premier semestre du M2, autour des équations elliptiques et du calcul des variations. J'ai donné à ce cours une connotation plus variationnelle, jusqu'à cette année où le format a changé : nous avons maintenant un cours d'équations elliptiques et un de calculs des variations ; je m'occupe donc de celui de calculs des variations, en commun entre le master d'EDP et celui d'optimisation.

Responsabilités Pédagogiques Depuis ma première année à Paris-Sud, j'ai pris la responsabilité du Master 2 EDP et Calcul Scientifiques, qui était à l'époque en sous-effectif et nécessitait d'une restructuration. En utilisant les bourses de la Fondation Hadamard et de l'IDEX Paris-Saclay, en renonçant à un niveau de sélection trop élitiste tout en gardant un niveau correct, avec plus de publicité et un suivi personnalisé des étudiants et des candidatures nous sommes passés de 4 inscrits en 2010/11 à 14 et puis à 17 en 2013/14 et 2014/15. Les résultats des étudiants étaient satisfaisants: pour faire un exemple, parmi les 17 étudiants de la dernière année nous avons eu 3 abandons, 2 étudiants n'ayant pas obtenu le master, et 12 diplômés, 11 d'entre eux sont actuellement en thèse, dont 4 à Paris-Sud, 3 dans la région parisienne, 3 en province et 1 à l'étranger, le douzième ayant choisi de ne pas démarrer une thèse tout de suite.

Ce master n'existe plus dans cette configuration, et a fusionné avec un autre master plus appliqué dans le cadre du nouveau Master de Mathématiques et Applications de Paris-Saclay. Dans le même cadre j'ai été chargé de créer un Master 2 d'optimisation. Ceci a demandé 2 ans de travail, en collaboration avec des collègues de Polytechnique, de l'ENSTA et d'HEC (principalement S. Gaubert, P. Carpentier et T. Tomala) et le master a démarré en septembre dernier avec 14 inscrits. Dans la direction de cette nouvelle formation je dois aussi assurer des nouvelles fonctions, comme la recherche de contacts industriels pour proposer des stages aux étudiants.

Livre "Optimal Transport for Applied Mathematicians" Un autre projet auquel j'ai dédié beaucoup d'énergies ces dernières années est la préparation d'un livre autour du transport optimal. Par rapport aux livres existants (notamment ceux de C. Villani, ou le livre d'Ambrosio-Gigli-Savaré, j'ai voulu avoir une approche moins abstraite et plus tournée vers les applications (il y a un chapitre sur les méthodes numériques, ainsi que des discussions à la fin de chaque chapitre sur les modèles en économie, traitement d'images, mécanique des fluides. . . qui font intervenir des notions de transport optimal). L'année 2014 a été celle où j'ai travaillé le plus à ce projet (profitant donc de la délégation CNRS à 50% que j'avais obtenue pour 2013/14). Le livre vient de sortir, publié par Birkhäuser: <http://www.springer.com/gb/book/9783319208275>.

4.2 Recherche

Je précise ci-dessous les sujets de recherche que j'ai le plus développés lors de ces 5 dernières années.

EDP avec contraintes de densités (“mouvement de foules”) Ma recherche sur les équations d'évolution issues des modèles macroscopiques des mouvements de foules, en collaboration essentiellement avec Bertrand Maury et son équipe, avait déjà démarré avant 2010, avec notre premier papier (avec A. Roudneff-Chupin) où nous prouvons l'existence d'une solution dans le cas d'un champ de vitesse gradient, en interprétant le problème comme un flot de gradient dans l'espace de Wasserstein. Plus précisément, on s'intéresse au système

$$\begin{cases} \partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t (u_t - \nabla p_t)) = 0 \\ p \geq 0, \rho \leq 1, p(1 - \rho) = 0, \\ \rho_t (u_t - \nabla p_t) \cdot n = 0, \end{cases}$$

où ρ_t est une densité qui évolue en suivant un champ de vitesse u_t , mais ce champ est affecté par une pression qui apparaît là où la densité sature la contrainte $\rho \leq 1$.

Après [20], où nous étudions le cas $u_t = -\nabla V$, nous nous sommes intéressés à la comparaison des approches micro et macro, aux simulations numériques et à la modélisation dans [29], et ensuite à un modèle de croissance de bactéries sous contraintes de densités dans [34]. Progressivement, l'intérêt s'est déplacé vers l'étude générale de ces équations avec contraintes unilatérale de densité. Ceci a été fait dans le cadre des *Jeux à Champ Moyen* (voir plus en bas, [53, 59]) ou, avec un domaine qui bouge, dans le cadre des processus de rafle de Moreau [57]. Avec mon étudiant A. Mészáros, motivés par des applications aux Jeux à Champ Moyen, nous avons également étudié le cas où l'on rajoute de la diffusion, en regardant donc $\partial_t \rho_t - \Delta \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t (u_t - \nabla p_t)) = 0$ ([56]). Globalement, ces équations ressemblent beaucoup aux équations de Hele-Shaw, mais avec un rôle important joué par le terme d'avection $\nabla \cdot (\rho_t u_t)$ qui est en général absent de Hele-Shaw. Enfin, je signale le fait qu'on a obtenu dans [40] des estimations BV qu'on peut aisément appliquer à ce genre de problèmes avec contraintes.

Il me semble que, à l'exception des résultats d'unicité (sur lesquels Di Marino et Mészáros ont travaillé, avec des résultats partiels, le cas sans diffusion et avec un champ u à faible régularité restant toujours ouvert), la théorie est bien développée maintenant tant en ce qui concerne l'existence, les méthodes numériques, et plusieurs exemples de modélisation. Parmi les projets futurs, il y a le cas d'ordre deux en temps (équations d'Euler avec contrainte unilatérale de densité ; B. Maury y travaille en ce moment avec un étudiant du point de vue numérique) et également la possibilité de présenter toute la théorie de manière unifiée.

Collaborateurs : B. Maury, A. Roudneff-Chupin, J. Venel, A. Mészáros, S. Di Marino, B. Velichkov, G. De Philippis

Jeux à Champ Moyen La théorie des jeux à champ moyen, introduite par Lasry et Lions il y a une dizaine d'années, a des liens profonds avec le transport optimal, et également avec les problèmes de congestion de trafic que nous avons étudié avec Carlier et Jimenez. De ce fait, j'ai été invité à plusieurs colloques dédiés à ce sujet, et j'en ai profité pour proposer un modèle qui remplace la pénalisation de la densité par une contrainte, dans l'esprit de qu'on avait étudié avec Maury. Le modèle proposé dans [53] s'est révélé très difficile à étudier (des tentatives ont été faites dans le cadre de la thèse d'A. Mészáros, et nous sommes maintenant confiants que cela pourrait se

faire dans le cas stochastique, avec un peu de diffusion, même si les difficultés ne sont pas encore toutes résolues) mais a donné l'occasion de se pencher plus sur le problème. Avec P. Cardaliaguet et A. Mészáros nous avons ensuite étudié un modèle différent, [59], où la pression apparaît de manière additive (comme un prix, et non pas comme un drift) ; pour donner un sens à un résultat rigoureux d'équilibre, il a été nécessaire de prouver un peu de régularité pour la pression (qu'il fallait intégrer le long des trajectoires, ce qui n'a pas de sens si la pression est une mesure). Ceci a été possible grâce à une technique déjà utilisée par Y. Brenier pour Euler incompressible basée sur la dualité. Cette technique me semble d'ailleurs exploitable pour plusieurs autres problèmes, tant en Jeux à Champ Moyen (avec un stagiaire de M2, A. Prosinsky, nous avons étudié le cas de la pénalisation quadratique et prouvé un résultat global en temps, différemment du cas de la contrainte ; ce résultat sera vraisemblablement publié dans les actes d'une conférence en Grèce où je l'ai brièvement présenté) que dans d'autres problèmes variationnels.

Collaborateurs : P. Cardaliaguet, A. Mészáros, A. Prosinsky, G. Carlier

Approximations elliptiques de réseaux optimaux Ce sujet de recherche s'éloigne un peu de mes autres activités de ces dernières années et prend son départ dans l'étude du transport branché, sujet sur lequel j'ai beaucoup travaillé entre 2005 et 2010. Ce problème, assez classique, consiste à modéliser des réseaux de transport où le coût pour transporter une masse m le long d'une longueur l est de l'ordre de $m^\alpha l$. Ce problème s'exprime comme une minimisation d'une énergie $E^\alpha(v)$ parmi les champs de vecteurs $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que $\nabla \cdot v = \mu - \nu$ (μ et ν étant les mesures à connecter dans ce problème de transport), où l'énergie E^α n'est finie que sur les v qui sont des mesures singulières, concentrées sur un graphe rectifiable. Avec E. Oudet on avait étudié ([26, 46]), une manière d'approcher ce problème par des problèmes du type

$$\min \left\{ \varepsilon^{\alpha+1} \int |\nabla u|^2 + \varepsilon^{\alpha-1} \int |u|^\beta : u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d), \nabla \cdot u = \mu - \nu \right\},$$

où $\beta = \beta(\alpha, d)$. Dans nos travaux certaines questions restaient ouvertes : une (intégrer la contrainte de divergence dans le résultat de Γ -convergence) a été récemment résolue par A. Monteil dans sa thèse, et d'autres sont en cours de discussion avec G. Bouchitté.

Entretemps, avec A. Lemenant et M. Bonnivard ([47, 39]), nous avons considéré une approche similaire pour un autre problème de connexion optimal, problème de Steiner. Ce problème consiste à trouver l'exemple compact connexe Σ de longueur minimal connectant des points x_0, x_1, \dots, x_k donnés. On l'approche par des problèmes de type

$$\min \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int (1-u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^k d_u(x_i, x_0) : u \in H^1(\Omega), 0 \leq u \leq 1, u = 1 \text{ on } \partial\Omega \right\},$$

où $d_u(x, y) = \inf_\gamma \int_0^1 u(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$ est la distance géodésique Riemannienne associée à u . La preuve de ce résultat de Γ -convergence demande des outils fins de théorie de la mesure, et permet d'utiliser cette approche pour des calculs numériques. Nous avons également pu utiliser les mêmes résultats pour d'autres problèmes connexes (distance moyenne, compliance optimale...). Les développements actuels consistent surtout à améliorer les performances numériques.

Collaborateurs : E. Oudet, A. Lemenant, M. Bonnivard, A. Monteil, G. Bouchitté

Problèmes de transport avec pénalisation en gradient Ceci correspond à une nouvelle thématique en transport optimal, d'intérêt tant théorique que pour les applications (en images, notamment, ou en hydrodynamique, comme proposé dans un papier récent d'Yann Brenier). Il s'agit de minimiser, dans la classe des applications de transport satisfaisant $T_{\#}\mu = \nu$, des quantités qui ne portent pas seulement sur $(T(x), x)$ (fonctionnes d'ordre 0) mais également sur DT ou, plus en général, sur les variations $T(x) - T(y)$. Ceci a fait l'objet de la thèse de doctorat de J. Louet. Dans cette thèse (et dans [31, 41]) plusieurs problèmes sont analysés. En particulier, nous étudions la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ des minimiseurs du problème

$$\min \left\{ \int |T(x) - x| d\mu + \varepsilon \int |DT(x)|^2 dx : T \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d), T_{\#}\mu = \nu \right\}.$$

Auparavant, lors d'un stage d'initiation à la recherche de l'ENS Cachan ayant donné lieu à une publication, [33], nous avons étudié (hélas, seulement en dimension un) le problème

$$\min \{ \omega_{\delta}(T) : T_{\#}\mu = \nu \},$$

où $\omega_{\delta}(T) := \sup_{|x-y| \leq \delta} |T(x) - T(y)|$ (cette quantité étant exactement celle qui apparaît dans un problème de sécurité informatique où l'application T doit envoyer une densité μ non-uniforme vers une densité uniforme ν). Cette classe de problèmes, liée aussi à des problèmes de *quadratic assignment* en optimisation combinatoire, est encore sous-étudiée, et rencontre l'attention des communautés plus appliquées, mais nécessite d'une étude théorique poussée.

Collaborateurs : J. Louet, P. Pegon, D. Lesesvre

Théorie classique du transport optimal, densité de transport et régularité J'ai continué à étudier la théorie générale du transport optimal (existence et caractérisation des applications optimales, ...), en particulier en ce qui concerne les coûts "à la Monge" ($c(x, y) = |x - y|$). Je signale pour commencer un papier avec C. Jimenez, [32], où nous prouvons l'existence d'un transport optimal pour un coût quadratique avec contrainte $x - y \in C$, C étant un convexe donné. Ce résultat, bien que fait dans un cas strictement convexe, s'inspire beaucoup de certaines techniques (à la Champion- De Pascale) et peut être appliqué pour obtenir une nouvelle preuve de l'existence d'un transport optimal lorsque la norme Euclidienne est remplacée par une norme cristalline.

Dans ce cadre, un autre sujet auquel je tiens est l'étude de la densité de transport, c'est-à-dire la fonction $|v|$ où v resout le problème de Beckmann

$$\min \left\{ \int |v(x)| dx : \nabla \cdot v = \mu - \nu \right\}.$$

Ce problème étant étroitement lié au problème de Monge avec coût linéaire, pour étudier sa régularité, je suis tombé tout de suite sur la régularité du transport optimal T pour ce même coût. Celle-ci est une question très difficile, pour laquelle on n'a pas encore de réponse satisfaisante. Avec X.-J. Wang et son étudiant Q.-R. Li, nous avons des estimations ([35]) qui montrent qu'on peut borner les valeurs propres de la matrice jacobienne DT mais, la matrice n'étant pas symétrique, ceci n'implique pas que T est Lipschitzien (et on a un contre-exemple, qui laisse de toute manière ouverte la possibilité d'un résultat plus faible, puisque dans l'exemple le transport est $C^{0,\alpha}$). Plus récemment, à la suite de mon séjour à Canberra en juillet 2015, nous sommes en train d'étudier une stratégie pour

démontrer la continuité de T en dimension 2, lorsque les densité de μ et ν sont continues, sous d'autres hypothèses techniques, pourtant différentes des hypothèses utilisées dans le seul papier disponible pour l'instant à ce sujet, dû à Fragalà-Gelli-Pratelli.

Enfin, j'ai repris récemment l'étude des propriétés de sommabilité de la densité de transport ci-dessus, dans le cas où le bord du domaine joue un rôle particulier (un problème qui apparaît tant dans des modèles d'économie avec import-export que dans un problème d'optimisation de forme récemment étudié par Buttazzo-Oudet-Velichkov):

$$\min \left\{ \int_{\Omega} |v(x)| dx + \int_{\partial\Omega} g(x) d\nu(x) : \nabla \cdot v = \mu - \nu, \text{spt}(v) \subset \partial\Omega \right\}$$

(la mesure sur le bord fait partie de l'inconnue). Ceci a été l'objet du stage de M2 de S. Dweik, avec qui nous préparons en ce moment un article avec des estimations optimales. L'étude de la régularité d'ordre supérieure par des méthodes ne faisant pas intervenir le transport optimal mais des limites de problèmes elliptiques (type p -Laplacien) est en cours avec L. Brasco aussi.

Collaborateurs : C. Jimenez, X.-J. Wang, Q.-R. Li, S. Dweik, L. Brasco.

Publications

Voir www.math.u-psud.fr/~santambr et cvgmt.sns.it/people/santambro/

Références

- [1] G. BUTTAZZO AND F. SANTAMBROGIO, A model for the optimal planning of an urban area. *SIAM J. Math. Anal.* (37), no. 2, 514–530, 2005.
- [2] F. SANTAMBROGIO AND P. TILLI, Blow-up of optimal sets in the irrigation problem, *J. Geom. Anal.* (15), no. 2, 343–362, 2005.
- [3] G. CARLIER AND F. SANTAMBROGIO, A variational model for urban planning with traffic congestion, *ESAIM Contr. Opt. Calc. Var.* Vol. 11, No. 4, 2005, 595-613.
- [4] A. BRANCOLINI, G. BUTTAZZO AND F. SANTAMBROGIO, Path Functionals over Wasserstein spaces, *Journal of the European Mathematical Society*, vol. 8, No. 3, 2006, 415–434 ;
- [5] G. BUTTAZZO, F. SANTAMBROGIO AND N. VARCHON : Asymptotics of an optimal compliance-location problem, *ESAIM Contr. Opt. Calc. Var.*, Vol. 12, No. 4, 2006, 752–769 ;
- [6] F. SANTAMBROGIO, Transport and concentration problems with interaction effects. *J. Global Optim.* 38 (2007), no. 1, 129–141.
- [7] J.-M. MOREL AND F. SANTAMBROGIO, Comparison of distances between measures, *Appl. Math. Lett.*, (20), no. 4, 2007, 427–432.
- [8] L. AMBROSIO AND F. SANTAMBROGIO, Necessary optimality conditions for geodesics in weighted Wasserstein spaces. *Rend. Lincei Mat. Appl.*, (18), no. 1, 23–37, 2007.
- [9] F. SANTAMBROGIO, Optimal Channel Networks, landscape Function and Branched Transport, *Interfaces and Free Boundaries*, 9 (2007), 149–169.
- [10] G. BUTTAZZO AND F. SANTAMBROGIO, Asymptotical compliance optimization for connected networks, *Networks and Heterogeneous Media*, vol. 2, no. 4, 2007, 761–777 ;
- [11] G. CARLIER, C. JIMENEZ AND F. SANTAMBROGIO, Optimal transportation with traffic congestion and Wardrop equilibria, *SIAM J. Control Optim.* (47), 2008, 1330-1350.
- [12] A. BRANCOLINI, G. BUTTAZZO, F. SANTAMBROGIO AND E. STEPANOV Long-term planning versus short-term planning in the asymptotical location problem, *ESAIM COCV* 15 (2009), 509–524
- [13] F. BENMANSOUR, G. CARLIER, G. PEYRÉ AND F. SANTAMBROGIO, Numerical Approximation of Continuous Traffic Congestion Equilibria, *Net. Het. Media*, 4 (3), 2009, 605–623.

- [14] G. BUTTAZZO AND F. SANTAMBROGIO, A Mass Transportation Model for the Optimal Planning of an Urban Region. *SIAM Rev.* (51), no. 3, 2009, 593–610, 2009
- [15] M. BERNOT, A. FIGALLI AND F. SANTAMBROGIO, Generalized solutions for the Euler equations in one and two dimensions, *J. Math. Pures and Appl.* 91, no. 2, 2009, 137–155
- [16] J-M. MOREL AND F. SANTAMBROGIO, The regularity of optimal irrigation patterns, *Arch. Rati. Mech. An.* 195, No 2 (2010), 499–531.
- [17] F. SANTAMBROGIO, Absolute continuity and summability of transport densities : simpler proofs and new estimates, *Calc. Var. Par. Diff. Eq.* 36, no. 3, 2009, 343-354.
- [18] L. BRASCO, G. CARLIER AND F. SANTAMBROGIO, Congested traffic dynamics, weak flows and very degenerate elliptic equations, *J. Math. Pures and Appl.*, 93, No 6, 2010, 652–671.
- [19] F. BALABDAOUI, K. RUFIBACH AND F. SANTAMBROGIO, Least Squares estimation of two ordered monotone regression curves, *J. of Nonparametric Statistics* vol 22, no 8, 2010, 1019–1037
- [20] B. MAURY, A. ROUDNEFF-CHUPIN AND F. SANTAMBROGIO A macroscopic crowd motion model of gradient flow type, *Math. Models and Methods in Appl. Sciences* Vol. 20, No. 10 (2010), 1787–1821
- [21] G. CARLIER, A. GALICHON AND F. SANTAMBROGIO, From Knothe’s transport to Brenier’s map and a continuation method for optimal transport, *SIAM J. Math. An.* vol 41, no 6, 2554–2576, 2010.
- [22] G. CARLIER, L. DE PASCALE AND F. SANTAMBROGIO, A strategy for non-strictly convex transport costs and the example of $\|x - y\|^p$ in \mathbb{R}^2 , *Comm. Math. Sci.*, vol 8, no 4, 931–941, 2010.
- [23] F. BENMANSOUR, G. CARLIER, G. PEYRÉ AND F. SANTAMBROGIO, Fast Marching Derivatives with Respect to Metrics and Applications, *Numerische Mathematik*, 116, no 3, 357–381, 2010
- [24] F. SANTAMBROGIO AND V. VESPRI, Continuity for a very degenerate elliptic equation in two dimensions, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 73 (2010), 3832–3841.
- [25] L. BRASCO AND F. SANTAMBROGIO, An equivalent path functional formulation of branched transportation problems, *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*, 29 , No 3 (2011), 845–871.
- [26] E. OUDET AND F. SANTAMBROGIO, A Modica-Mortola approximation for branched transport and applications, *Arch. Rati. Mech. An.*, 201, No 1 (2011), 115–142.
- [27] L. BRASCO, G. BUTTAZZO AND F. SANTAMBROGIO, A Benamou-Brenier approach to branched transportation, *SIAM J. Math. An.*, Vol. 43, Nr. 2 (2011) , p. 1023–1040.
- [28] G. BUTTAZZO, F. SANTAMBROGIO AND E. STEPANOV, Asymptotic optimal location of facilities in a competition between population and industries, *Ann. Sc. Norm. Sup. Sci.*, 12 (1), 239–273, 2013

- [29] B. MAURY, A. ROUDNEFF-CHUPIN, F. SANTAMBROGIO AND J. VENEL, Hetling congestion in crowd motion modeling *Net. Het. Media* Vol 6, no 3, 2011, p 485–519
- [30] A. LACHAPELLE AND F. SANTAMBROGIO, On the strategic use of risk and undesirable goods in multidimensional screening, *J. Math. Economics*, 47 (2011), pp. 698–705.
- [31] J. LOUET AND F. SANTAMBROGIO, A sharp inequality for transport maps in $W^{1,p}(\mathbb{R})$ via approximation, *Appl. Math. Lett.* Volume 25, Issue 3, 2012, 648–653
- [32] C. JIMENEZ AND F. SANTAMBROGIO, Optimal transportation in the quadratic case with a convex constraint, *J. Math. Pures Appl.*, Volume 98, no 1, 2012, 103–113
- [33] D. LESEVRE, P. PEGON, F. SANTAMBROGIO Optimal transportation with an oscillation-type cost : *Set-Valued and Variational Analysis*, Vol. 21, Issue 3, pp 541–556, 2013.
- [34] B. MAURY, A. ROUDNEFF-CHUPIN, F. SANTAMBROGIO Congestion-driven dendritic growth, *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*, Vol. 34, no 4, 2014, 1575–1604.
- [35] Q. R. LI, F. SANTAMBROGIO, X. J. WANG Regularity in Monge’s mass transfer problem, *J. Math. Pures Appl.*, 102 (6), 1015–1040, 2014.
- [36] A. CHEN, J. DARBON, G. BUTTAZZO, F. SANTAMBROGIO, J.-M. MOREL The equations of landscape formation, *Int. Free Bound.*, Vol 16, Issue 1, 2014, pp. 105–136.
- [37] A. BLANCHET, P. MOSSAY, F. SANTAMBROGIO Existence and uniqueness of equilibrium for a spatial model of social interactions, accepted by *Int. Econ. Rev.*
- [38] P. PEGON, D. PIAZZOLI, F. SANTAMBROGIO, Full characterization of optimal transport plans for concave costs, *Disc. Cont. Dyn. Syst. A* 35(12), 6113–6132, 2015.
- [39] M. BONNIVARD, A. LEMENANT, F. SANTAMBROGIO, Approximation of length minimization problems among compact connected sets, *SIAM J. Math. An.*, 47(2), 1489–1529, 2015.
- [40] G. DE PHILIPPIS, A. R. MÉSZÁROS, F. SANTAMBROGIO AND B. VELICHKOV, BV estimates in optimal transportation and applications, accepted in *Arch. Rati. Mech. An.*
- [41] L. DE PASCALE, J. LOUET AND F. SANTAMBROGIO The Monge problem with vanishing gradient penalization : vortices and asymptotical profile, accepté par *J. Math. Pures and Appl.*

Monographies et thèses

- [42] F. SANTAMBROGIO, *Variational problems in transport theory with mass concentration*, PhD Thesis, publiée par Edizioni della Normale, Birkhäuser, 2007

- [43] F. SANTAMBROGIO, *Problèmes classiques and moins classiques en transport optimal : régularité, approximation, EDP and applications* (Habilitation à Diriger des Recherches of Université Paris-Dauphine), 2009.
- [44] F. SANTAMBROGIO *Optimal Transport for Applied Mathematicians*, book, Birkhäuser, dans *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* 87, Birkhäuser Basel (2015)

Notes aux CRAS

- [45] F.-X. VIALARD AND F. SANTAMBROGIO, Extension to BV functions of the large deformation diffeomorphisms matching approach, *C. R. Acad. Sci* vol 347, no. 1-2, 2009, 27–32 ;
- [46] F. SANTAMBROGIO, A Modica-Mortola approximation for branched transport, *C. R. Acad. Sci.* vol. 348, no. 15-16, pp. 941–945, 2010.
- [47] A. LEMENANT, F. SANTAMBROGIO A Modica-Mortola approximation for the Steiner Problem, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 352 (2014), no. 5, 451-454

Lecture notes, surveys and proceedings

- [48] F. SANTAMBROGIO, Introduction to Optimal Transport Theory, lecture notes for the Summer School *Optimal transportation : Theory and applications*, Grenoble, 2009, published in the proceeding of the same Summer School, in a special volume by Cambridge University Press.
- [49] F. SANTAMBROGIO, Models and applications of Optimal Transport Theory, lecture notes for the Summer School *Optimal transportation : Theory and applications*, Grenoble, 2009, Cambridge University Press.
- [50] F. SANTAMBROGIO, Gradient flows in Wasserstein spaces and applications to crowd movement, *Séminaire Laurent Schwartz, EDP and applications*, École Polytechnique, 2010, exposé no 27.
- [51] G. CARLIER, F. SANTAMBROGIO, A continuous theory of traffic congestion and Wardrop equilibria, proceedings of *Optimization and stochastic methods for spatially distributed information*, St Petersburg, 2010.
- [52] F. SANTAMBROGIO, Inégalités Isopérimétriques quantitatives via le transport optimal, d’après A. Figalli, F. Maggi and A. Pratelli, proceedings of the *Bourbaki Seminar*, Janvier 2011 (in French).
- [53] F. SANTAMBROGIO, A Modest Proposal for MFG with Density Constraints, proceedings of the conference *Mean Field Games and related Topics, Roma 1* (2011), published in *Net. Het. Media*, 7(2), 2012, 337-347.
- [54] F. SANTAMBROGIO, Flots de gradient dans les espaces métriques and leurs applications (d’après Ambrosio-Gigli-Savaré), proceedings of the *Bourbaki Seminar*, Janvier 2013 (in French).
- [55] F. SANTAMBROGIO, A Dacorogna-Moser approach to flow decomposition and minimal flow problems, *ESAIM : Proc. and Surveys.*, Vol. 45, p. 265-274, 2014.

Preprints

- [56] A. R. MÉSZÁROS AND F. SANTAMBROGIO Advection-diffusion equations with density constraints, en revision pour *Analysis and PDEs*
- [57] S. DI MARINO, B. MAURY AND F. SANTAMBROGIO Measure sweeping processes
- [58] F. SANTAMBROGIO Dealing with moment measures with entropy and optimal transport
- [59] P. CARDALIAGUET, A. R. MÉSZÁROS AND F. SANTAMBROGIO First order Mean Field Games with density constraints : pressure equals price.
- [60] F. SANTAMBROGIO, X. J. WANG Convexity of the support of the displacement interpolation : counterexamples.