

CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES N°1 (MATH2)
du Lundi 11 Octobre 2010 - Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.

Ce devoir comporte 4 pages et est constitué de 5 parties indépendantes.
Le barême donné est indicatif. Chaque réponse devra bien sûr être justifiée.

Exercice 1 (3 pts)

Soit \mathcal{P} l'assertion suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \geq 3) \Rightarrow (\ln(x^2 + 4x + 6) \geq 3 \ln 3)$$

1. L'assertion \mathcal{P} est-elle vraie ?
2. Ecrire la négation de \mathcal{P} . Est-elle vraie ?
3. Ecrire la contraposée de \mathcal{P} . Est-elle vraie ?
4. Ecrire la réciproque de \mathcal{P} . Est-elle vraie ?

Exercice 2 (3 pts)

Soit n un entier naturel.

1. Déterminer la parité de $n^3 + 5n$.
2. Montrer que 3 divise $n^3 + 5n$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3 (4 pts)

Soit E l'ensemble des espèces animales. On pose :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in E \mid x \text{ vit en Afrique}\} \\ B &= \{x \in E \mid x \text{ a des écailles}\} \\ C &= \{x \in E \mid x \text{ peut voler}\} \\ D &= \{x \in E \mid x \text{ est une espèce protégée}\} \\ F &= \{(x, y) \in E \times E \mid x \text{ se nourrit de } y\}. \end{aligned}$$

1. Traduire sous forme mathématique : « Une espèce qui peut voler et qui vit en Afrique n'est pas une espèce protégée. »

2. Traduire sous forme de phrase : $B \cap C = \emptyset$.
3. Traduire sous forme de phrase : $(\exists x \in A)(\forall y \in C)((x, y) \in F)$.
Ecrire la négation de cette assertion et la traduire également sous forme de phrase.
4. Soit G l'ensemble des espèces qui sont protégées et qui vivent en Afrique, mais qui ne peuvent pas voler ou n'ont pas d'écaïlle.
Ecrire G sous forme mathématique en faisant intervenir le symbole \setminus .

Exercice 4 (4 pts)

Soient f_1, f_2 , et f_3 les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 : [0, 4] &\rightarrow [0, 4] \\ &x \mapsto |x - 2| \\ f_2 : [0, 2] &\rightarrow [-1, 3] \\ &x \mapsto x^2 - 1 \\ f_3 : [0, 4] &\rightarrow \mathbb{R} \\ &x \mapsto \ln(x + 1) \end{aligned}$$

1. Tracer f_1, f_2 et f_3 .
2. Pour chacune de ces fonctions, dire si elle est injective, surjective, bijective.
3. Déterminer graphiquement $f_2([1, 2])$, $f_1([0, 2])$, $f_1^{-1}([1, 2])$, et $f_3^{-1}([1, +\infty[)$.
4. Déterminer le sens de variation de $f_3 \circ f_1$.

Exercice 5 (6 pts)

Un ensemble d'étudiants de l'université d'Orsay, que nous noterons E , a décidé cette année de continuer à pratiquer leur sport favori en s'inscrivant dans des clubs des communes environnantes.

On note $\text{Sportco} = \{\text{Foot, Volley, Hand, Basket, Rugby, Hockey}\}$, $\text{Sportindiv} = \{\text{Tennis, Badminton, Squash, Tennis de table, Judo, Karaté, Taekwondo, Athlétisme, Natation, Cyclisme, Escalade}\}$, et $\text{Sport} = \text{Sportco} \cup \text{Sportindiv}$ l'ensemble des sports disponibles. On note également $H = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ l'ensemble des volumes horaires hebdomadaires possibles pour chaque sport, et Club l'ensemble des clubs de sports concernés. Le tableau suivant donne pour chaque sport le club et le volume horaire hebdomadaire associés.

| Sport | Club | Volume horaire |
|-----------------|--------------------------|----------------|
| Foot | FC Orsay-Bures | 4 |
| Volley | ESM Volley Massy | 3 |
| Hand | US Palaiseau Handball | 4 |
| Basket | BC du Plessis | 5 |
| Rugby | CA Orsay Rugby Club | 6 |
| Hockey | Paris Hockey Club | 3 |
| Tennis | TC Orsay | 8 |
| Badminton | SM Montrouge | 6 |
| Squash | SC Verrières | 6 |
| Tennis de table | AS Villebon | 2 |
| Judo | Judo club Choisy le Roi | 2 |
| Karaté | Karaté Club Saclay | 3 |
| Taekwondo | AS Taekwondo Marcoussis | 3 |
| Athlétisme | Orsay Athletic club | 8 |
| Cyclisme | Vélo club Massy | 10 |
| Natation | Club nautique Longjumeau | 12 |
| Escalade | CAF Ile de France | 4 |

Soient $c : \text{Sport} \rightarrow \text{Club}$ l'application qui associe à chaque sport le club concerné, et $h : \text{Club} \rightarrow H$ celle qui associe à chaque club le volume horaire hebdomadaire pratiqué.

1. L'application c est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. L'application h est-elle injective ? surjective ? bijective ? Donner $h^{-1}(\{2, 12\})$.

Le sport qu'a finalement choisi chacun des étudiants est donné par le tableau ci-dessous.

| Étudiant | Sport |
|----------|-----------|
| Élodie | Tennis |
| Florian | Foot |
| Frédéric | Rugby |
| Lise | Badminton |
| Xavier | Judo |
| Rémy | Hand |
| Clément | Volley |
| Loïc | Cyclisme |
| Yohann | Escalade |

3. Soit $s : E \rightarrow \text{Sport}$ l'application qui à chaque étudiant associe le sport qu'il ou elle a choisi. s est-elle injective ? surjective ? bijective ? Donner $s^{-1}(\text{Sportco})$.

4. Si E comportait 40 étudiants, s pourrait-elle être injective ? Serait-elle forcément surjective ?
5. Soit $f : E \rightarrow H$ l'application qui à chaque étudiant associe le volume horaire hebdomadaire durant lequel il pratique le sport auquel il s'est inscrit. Déterminer $f^{-1}(\{2, 4, 6\})$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
6. Ecrire f à l'aide des fonctions c, h et s .