Devoir Maison d'Optimisation Numérique

essayez de le faire en deux heures max

Exercice 1 (6 points)**.** Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble donné par

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x^2 - 1)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

1. Dessiner l'ensemble C.
2. S'agit-il d'un ensemble compact ?
3. S'agit-il d'un ensemble convexe ?
4. Considérer la fonction f donnée par $f(x, y) = xy$. Admet-elle un minimum et un maximum sur C ?
5. Calculer $\inf\{f(x, y) \,:\, (x, y) \in C\}$ et $\sup\{f(x, y) \,:\, (x, y) \in C\}$.

Exercice 2 (5 points)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x_1, x_2, x_3) = |x_1| + |x_2|^2 + |x_3|^3$. S'agiti-il d'une fonction convexe ? strictement convexe ? écrire son sous-différentiel $\partial f(x)$ en tout point $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Exercice 3 (4 points)**.** Suggérer et décrire une méthode numérique itérative efficace pour résoudre le problème de projection

$$\min \quad ||x - a|| \,:\, x \in E$$

où $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ est fixé et

$$E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i \leq x_{i+1} \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, n - 1\}.$$

Pour que la réponse soit satisfaisante, il faut expliquer à chaque étape les calculs qu'on doit faire et comment les faire. Il pourrait éventuellement être utile de reformuler le problème de manière équivalente (changer variables, minimiser une fonction différente mais avec les mêmes minimiseurs...).

Exercice 4 (5 points)**.** Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fermé. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit $d(x, K) = \inf\{|x - y| \,:\, y \in K\}$.

1. Peut-on dire que la borne inférieure dans la définition de $d(x, K)$ est atteinte ? pourquoi ?
2. Donner un exemple d'ensemble K et de point x telle que cette borne est atteinte mais en plusieurs points $y \in K$ (un dessin pourrait suffire).
3. La fonction $x \mapsto d(x, K)$ est-elle continue ?
4. Donner un exemple où la fonction $x \mapsto d(x, K)$ n'est pas convexe.
5. Peut-on dire qu'elle convexe, si on rajoute l'hypothèse que K soit convexe ?

Exercice 5 (5 points)**.** Considérer la fonctionnelle F suivante

$$F(u) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u'(t)^2 + 64 |u(t)|^{7/4} \right) dt$$

et le problème de minimisation

$$\min \left\{ F(u) \,:\, u \in C^1([0, 1]),\ u(1) = 16 \right\}.$$

1. Écrire l'équation d'Euler-Lagrange correspondante à ce problème de minimisation, avec les conditions au bord opportunes.
2. Trouver une solution $\bar{u}$ de cette équation, en la cherchant de la forme $\bar{u}(t) = At^\alpha$.
3. Justifier que $\bar{u}$ est solution du problème de minimisation, qu'elle est la seule solution du problème de minimisation et aussi la seule solution de l'équation avec ses conditions au bord.