Devoir Maison d'Optimisation Numérique

essayez de le faire en deux heures max
à rendre au plus tard au cours de vendredi 15 mars

Exercice 1 (6 points)**.** Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble donné par

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : (x^2 - 1)^2 + |y| \leq 4\}.$$

1. Dessiner l'ensemble C.
2. S'agit-il d'un ensemble compact ?
3. S'agit-il d'un ensemble convexe ?
4. Considérer la fonction f donnée par $f(x, y) = x^2 + y$. Admet-elle un minimum et un maximum sur C ?
5. Calculer $\inf\{f(x, y) \, : \, (x, y) \in C\}$ et $\sup\{f(x, y) \, : \, (x, y) \in C\}$.

Exercice 2 (5 points)**.**

1. Prouver que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante, alors $g \circ f$ est convexe.
2. Prouver que la fonction $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x, y, z) := \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

   est convexe.
3. Déterminer le sous-différentiel ∂h en tout point de $\mathbb{R}^3$. En quels points h est-elle différentiable ?
4. Déterminer également le sous-différentiel de la fonction $\tilde{h}$ définie par $\tilde{h}(x, y, z) := h(x, y, z) + |x|$.

Corrigé Questions 3 et 4

Par souci de clarté, on appellera x_1, x_2, x_3 les trois cordonnées de $\mathbb{R}^3$ et x indiquera un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

En tout point x où la fonction h est différentiable on a $\partial h(x) = \{\nabla h(x)\}$. Ceci s'applique en particulier pour $x \neq 0$, où l'on a, grâce à $h(x) = g(||x||)$:

$$\nabla h(x) = g'(||x||) \frac{x}{||x||} = x + \frac{x}{||x||} - \cos(||x||) \frac{x}{||x||}$$

(rappelons que l'on prend $f(x) = ||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et $g(t) = t^2/2 + t - \sin t$). Il reste à voir le point $x = 0$. En ce point on aura $\partial h(0) = \{0\}$. Pour le dire, on peut soit démontrer d'abord que h est difféentiable en 0 avec gradient nul (et alors $\partial h(0) = \{\nabla h(0)\} = \{0\}$), soit analyser exactement le sous-différentiel. Pour changer par rapport à ce que l'on a vu en classe, démontrons $\nabla h(0) = 0$. Remarquons que, grâce à un DL_3, on a $t - \sin t = O(t^3)$. On a donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(||x||) - g(0) - 0 \cdot (x - 0)}{||x||} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2/2 + O(t^3)}{t} = 0,$$

ce qui démontre que 0 est le gradient de h en 0.

Pour analyser $\tilde{h}$, on remarque d'abord que cette fonction est différentiable en tout point où $x_1 \neq 0$, puisque h y est différentiable et $|x_1|$ aussi. Comme on a $\nabla |x_1| = (\pm 1, 0, 0)$, on a donc

$$\partial \tilde{h}(x) = \left\{ g'(||x||) \frac{x}{||x||} + (\pm 1, 0, 0) \right\},$$

où l'on prend le signe + si $x_1 > 0$ et − si $x_1 < 0$.

Il reste à regarder les points où $x_1 = 0$. En ces points, l'idée est qu'on obtient le sous-différentiel en prenant le gradient de h et en rajoutant les éléments du sous-différentiel de $|x_1|$, qui est une fonction différentiable par rapport à x_2 et x_3. Du coup, seule la composante p_1 changera. Comme les dérivées droite et gauche de $|x_1|$ sont ± 1, on rajoutera des valeurs dans $[-1,1]$. On cherche à le démontrer. Considérons

$$\partial\tilde{h}(x) = \{p \in \mathbb{R}^3 \,:\, h(x+y) + |y_1| \geq h(x) + p \cdot y\}.$$

Si on prend $p \in \partial\tilde{h}(x)$ on a donc

$$h(x+y)| - h(x) - \nabla h(x) \cdot y \geq (p - \nabla h(x)) \cdot y - |y_1|.$$

On peut prendre $y = \varepsilon v$ avec $||v|| = 1$, diviser par $||y|| = \varepsilon$ et envoyer $\varepsilon = ||y|| \to 0$, et on sait que le membre de gauche va vers 0 par définition de ∇h. On a donc

$$0 \geq (p - \nabla h(x)) \cdot v - |v_1|.$$

En prenant $v_1 = v_3 = 0$ et $v_2 = 1$ on a

$$0 \geq (p_2 - \frac{\partial h}{\partial x_2}(x))$$

et avec $v_2 = -1$ on obtient l'inégalité opposée. On a donc $p_2 = \frac{\partial h}{\partial x_2}(x)$. En prenant $v_1 = v_2 = 0$ et $v_3 = \pm 1$ on obtient de même $p_3 = \frac{\partial h}{\partial x_3}(x)$.

En prenant $v_2 = v_3 = 0$ et $v_1 = \pm 1$ on obtient

$$\left| p_1 - \frac{\partial h}{\partial x_1}(x) \right| \leq 1.$$

Ceci signifie $p = \nabla h(x) + te_1$, où $e_1 = (1,0,0)$ et $|t| \leq 1$.

Au contraire, on peut vérifier que tout vecteur du type $p = \nabla h(x) + te_1$ appartiennent à $\partial\tilde{h}(x)$ lorsque $x_1 = 0$, parce que

$$h(x+y) + |y_1| \geq h(x) + \nabla h(x) \cdot y + te_1 \cdot y,$$

parce que l'inégalité $h(x+y) \geq h(x) + \nabla h(x) \cdot y$ vient de la convexité de h et $e_1 \cdot y = y_1$ et $|y_1| \geq ty_1$ pour tout t tel que $|t| \leq 1$.

Exercice 3 (7 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) := x^2 - 2x + |x-1|^3 + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y.$$

1. Prouver que f est une fonction convexe. Écrire sa matrice Hessienne. Dire si f est elliptique.
2. Dire si ∇f est Lipschitzien sur $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\}$ et donner une estimation (même grossière) de sa constante de Lipschitz M.
3. Déterminer $\min\{f(x,y) \,:\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
4. Prouver que $\min\{f(x,y) \,:\, (x,y) \in B_1\}$ existe, où $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
5. Suggérer un algorithme pour approcher la solution du problème de minimisation de f sur B_1, en donner sa description explicite (des formules explicites pour x_{k+1} et y_{k+1} et, s'il y a des paramètres à choisir, en donner une valeur admissible) et justifier de sa convergence en s'appuyant sur les résultats vus en cours.

Exercice 4 (5 points)**.** Considérer la fonctionnelle F suivante

$$F(u) := \int_0^1 (u'(t) - u(t))^2 \, dt.$$

1. Démonter que $\min\{F(u) \,:\, u \in C^2([0,1])\} = 0$. A-t-on unicité du minimiseur ?
2. Démonter que, pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a encore $\min\{F(u) \,:\, u \in C^2([0,1]), u(0) = A\} = 0$. Trouver le minimiseur et en justifier l'unicité.

3. Étant donnés $A, B \in \mathbb{R}$, résoudre le problème $\min\{F(u) : u \in C^2([0,1]), u(0) = A, u(1) = B\}$: écrire l'équation d'Euler-Lagrange correspondante (attention : l'étude de l'équation d'Euler-Lagrange n'était pas nécessaire pour répondre aux questions précédentes), la résoudre avec les conditions aux bords opportunes, justifier que la solution trouvée est en fait un minimiseur, et calculer enfin la valeur du minimum.

Corrigé

Toute fonction du type $u(t) = Ce^t$ réalise $F(u) = 0$. D'autre part, F est positive, donc le minimum est 0. Il n'y a pas un unique minimiseur, parce qu'il est réalisé justement par toute fonction $u(t) = Ce^t$. C'est les seules fonctions qui réalisent $F(u) = 0$, car annuler l'intégrale implique $u' = u$.

Si l'on fixe $u(0) = A$, la situation ne change pas sauf qu'on doit choisir forcément $C = A$, et il y a donc unicité.

Quand on fixe $u(0) = A$ et $u(1) = B$ on ne ne peut plus faire pareil. Il faut donc écrire l'équation d'Euler-Lagrange et la résoudre. Ensuite, comme $L(t, x, v) = (v - x)^2$ est convexe en (x, v), on sait que toute solution de l'équation d'Euler-Lagrange avec les bonnes conditions au bord sera un minimiseur.

De $L(t, x, v) = (x - v)^2$ on tire $\frac{\partial L}{\partial x}(t, x, v) = 2(x - v)$ ainsi que $\frac{\partial L}{\partial v}(t, x, v) = 2(v - x)$. L'équation est donc

$$(2(u'(t) - u(t))' = 2(u(t) - u'(t)),$$

qu'on peut développer et obtenir

$$u''(t) = u(t).$$

Les solutions de cette équation sont données par $u(t) = Ce^t + De^{-t}$. Pour imposer les conditions au bord, la seule possibilité est imposer

$$\begin{cases} C + D = A, \\ Ce + De^{-1} = B. \end{cases}$$

Ce système a pour solution

$$C = \frac{Be - A}{e^2 - 1}, \quad D = \frac{Ae^2 - Be}{e^2 - 1}.$$

Le minimiseur est donc unique et il s'agit de

$$\frac{Be - A}{e^2 - 1}e^t + \frac{Ae^2 - Be}{e^2 - 1}e^{-t}.$$

La valeur du minimum peut être calculée comme suit :

$$u'(t) - u(t) = -2De^{-t} \Rightarrow |u'(t) - u(t)|^2 = 4\frac{|Ae^2 - Be|^2}{|e^2 - 1|^2}e^{-2t} \Rightarrow F(u) = 4\frac{|Ae^2 - Be|^2}{|e^2 - 1|^2}\int_0^1 e^{-2t}dt = 2\frac{|Ae - B|^2}{e^2 - 1},$$

ce qui montre d'ailleurs que ça donne 0 si jamais $B = Ae$ (et donc on peut choisir $u(t) = Ae^t$).