Optimisation et simulation numérique – Devoir Maison 1

à déposer dans le casier de F. Santambrogio avant le 23 octobre ; résoudre en détail 3 exercices, pas plus.

Exercice 1. 1. Prouver que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante, alors $g \circ f$ est convexe.

2. Prouver que la fonction $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x, y, z) := \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

est convexe. Est-elle strictement convexe ?

3. Déterminer le sous-différentiel ∂h en tout point de $\mathbb{R}^3$. En quels points h est-elle différentiable ?
4. Déterminer également le sous-différentiel de la fonction $\tilde{h}$ définie par $\tilde{h}(x, y, z) := h(x, y, z) + |x|$.

Exercice 2. Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y) := x^2 - 2x + |x - 1|^3 + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + y.$$

1. Prouver que f est une fonction convexe. Écrire sa matrice Hessienne. Dire si f est elliptique.
2. Dire si ∇f est Lipschitzien sur $B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 4\}$ et donner une estimation (même grossière) de sa constante de Lipschitz M.
3. Déterminer $\min\{f(x, y) \,:\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
4. Prouver que $\min\{f(x, y) \,:\, (x, y) \in B_1\}$ existe, où $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1\}$.
5. Suggérer un algorithme pour approcher la solution du problème de minimisation de f sur B_1, en donner sa description explicite (des formules explicites pour x_{k+1} et y_{k+1} et, s'il y a des paramètres à choisir, en donner une valeur admissible) et justifier de sa convergence en s'appuyant sur les résultats vus en cours.

Exercice 3. Considérons l'ensemble $K = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, |x_1|^3 + \dots + |x_n|^3 \le 1\}$ et $p = (p_1, \dots, p_n) \notin K$ un point à l'extérieur de K. Décrire de manière détaillée et explicite au moins une méthode numérique pour calculer la projection de p sur K et justifier sa convergence.

Cette projection pourrait se configurer comme un problème d'optimisation d'une fonction convexe (la distance à p, ou le carré de cette distance) sous contrainte convexe (K étant convexe). Pourquoi ne serait-il pas raisonnable *du tout* de considérer un algorithme de gradient projeté pour répondre à la question précédente ?

Exercice 4. Trouver la formulation duale de ce problème d'optimisation linéaire, et démontrer que tant le problème primal que le problème dual admettent une solution : étant donné $f \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$\max\left\{\sum_{i=0}^{N} f_i x_i \;:\; x \in \mathbb{R}^{N+1},\ |x_i| \le 1 \text{ pour tout } i = 0, \dots, N,\ |x_i - x_{i-1}| \le 1 \text{ pour tout } i = 1, \dots, N\right\}.$$

Exercice 5. Trouver un exemple de fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée inférieurement telle que l'algorithme du gradient à pas constant donne une estimation exactement d'ordre $1/k$, i.e. $f(x_k) - \inf f = O(1/k)$, quelque soit le pas choisi. Le minimum est-il atteint ?

Exercice 6. Donner un algorithme de type ISTA pour résoudre

$$\min\left\{||x - x_0||_2^2 + \lambda ||x||_p^p \;:\; x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

en décrivant en détail les étapes ($x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ et $p \ge 1$ sont fixés). Pour quelles valeurs de p vaut-il mieux utiliser un tel algorithme au lieu d'un algorithme de gradient à pas fixe ? discuter aussi les liens entre ce problème et celui de l'exercice 3.