Université Paris-Sud
M1 Ingénierie Mathématique
29 mars 2012

Examen d'Optimisation Numérique

–

durée : 2h, documents non autorisés

Exercice 1 (5 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = xy^2$ et l'ensemble $B = \overline{B(0,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. B est-il convexe ? f est-elle convexe ?
2. Démontrer que f admet un maximum et un minimum sur B.
3. Calculer les valeurs du minimum et du maximum, ainsi que les points où elles sont réalisées.

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer les ensembles

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x+y| \leq 1\} \quad \text{et} \quad B = \overline{B(0,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

1. Dessiner A, B et $A \cap B$. A et B sont-ils convexes ?
2. Démontrer que l'intersection de deux ensembles convexes est toujours convexe.
3. Écrire une formule pour la projection sur $A \cap B$, du type $P_{A\cap B}(x,y) = \dots$, en distinguant éventuellement des cas (il suffit de la justifier avec un dessin).
4. Lesquelles des relations suivantes sont-elles vraies ?

$$P_{A\cap B} = P_A \circ P_B, \quad P_A \circ P_B = P_B \circ P_A, \quad P_{A\cap B} = P_{A\cap B} \circ P_B.$$

Exercice 3 (6 points)**.** Résoudre le problème

$$\min\{J(f) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}f'(t)^2 + tf(t) + \frac{1}{2}f(t)^2\right] dt\,;\ f \in \mathcal{A}\}, \quad \text{où} \quad \mathcal{A} := \{f \in C^1([0,1]) \,:\, f(0) = 0\}.$$

Indiquer la valeur minimale de J sur $\mathcal{A}$ ainsi que la ou les fonctions f la réalisant, en prouvant qu'il s'agit bien d'un minimiseur (si besoin, considérer $y(t) = x(t) + t$ pour résoudre l'équation d'Euler-Lagrange).

Exercice 4 (5 points)**.** Considérer le problème

$$\min\{J(f) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2}f'(t)^2 + tf(t) + \frac{1}{2}tf(t)^2\right] dt\,;\ f \in \mathcal{A}\}, \quad \text{où} \quad \mathcal{A} := \{f \in C^1([0,1]) \,:\, f(0) = 0\},$$

qui est en fait un peu plus difficile à résoudre explicitement que le précédent. Suggérer une discrétisation et une méthode numérique pour le résoudre de manière approchée. Écrire précisément la fonction qu'on veut minimiser dans la discrétisation (avec les matrices et/ou les vecteurs qui apparaissent dans cette fonction) et expliquer la méthode que vous choisissez d'utiliser.

Exercice 5 (4 points)**.** Un jeu a lieu sur la droite réelle $\mathbb{R}$ de la manière suivante : un pion se trouve initialement en $x_0 = 0$; le joueur doit ensuite le bouger trois fois : la première vers la droite ($x_1 \geq x_0$), la deuxième vers la gauche ($x_2 \leq x_1$) et la troisième où il veut, jusqu'à sa position finale x_3. Le score final, que le joueur veut maximiser, est donné par $\frac{1}{2}x_3^2$ auquel il faut soustraire le coût pour chaque déplacement, qui vaut $|x-y|^2$ à chaque fois que le pion est déplacé d'une position x à une position y.

Traduire le problème de maximisation associé à ce jeu par voie d'un problème de programmation dynamique en temps discret et horizon fini, et le résoudre, en trouvant les fonctions valeurs $v(t,x)$ pour $t = 0, 1, 2, 3$ et les évolutions optimales. Y a-t-il unicité de l'optimum ?