Université Paris-Sud
M1 Ingénierie Mathématique
25 mars 2014

Optimisation Numérique
–
Examen de 1ère Session
–

durée : 2h
seuls les documents papier (cours, notes personnelles...) sont autorisés

Exercice 1 (5 points)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = xy + yz + zx$. Trouver la valeur maximale et la valeur minimale de f sur $B_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, après avoir démontré qu'elles existent.

Exercice 2 (5 points)**.** Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ le polyhèdre convexe donné par

$$K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \; : \; x_1 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 2\}.$$

Trouver les sommets de K et écrire une formule (en distinguant éventuellement plusieurs cas) pour la projection P_K sur K.

Exercice 3 (5 points)**.** Résoudre complètement le problème de programmation dynamique suivant :

$$\max \quad \left\{ -\frac{1}{2}x_4^2 + \sin(x_3)x_4 + \frac{1}{2}\cos^2(x_3) + \frac{x_3}{\sqrt{1 + x_2}} - \frac{1}{2}x_1x_2 + x_0x_1 \; : \; x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t) \text{ pour } t = 0, 1, 2, 3 \right\},$$

où

- $x_0 > 0$ est fixé ;
- les ensembles $\Gamma_t \subset \mathbb{R}$ sont définis par

$$\Gamma_0(x_0) = \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 2x_0}}, 1 + 2x_0\right], \; \Gamma_1(x_1) = \left[0, \frac{1}{x_1^2}\right], \; \Gamma_2(x_2) = [0, 1 + x_2], \; \Gamma_3(x_3) = [-1, x_3].$$

Exercice 4 (5 points)**.** Considérer le problème de minimisation

$$\min \left\{ \int_0^1 \left(u'(t)^2 + 2e^t u(t)\right) dt + 4u(1)^2 \quad : \quad u \in C^1([0, 1]), \; u(0) = 1 \right\}.$$

Écrire l'équation d'Euler-Lagrange, trouver ses conditions au bord, et la résoudre. Ne pas oublier de justifier pourquoi la solution de l'équation est bien un minimiseur.

Exercice 5 (5 points)**.** Pour $n \in \mathbb{N}*$ et $h = 1/n$, considérer le problème de minimisation

$$\min \quad \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2h} + ih^2 x_{i+1} \; : \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

où l'on considère $x_0 = 0$.

1. Prouver que la solution de ce problème d'optimisation existe et est unique.
2. Suggérer un ou plusieurs algorithmes qui la trouvent ou l'approche, en justifiant la convergence.
3. Écrire le problème de calcul des variations continu (où l'on cherche une courbe $x(t)$, $t \in [0, 1]$) qui correspond à ce problème pour $n \to \infty$ et $h \to 0$ et écrire l'équation d'Euler Lagrange qui caractérise la solution, avec ses conditions au bord.