M2 MFA - EDPCS & AAG

—

Equations Elliptiques et Calcul des Variations

—

Examen blanc, janvier 2015

Essayez de le faire en 3h max. Tout document sera autorisé lors de l'examen

Exercice 1 (5 points)**.** Considérer le problème

$$\min\left\{\int_0^1 \left(u'(t)^2 + 2e^t u(t) + 4u(t)^2\right) dt + 8u(1)^2 \quad : \quad u \in H^1([0,1]),\ u(0) = -\frac{1}{3}\right\}.$$

Prouver qu'il existe un minimiseur, qu'il est unique et le déterminer.

Exercice 2 (4 points)**.** Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ la fonction donnée, en cordonnées polaires, par $g(\theta) = \sin(k\theta)$, où $k \geq 1$ est un nombre entier. Trouver la solution de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur} \partial\Omega. \end{cases}$$

En déduire

$$\min\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \ :\ u \in C^1(\overline{\Omega}),\ u = g \text{ sur } \partial\Omega\right\} = k\pi.$$

Exercice 3 (5 points)**.** Soit $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ une solution faible de $\Delta u = |\nabla u|^{3/2}$.

1. Supposer $n = 2$ et prouver $u \in C^\infty$.
2. Faire de même pour $n = 3$.
3. Quelle est la difficulté pour $n = 4$?

Exercice 4 (5 points)**.** Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ avec $N > 1$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitz donnée et $f \in L^\infty(\Omega)$. Considérer le problème

$$\inf\left\{J(u) := \int_\Omega \left(|x||\nabla u(x)|^2 + f(x)u(x)\right) dx \ :\ u = g \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

Trouver un espace fonctionnelle convenable dans lequel la fonctionnelle J a un sens (à valeur éventuellement dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la condition au bord aussi, et dans lequel le problème de minimisation a une solution. Peut-on prendre un espace $W^{1,p}$? H^1 ?

Dire aussi si cette solution est unique, et écrire l'équation d'Euler-Lagrange du problème.

Trouver la solution dans le cas où g et f sont des constantes.

Exercice 5 (7 points)**.** Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ la boule unité en dimension N. Considérer le problème variationnel suivant :

$$\min\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega (u-1)^2 + Per(A) \ :\ u \in H^1_0(\Omega), A \subset \Omega \text{ de périmètre fini, avec } u = 0 \text{ p.p. sur } A^c\right\}.$$

où $Per(A)$ représente le périmètre de A au sens de l'espace BV.

1. Prouver que le problème admet une solution (u, A).
2. Prouver que pour toute solution (u, A) on a $0 \leq u \leq 1$.
3. Prouver que le problème admet au moins une solution radiale (c'est-à-dire $A = B(0, r)$ et u radiale décroissante).
4. Prouver que cette solution radiale est $C^\infty(\mathring{A})$ et satisfait $u < 1$ dans $\mathring{A}$.
5. Trouver ou caractériser la solution radiale.