Université Paris-Dauphine
DUMI2E 1e année
Analyse 2

Examen final
2 juin 2009

(2h ; seule la feuille des DL usuels est autorisée)

Question de cours 1 (4 points)**.** Donner la définition de fonction Lipschitzienne et de fonction convexe.
Donner ensuite un exemple de fonction convexe sur $[0,1]$ qui n'est pas Lipschitzienne et un exemple de fonction Lipschitzienne sur $[0,1]$ qui n'est pas convexe.

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\frac{10}{3(1+|x|)}+3x^2+|x|^3-2.$$

Dire si elle est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et si elle l'est sur $[0,+\infty]$.
Calculer ensuite $\min\{f(x)\ :\ x\in\mathbb{R}\}$, en justifiant rigoureusement si et pourquoi cette valeur minimale existe.

Exercice 3 (5 points)**.** Résoudre explicitement le système

$$\begin{cases} f'(x)=-\frac{2x}{1+x^2}f(x)+\sin x \\ f(0)=1. \end{cases}$$

Exercice 4 (4 points)**.** Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction C^2 satisfaisant l'équation différentielle

$$4t^2g''(t)-(2t+3)g(t)=2t$$

et $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$F(x)=\int_0^{x^2/2}g(t)dt.$$

Calculer $F'(x)$ en termes de g et démontrer que F est de classe C^3. Calculer ensuite (explicitement) $F'''(1)-3F''(1)+F'(1)$ et $F'''(2)-3F''(2)+F'(2)$

Exercice 5 (5 points)**.** Calculer, si elles existent, les limites de la fonction

$$f:\left]-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}},\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right[\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{\sin(x^3)-(\sin x)^3}{\tan(x^3)-(\tan x)^3}$$

pour $x\to 0$ et pour $x\to\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$.