

Examen final
31 mai 2010

(2h ; seule la feuille des DL usuels est autorisée)

Question de cours 1 (4 points). Donner la définition de fonction convexe, concave et sous-additive.

Une fonction concave $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est forcément sous-additive ? une fonction sous-additive est forcément concave ? donner des contre-exemples ou des preuves.

Exercice 2 (5 points). Considérer la fonction $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 2 \sin(x)(x + 1) - \cos(x)(x^2 + 2x - 1).$$

Démontrer que f admet un minimum ainsi qu'un maximum sur $[-\pi, \pi]$, et les trouver.

Exercice 3 (5 points). Résoudre explicitement le système

$$\begin{cases} f''(x) + f'(x) - 2f(x) = xe^x \\ f(0) = f'(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 4 (4 points). Trouver une solution du système

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{1+f(x)} \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

en précisant l'intervalle sur lequel elle est définie.

Exercice 5 (5 points). Soient a, b deux réels donnés avec $2 < a < b$. Calculer

$$\int_a^b \frac{x}{x^3 - 8} dx.$$

Calculer ensuite la limite de cette intégrale quand $b \rightarrow \infty$.