Université Claude Bernard - Lyon 1
M2 Statistique, Modélisation et Science des données
9 décembre 2024

Optimisation Convexe : Algorithmes et Applications en Apprentissage

Contrôle terminal. Durée : 2h. Tous les documents sont autorisés, mais pas les objets connectés et les moyens de communication. Le barème dépasse largement 20, il est conseillé de ne pas traiter tous les exercices.
Dans tout le sujet ci-dessous, $||x||$ désigne la norme euclidienne : $||x|| := (\sum_i |x_i|^2)^{1/2}$.

Exercice 1 (8 points)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) := \begin{cases} ||x|| & \text{si } ||x|| \le 1, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer f^*, ainsi que ∂f^* en tout point. Calculer ensuite ∂f en tout point.

Exercice 2 (5 points)**.** Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2, considérons la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = g(||x||)$. En tout point $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ écrire le gradient de f et la Hessienne de f. Exprimer la Hessienne dans une base orthonormée où un des vecteurs de la base est parallèle à x. Donner une condition sur g pour que la fonction f soit convexe et pour qu'elle soit elliptique, et calculer en termes de g sa constante α d'ellipticité. De même, donner une condition sur g pour que ∇f soit Lipschitzien et calculer en termes de g la constante L de Lipschitz de ∇f.

Exercice 3 (6 points)**.** Étant donné un point $y \in \mathbb{R}^n$, deux nombres $\tau, R > 0$ et une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique et définie positive on considère les itérations suivantes : en partant d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$\tilde{x}_{k+1} := x_k - \tau A(x_k - y), \quad x_k := \frac{\tilde{x}_{k+1}}{\max\{1, ||\tilde{x}_{k+1}||/R\}}.$$

Soient $0 < \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Prouver que si l'on a $\tau < 2\lambda_n^{-1}$ alors la suite $(x_k)_k$ converge vers un point x_∞ et le caractériser comme solution d'un problème d'optimisation. Sous les mêmes hypothèses, peut-on dire que $\tilde{x}_k$ a une limite aussi ? Dans quels cas a-t-on $x_\infty = y$?
2. Donner une estimation précise de la vitesse de convergence de la suite $(x_k)_k$.
3. Si $\tau = 2\lambda_n^{-1}$ et $||y|| < R$, prouver que la suite $(x_k)_k$ n'admet pas forcément une limite.

Exercice 4 (8 points)**.** Étant donnés une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$, et des coefficients strictement positifs $(p_i)_{i=1,\dots,n}$, on s'intéresse au problème d'optimisation suivant :

$$\min\{||Ax - y||^2 + \sum_{i=1}^n p_i|x_i| \quad : \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

1. Prouver que ce problème admet au moins une solution.
2. Prouver que si x et $\tilde{x}$ sont deux solutions de ce problème d'optimisation, alors $Ax = A\tilde{x}$ et que la solution est donc unique si le noyau de A est réduit au seul 0.
3. Si $n = m$ et la matrice A est diagonale de coefficients diagonaux $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ trouver l'unique solution optimale x en termes de y, $(\lambda_i)_i$ et $(p_i)_i$.
4. Suggérer un algorithme pour résoudre ce problème, en décrivant explicitement ses différentes étapes. Discuter sa vitesse de convergence selon les valeurs propres de la matrice A^tA.