

Examen de 2e session d'optimisation et simulation numérique

Optimisation convexe

Exercice 1. Les questions suivantes concernent toutes un même problème d'optimisation, mais sont assez indépendantes.

1. Étant donnés deux nombres $a < b \in \mathbb{R}$ soit $I_{[a,b]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la fonction définie par $I_{[a,b]}(x) = 0$ pour $x \in [a, b]$ et $I_{[a,b]}(x) = +\infty$ sinon. Calculer $I_{[a,b]}^*$.
2. Si $a, b \in \mathbb{R}^k$ et A est une matrice avec k lignes et n colonnes, soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{i=1}^k I_{[a_i, b_i]}((Ax)_i)$ (où $(y)_i$ est la i -ème composante de y). Calculer f^* .
3. Étant donné $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, prouver que le problème

$$(P) \quad \min \left\{ \frac{1}{2} |x - \bar{x}|^2 : a \leq Ax \leq b \right\}$$

(où l'inégalité entre vecteurs est à considérer composante par composante) admet une solution unique (sous l'hypothèse qu'il y ait au moins un point admissible), et calculer son dual.

4. Dans le cas où $k = n$ et A est une matrice diagonale, trouver la solution de ce problème.
5. Donner les itérations, avec des formules explicites et une description détaillée, de l'algorithme de gradient projeté pour trouver cette solution (dans le cas diagonal). Pourquoi cela est-il inutile? pourquoi le même algorithme n'est pas efficace dans le cas d'une matrice non diagonale?
6. Considérer le problème

$$(D) \quad \inf \left\{ \frac{1}{2} |A^t y|^2 - A\bar{x} \cdot y + \sum_i (b_i(y_i)_+ - a_i(y_i)_-) : y \in \mathbb{R}^k \right\},$$

où $(t)_+ := \max\{t, 0\}$ et $(t)_- := \max\{-t, 0\}$. Prouver que la valeur de cette borne inférieure est finie s'il existe un point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $a \leq A\hat{x} \leq b$, et qu'elle est atteinte si on peut choisir \hat{x} tel que $a_i < (A\hat{x})_i < b_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$.

7. Donner les itérations, avec des formules explicites et une description détaillée, d'un algorithme de type ISTA pour résoudre (D).
8. Faire de même pour la variante FISTA du même algorithme.
9. Une fois trouvée une solution de (D), comment récupérer une solution de (P)?