Université de Paris Sud 11 | **L2 – MPI**
Mathématiques | **2$^{\text{e}}$ semestre 2015-2016**

Math203 – Analyse et Convergence II
Devoir 1

à rendre en TD la semaine du 15 février 2016

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \varphi_n(x)\sin^2(\frac{\pi}{x}) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

où $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions définies sur $[0,1]$ qui converge simplement vers une fonction φ.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. On suppose ici que φ_n est définie par $\varphi_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}$ pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$. Montrer que dans ce cas la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f.
3. On suppose ici que φ_n est définie par $\varphi_n(x) = \frac{n}{nx+n+1}$ pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$. Montrer que dans ce cas la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f.
4. On suppose ici que les fonctions φ_n sont continues sur $[0,1]$, que $\varphi(0) = 0$ et que la suite (φ_n) converge uniformément vers φ (ceci généralise le premier cas étudié). Montrer que sous ces hypothèses la suite (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 2. A chaque fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue on associe la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt.$$

1. On suppose ici que $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? Converge-t-elle uniformément ?
2. On suppose ici que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$? Converge-t-elle uniformément ?
3. On suppose ici que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que dans ce cas la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser.
4. La suite (f_n) peut-elle converger uniformément sans que f soit uniformément continue sur $\mathbb{R}$?