Université Paris Sud | **L2 – MPI**
Mathématiques | **2$^{\text{e}}$ semestre 2015-2016**

Math203 – Analyse et Convergence II
Feuille d'Exercices 2

Exercice 2.1.— Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) := x^n(1-x)^n$. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $[0,1]$.

Exercice 2.2.— Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = x^n(1-x)$.

1. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite (f_n).
2. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la série $(\sum_{n\geq 1} f_n)$.

Exercice 2.3.— Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{(1-x)^n}{1+x^n}\cdot$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.
2. Justifier sans calcul que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,1]$.

Exercice 2.4.— Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) := \frac{(-1)^n x}{x^2+n}$. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2.5.— Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.6.— Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,2]$ on pose $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f_n en distinguant les cas n pair et n impair.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
3. Etudier la convergence simple puis la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[0,1]$.
4. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, 2-a]$.

Exercice 2.7.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}\, e^{-x}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$. Préciser la fonction limite f.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,+\infty[$? Sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$?
3. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.
4. Soit $A > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^A \big(f_n(t) - f(t)\big)\,dt$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^A f_n(t)\,dt$.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

Exercice 2.8.— On s'intéresse à la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ où, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n(1-x)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$ et qu'elle diverge sur $]1,+\infty[$.
2. Calculer la somme S de cette série de fonctions sur $[0,1]$.
3. La fonction S est-elle continue à gauche en $x=1$? Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[0,a]$ quel que soit $a \in [0,1[$.

Exercice 2.9.— On s'intéresse à la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

1. Calculer les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$.
2. Déterminer les bornes de f_n sur $[0,1]$. La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur [0,1] ?
3. Même question sur $[-1,0]$.

Exercice 2.10.— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}(\cos x)^n \sin(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On souhaite étudier la série de fonctions de terme général f_n.

1. Montrer qu'il suffit d'étudier cette série de fonctions sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On notera S sa somme
3. Montrer que $f_n'(x) = (\cos x)^{n-1}\cos((n+1)x)$ et que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a, \frac{\pi}{2}]$ quel que soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Qu'en déduit-on pour S ?
4. Calculer $\mathrm{Re}\left(\sum_{n\geq 1} (\cos(x)e^{ix})^{n+1}\right)$. En déduire une expression simple de $S'(x)$, puis de $S(x)$.

Exercice 2.11.— Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$ on pose $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2. Calculer la dérivée de f_n et étudier les variations de f_n. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que si une série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur un intervalle I, alors $\|g_n\|_{I,\infty} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (on pourra introduire les fonctions $R_n(x) = \sum_{p\geq n} g_p(x)$).
4. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.
5. Soit $\alpha > 0$. On pose $g_n(x) = \dfrac{x^\alpha}{x^2+n^2}$. A l'aide de ce qui précède, étudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ sur $[0,+\infty[$.
6. Montrer que dans le cas où $\alpha \in [1,2[$ la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ (on pourra considérer R_n comme ci-dessus et minorer $R_n(x)$ par $R_n(x) - R_{2n+1}(x)$).
7. Montrer que si $\alpha \geq 1$ la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$.