Optimisation
—
Algorithme de Newton à pas optimal

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, C^2, satisfaisant $\alpha I \leq D^2 f \leq LI$ pour deux nombres $L > \alpha > 0$. On appelle x^* le seul minimiseur de f. L'algorithme de Newton à pas optimal consititue une suite comme suit : étant donné $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on définit

— $d_k := (D^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$;

— $t_k := \mathrm{argmin}\{f(x_k - td_k),\, t \in \mathbb{R}\}$;

— $x_{k+1} := x_k - t_k d_k$.

La valeur de t_k est bien définie parce que la fonction f est elliptique, donc $\lim_{|t|\to\infty} g(t) := f(x_k - td_k) = +\infty$ et le minimum existe ; le minimiseur est unique car f est strictement convexe. Le t_k optimal est caractérisé par $g'(t_k) = 0$, donc $\nabla f(x_{k+1} \cdot d_k = 0$.

Théorème 1. *Sous les hypothèses citées, l'algorithme de Newton à pas optimal converge vers x^*. Si, de plus, $f \in C^3$, alors on a $t_k \to 1$ et, à partir d'un certain rang, $|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^2$.*

Démonstration. Comme pour l'algorithme de gradient à pas optimal on utilise l'ellipticité de f pour écrire

$$f(x_k) \geq f(x_{k+1}) + \nabla f(x_{k+1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) + \frac{\alpha}{2}|x_k - x_{k+1}|^2 = f(x_{k+1}) + \frac{\alpha}{2}|x_k - x_{k+1}|^2,$$

où l'on utilise l'orthogonalité de $\nabla f(x_{k+1})$ et d_k. On a donc

$$\frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{N}|x_k - x_{k+1}|^2 \leq f(x_0) - f(x_{N+1}) \leq C \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^{\infty}|x_k - x_{k+1}|^2 < \infty$$

parce que la série des $f(x_k) - f(x_{k+1})$ est téléscopique et f est bornée inférieurement par $f(x^*)$.

On en déduit $||x_k - x_{k+1}| \to 0$ et, comme ∇f et L-Lipshitzien, $|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)| \to 0$ aussi.

Pour toute matrice symétrique définie positive A on définit la norme $||v||_A$ par $||v||_A := \sqrt{Av \cdot v}$. L'inégalité $Av \cdot w \leq ||v||_A ||w||_A$ est satisfaite pour tout v, w. En prenant $A_k := (D^2 f(x_k))^{-1}$, on considère

$$\begin{aligned} ||\nabla f(x_k)||^2_{A_k} &= \nabla f(x_k) \cdot d_k = (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k+1}) \cdot d_k = d_k \\ &= (\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k+1}) \cdot A_k \nabla f(x_k) \leq ||\nabla f(x_{k+1} - \nabla f(x_k))||_{A_k} ||\nabla f(x_k)||_{A_k}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{\sqrt{L}}||\nabla f(x_k)|| \leq ||\nabla f(x_k)||_{A_k} \leq ||\nabla f(x_{k+1} - \nabla f(x_k))||_{A_k} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}||\nabla f(x_{k+1} - \nabla f(x_k))||,$$

où la norme sans indices dénote la norme euclidienne et où l'on a utilisé les bornes sur $D^2 f(x_k)$ pour obtenir $\frac{1}{L}I \leq A_k \leq \frac{1}{\alpha}I$ et donc $\frac{1}{\sqrt{L}}||v|| \leq ||v||_{A_k} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}||v||_{A_k}$ pour tout vecteur.

On en déduit donc $\nabla f(x_k) \to 0$. Comme les points x_k appartiennent au compact $\{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ cela implique $x_k \to x^*$. En effet, si cela n'était pas vrai, on aurait une valeur $\varepsilon > 0$ telle qu'une sous-suite x_{k_h} satisferait $||x_{k_h} - x^*|| \geq \varepsilon$. Quitte à extraire, on peut supposer que cette sous-suite admet une limite x (par compacité), et par continuité on aurait $\nabla f(x) = 0$, donc $x = x^*$. On aurait donc une contradiction.

On sait maintenant que l'on a $x_k \to x^*$.

Si on rajoute l'hypothèse que f est C^3 on peut supposer que ses dérivées troisièmes sont bornées dans un voisinage $B(x^*, R)$ qui va contenir tous les points x_k pour k suffisamment grand.

On considère d'abord la valeur de t_k. En utilisant $x_{k+1} = x_k - t_k d_k$ et le fait que f est C^3 et donc $\nabla f \in C^2$, on a

$$||\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) + D^2 f(x_k) t_k d_k|| \leq C t_k^2 ||d_k||^2.$$

On remarque que $t_k||d_k|| = ||x_{k+1} - x_k|| \to 0$ et que $D^2f(x_k)d_k = \nabla f(x_k)$. Donc $||\nabla f(x_{k+1}) - (1 - t_k)\nabla f(x_k)|| \leq Ct_k^2||d_k||^2$. En utilisant $\nabla f(x_{k+1}) \cdot d_k = 0$ on trouve

$$|1 - t_k|\nabla f(x_k) \cdot d_k| \leq Ct_k^2||d_k||^3.$$

On a $\nabla f(x_k) \cdot d_k = \nabla f(x_k) \cdot (D^2f(x_k))^{-1}\nabla f(x_k) = d_k \cdot D^2f(x_k)d_k \geq \alpha||d_k||^2$, donc on trouve d'abord

$$|1 - t_k|\alpha||d_k||^2 \leq Ct_k^2||d_k||^3.$$

En supposant, ce qui est vrai à partir d'un certain rang, $C|t_k|||d_k|| \leq \frac{\alpha}{2}$ et en divisant par $||d_k||^2$ on trouve

$$\alpha|1 - t_k| \leq \frac{\alpha}{2}|t_k|,$$

ce qui implique que la suite t_k est bornée (parce que $|t_k| \leq 1 + |t_k - 1| \leq 1 + \frac{1}{2}|t_k|$ et donc $|t_k| \leq 2$). On revient à l'inégalité précédente on trouve

$$|1 - t_k| \leq C||d_k|| \leq C||\nabla f(x_k)|| \to 0.$$

On revient maintenant à l'argument usuel pour prouver la convergence quadratique de l'algorithme de Newton. Ici on a

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - t_k(D^2f(x_k))^{-1}\nabla f(x_k) = -(D^2f(x_k))^{-1}\big(t_k\nabla f(x_k) + D^2f(x_k)(x^* - x_k)\big).$$

On utilise le DL $||\nabla f(x^*) - (\nabla f(x_k) + D^2f(x_k)(x^* - x_k))|| \leq C||x_k - x^*||^2$ ainsi que $\nabla f(x^*) = 0$ pour trouver $||\nabla f(x_k) + D^2f(x_k)(x^* - x_k)|| \leq C||x_k - x^*||^2$ et on écrit

$$||x_{k+1} - x^*|| \leq C|t_k - 1|||\nabla f(x_k)|| + C||\nabla f(x_k) + D^2f(x_k)(x^* - x_k)||,$$

où on a utilisé à plusieurs reprises les bornes sur $D^2f(x_k)$. Ensuite, on utilise

$$||\nabla f(x_k)|| = |||\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)|| \leq L||x_k - x^*||$$

ainsi que $|1 - t_k| \leq C||d_k|| \leq C||\nabla f(x_k)|| \leq C||x_k - x^*||$ pour obtenir l'estimation

$$||x_{k+1} - x^*|| \leq C||x_k - x^*||^2.$$

$\square$