

UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE
DUMI2E

UFR MATHÉMATIQUES DE LA DÉCISION

Notes de cours

Analyse 2

FILIPPO SANTAMBROGIO

ANNÉE 2010

Table des matières

1	Optimisation de fonctions continues et dérivables	5
1.1	Continuité	5
1.2	Dérivabilité	9
2	De la dérivation aux développements limités	12
2.1	Propriétés des fonctions dérivables	12
2.2	Dérivées d'ordre supérieur	15
2.3	Formule de Taylor et développements limités	18
2.4	Exemples et applications	21
2.4.1	Calculs de DL et de limites	22
2.4.2	Minima, maxima et DL	25
2.5	Fonctions convexes	26
2.5.1	Fonction convexes et concaves et leurs applications	32
3	Intégrales	35
3.1	Fonctions Intégrables	35
3.2	Des classes de fonctions intégrables	40
3.2.1	Fonctions monotones	40
3.2.2	L'intégrabilité des fonctions continues et l'uniforme continuité	41
3.2.3	Fonctions a variation bornée	45
3.3	Le théorème fondamental du calcul et l'intégration par parties	47
3.4	Méthodes de calcul de primitives et intégrales	50
3.4.1	Changement de variable d'intégration	50
3.4.2	Fonctions rationnelles	52
3.4.3	Fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques	56
3.5	Applications des intégrales aux développements limités	56
4	Equations différentielles	59
4.1	Equations linéaires a coefficients constants	60
4.1.1	Equations homogènes	60
4.1.2	Equations non homogènes	64
4.2	Equations linéaires d'ordre un, coefficients variables	69

4.3	Equations non linéaires d'ordre un à variable séparables	70
4.4	Astuces diverses : changement de variable	72

Chapitre 1

Optimisation de fonctions continues et dérivables

1.1 Continuité

On rappelle plusieurs définitions de fonctions continues.

Définition 1.1.1. Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} . Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue au point $x_0 \in A$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que tout $x \in A$ avec $|x_0 - x| < \delta$ satisfait aussi $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

De façon équivalente, on peut dire que f est continue au point x_0 si la limite $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x)$ existe et est égale à la valeur $f(x_0)$ (cela vient de la définition de limite)

Finalement, on peut dire aussi que f est continue au point x_0 si pour toute suite $(x_n)_n \subset A$ qui converge vers x_0 la limite de la suite $(f(x_n))_n$ existe et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ (ceci est une conséquence de la caractérisation séquentielle des limites).

Une fonction est dite continue si elle est continue en tout point de son domaine de définition A .

On peut remarquer que d'après cette définition toute fonction f est continue en tout point isolé de son ensemble de définition. Si par exemple $A = [0, 1] \cup \{2\}$ la fonction f est sûrement continue au point 2 car pour tout $\varepsilon > 0$ il suffit de choisir $\delta = 1/2$: de cette façon le seul point $x \in A$ avec $|x - 2| < \delta = 1/2$ sera le point 2 lui-même et la condition $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ sera vérifiée car $f(x) = f(2)$ (une conséquence de $x = 2$) ! De façon équivalente on peut considérer des suites : toute suite $(x_n)_n$ convergente vers 2 et composée de points appartenant à A réalise forcément l'égalité $x_n = 2$ à partir d'un certain rang. Par conséquent la suite $(f(x_n))_n$ satisfait $f(x_n) = f(2)$ à partir du même rang, ce qui est largement suffisant pour donner la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(2)$.

Dans ce chapitre on va voir comment la notion de continuité peut s'appliquer à la recherche des maxima et minima des fonctions. Ce qu'on peut donner est un important résultat d'existence. C'est-à-dire : sous certaines hypothèses on peut assurer l'existence d'un point de minimum (ou de maximum). Pour le trouver vraiment, il faut utiliser des conditions nécessaires qui nous aident à restreindre l'ensemble des possibles candidats minimiseurs. Pour cela il faut utiliser les dérivées.

Si la notion de continuité est celle qui est importante concernant les fonctions à minimiser, les notions importantes concernant les ensembles seront celles d'ensemble fermé et d'ensemble borné.

Définition 1.1.2. Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} . On dit que A est *ouvert* si pour tout $x \in A$ il existe un rayon $r > 0$ tel que $\{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\} \subset A$ (autrement dit, A inclut un segment bilatéral autour de tout point qu'il contient). Cette définition généralise celle d'intervalle ouvert à des ensembles qui ne sont pas des intervalles.

On dit que A est *fermé* si son complémentaire est ouvert.

Théorème 1.1.1. *Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est fermé si et seulement si, dès qu'on a une suite $(x_n)_n \subset A$ qui admet une limite $x_0 \in \mathbb{R}$, cette limite x_0 appartient forcément à A .*

Démonstration. Démontrons d'abord que si A est fermé la propriété qui nous intéresse concernant les suites est vérifiée. Pour faire ça, supposons par contradiction qu'il existe une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \rightarrow x_0 \in A^c$. Comme A^c est ouvert, prenons un rayon $r > 0$ tel que $\{y \in \mathbb{R} : |x_0 - y| < r\} \subset A^c$. Comme $x_n \rightarrow x_0$, on sait que, à partir d'un certain rang, on aura $|x_n - x_0| < r$ et donc $x_n \in A^c$. Cela contredit $x_n \in A$.

Démontrons maintenant la réciproque, c'est-à-dire que, si A satisfait cette propriété concernant les suites, alors il est fermé. Supposons par contradiction qu'il n'est pas fermé, et donc que son complémentaire n'est pas ouvert. Ceci signifie qu'il existe un point $x_0 \in A^c$ tel que, pour tout $r > 0$, on a $\{y \in \mathbb{R} : |x_0 - y| < r\} \cap A \neq \emptyset$. Prenons $r = 1/n$ et $x_n \in \{y \in \mathbb{R} : |x_0 - y| < 1/n\} \cap A$. La suite $(x_n)_n$ converge vers x_0 car on a $|x_n - x_0| < 1/n \rightarrow 0$. Pourtant $x_n \in A$ et $x_0 \in A^c$. Ceci contredit l'hypothèse. \square

Par exemple l'ensemble $A =]0, \infty[$ n'est pas fermé car la suite donnée par $x_n = 1/n$ est composée de points de A mais sa limite $x_0 = 0$ n'appartient pas à A . Par contre l'ensemble $A = [0, \infty[$ et plus en général tout intervalle ou demi-droite qui inclut ses points extrémaux est fermé.

Observation 1.1.1. Il ne faut pas penser que tout ensemble est soit ouvert soit fermé : par exemple l'ensemble $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé et l'ensemble vide est en même temps ouvert et fermé.

L'autre définition est beaucoup plus facile.

Définition 1.1.3. Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} . On dit que A est *borné* si il est inclus dans un intervalle $[-R, R]$. Autrement dit, A est borné s'il existe R tel que pour tout $x \in A$ on a $|x| \leq R$.

Évidemment ce n'est pas la même chose de dire "il existe R tel que pour tout $x \in A$ on ait $|x| \leq R$ " et "pour tout $x \in A$ il existe R tel que l'on a $|x| \leq R$ ". Dans ce deuxième cas la quantité R peut dépendre de x et donc cette propriété est toujours vérifiée, car pour tout x on peut choisir par exemple $R = 1 + |x|$ et réaliser l'inégalité.

On sait, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, que toute suite bornée admet une sous-suite convergente. On peut dire "toute suite contenue dans un intervalle fermé et borné I admet une sous-suite convergente et la limite de cette sous-suite appartient encore au même intervalle I ". Pareillement on a :

Théorème 1.1.2 (Une variante du Théorème de Bolzano-Weierstrass). *Soit A un sous-ensemble fermé et borné de \mathbb{R} et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A . Il existe alors $x_0 \in A$ et une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$.*

Démonstration. L'ensemble A étant borné, il est contenu dans un intervalle fermé borné $[-R, R]$. On peut donc appliquer à la suite $(x_n)_n$ le théorème de Bolzano-Weierstrass et en déduire l'existence d'une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$, pour un certain $x_0 \in [-R, R]$. Ce qui nous reste à prouver est $x_0 \in A$. Ceci est une conséquence du fait que A est fermé, comme toute suite d'éléments de A , si jamais elle admet une limite, a limite dans A . \square

Définition 1.1.4. Un sous-ensemble A de \mathbb{R} tel que toute suite $(x_n)_n \subset A$ admette une sous-suite convergente vers un point de A est dit un ensemble compacte.

D'après ce que l'on vient de dire, tout ensemble fermé et borné est compacte. En fait, il est possible de démontrer plus que ça.

Proposition 1.1.3. *Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est compacte si et seulement si il est fermé et borné.*

Démonstration. On sait déjà qu'un fermé borné est compacte ; il nous reste donc à démontrer qu'un compacte est fermé et ensuite qu'un compacte est borné.

Soit A compacte ; pour démontrer qu'il est fermé on va utiliser la propriété concernant les suites. Soit $(x_n)_n \subset A$ une suite d'éléments de A et supposons $x_n \rightarrow x_0$. Il faut démontrer que x_0 appartient à A . Or, on sait, par définition de la compacité, qu'il existe une sous-suite x_{n_k} et un point $\bar{x} \in A$ tels que $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$. A priori x_0 , que l'on a pris dans l'énoncé concernant les suites, et \bar{x} , qui vient de la définition de la compacité, n'ont rien à voir l'un avec l'autre. A priori... En fait, comme on avait $x_n \rightarrow x_0$, cela reste vrai que $x_{n_k} \rightarrow x_0$ et, par unicité de la limite, $x_0 = \bar{x}$. Ceci démontre que $x_0 \in A$ et conclut la preuve que A est fermé.

Pour démontrer qu'il est également borné supposons qu'il ne l'est pas. Alors pour tout R l'inclusion $A \subset [-R, R]$ n'est pas vraie. Si on prend $R = n$ on peut trouver un point $x_n \in A \setminus [-n, n]$. On a donc une suite $(x_n)_n \subset A$ avec $|x_n| \geq n \rightarrow +\infty$. Par compacité, il faudrait pouvoir extraire une sous-suite $x_{n_k} \rightarrow x_0$, ce qui est impossible car la suite x_{n_k} ne peut pas être bornée (on a $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k}| = +\infty$) et on sait que toute suite convergente est bornée. Ceci est une contradiction et l'ensemble A est donc borné. \square

On pourrait alors se demander pourquoi inventer un nom pour les ensembles compacts alors que ce concept revient à "fermé et borné". La réponse (peut-être décevante à ce moment) est que cela est vrai dans \mathbb{R} mais que pour les sous-ensembles d'un autre espace cela pourrait être faux.

Une conséquence de tout ceci est le bien connu théorème d'existence des minima et maxima.

Théorème 1.1.4 (Weierstrass). *Soit A un sous-ensemble compacte de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe alors un point $x_0 \in A$ tel que $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in A\}$ (et, symétriquement, il existe un point $x^0 \in A$ tel que $f(x^0) = \max\{f(x) : x \in A\}$).*

Démonstration. Démontrons l'existence du minimum, celle du maximum étant complètement similaire. L'ensemble des valeurs $\{f(x) : x \in A\}$ n'admet pas a priori encore l'existence d'un minimum, mais il admet sûrement un inf, c'est à dire une valeur $m \in [-\infty, +\infty[$ qui satisfait $m \leq f(x)$ pour tout $x \in A$ et qui a aussi la propriété qu'on peut approcher la valeur m d'aussi près que l'on veut avec des valeurs de la forme $f(x)$ avec $x \in A$ (si $m \in \mathbb{R}$ cela peut être énoncé en disant "pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $x \in A$ tel que $f(x) < m + \varepsilon$ " et si $m = -\infty$ on dit par contre "pour tout $L \in \mathbb{R}$ il existe un $x \in A$ tel que $f(x) < L$ "). Cela signifie qu'il existe une suite des valeurs $f(x_n)$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = m$. Les points x_n sont des points de A et donc on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{n_k})_k$ de la suite $(x_n)_n$ avec sa limite $x_0 \in A$. Or, si $x_{n_k} \rightarrow x_0$, comme la fonction f est continue, on en déduit $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$. Cependant, on savait que la limite de toute la suite $(f(x_n))_n$ était m et donc on a aussi $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = m$. On en déduit que $f(x_0) = m$. Si en un point la valeur de la fonction réalise l'inf on a conclu car cet inf sera un minimum aussi, réalisé par ce point-là. \square

Observation 1.1.2. Une conséquence de ce résultat est que l'image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné, et parfois on le trouve énoncé comme ça. Que l'image d'un intervalle soit un intervalle est une conséquence des théorèmes des valeurs intermédiaires (théorème des zéros), alors que le fait qu'il soit borné et que ses bornes appartiennent à l'image sont des conséquences de l'existence du minimum et du maximum que l'on vient de montrer.

Une autre remarque qui est très importante en optimisation et que vous rencontrerez probablement au cours de vos études mathématiques plus avancées est la suivante :

Observation 1.1.3. À fin de garantir l'existence du minimum (mais non pas du maximum) on peut choisir une hypothèse un peu moins forte que la continuité de la fonction f . La continuité a été en effet utilisée pour garantir $m = f(x_0)$ lors qu'on savait $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = m$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$. Ceci donnait $m = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Pourtant, comme on savait déjà $m \leq f(x_0)$ (car m est la borne inférieure de f), il nous aurait suffi $m \geq f(x_0)$. Ceci justifie l'introduction de la notion de semicontinuité suivante

Définition 1.1.5. On dit qu'une fonction f est *semi-continue inférieurement* (resp., *supérieurement*) au point x_0 si pour toute suite $(x_n)_n$ avec $x_n \rightarrow x_0$ et $f(x_n) \rightarrow l$ on a $l \geq f(x_0)$ (resp., $l \leq f(x_0)$). Autrement dit, on ne demande qu'une inégalité dans la définition de la continuité.

Dans le langage des δ et des ε on a que f est semi-continue inférieurement (resp., supérieurement) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que tout $x \in A$ avec $|x_0 - x| < \delta$ satisfait aussi $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$.

Théorème 1.1.5 (Variante de Weierstrass avec la semicontinuité). *Soit A un sous-ensemble compacte de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement. Il existe alors un point $x_0 \in A$ tel que $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in A\}$ (et, symétriquement, si f est semi-continue supérieurement, il existe un point $x^0 \in A$ tel que $f(x^0) = \max\{f(x) : x \in A\}$).*

On ne donne pas une preuve explicite de ce fait, une relecture de la preuve du Théorème 1.1.4 étant suffisante, grâce à l'Observation 1.1.3.

Il est utile de voir quelques exemples de non-existence du minimum ou maximum pour comprendre l'importance des hypothèses.

Exemple 1.1.1. Soit $A = [-1, 1]$ et f la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction n'admet pas de minimum sur l'ensemble A , car $\inf_{x \in A} f(x) = 0$ mais $f(x) > 0$ pour tout $x \in A$. En effet, il s'agit d'une fonction qui est continue en tout point de $A \setminus \{0\}$ mais pas en 0. De plus, au point 0 elle n'est même pas semi-continue inférieurement car $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = 0 < f(0) = 1$. Et c'est justement le point 0 qui était le point important dans la démonstration du théorème de Weierstrass, car si l'on prend une suite $(x_n)_n$ telle que $f(x_n)_n$ converge vers l'inf on aura justement $x_n \rightarrow 0$. Par contre la même fonction admet un maximum, et ce maximum est 2, car on peut bien voir $2 = f(0) \geq f(x)$ pour tout x . La fonction f est en effet semi-continue supérieurement.

Exemple 1.1.2. Soit $A =]0, 1]$ et f la fonction donnée par $f(x) = 1 - x$. Cette fonction n'admet pas de maximum sur l'ensemble A , car $\sup_{x \in A} f(x) = 1$ mais, évidemment, $f(x) < 1$ pour tout $x \in A$. En effet, ici le problème n'est pas posé par f (qui est bien continue), mais par A , qui est borné mais pas fermé (il y a des suites $(x_n)_n \subset A$ qui converge à un point hors de A , et notamment à 0). Dans ce cas là aussi, si l'on prend une suite $(x_n)_n$ telle que $f(x_n)_n$ converge vers le sup on aura justement $x_n \rightarrow 0$. Mais $0 \notin A$ et donc il ne peut pas réaliser le maximum. Il est intéressant de remarquer que, en remplaçant $1 - x$ par $1/x$, on aurait même pu construire une fonction qui non seulement n'admet pas de maximum, mais elle n'est pas non plus bornée supérieurement. Ceci n'aurait pas évidemment été possible si l'on avait voulu utiliser une fonction continue sur un fermé borné.

Comme on a vu que les hypothèses de continuité peuvent être affaiblies en une condition unilatérale pour garantir le minimum, on peut également être un peu plus souple sur la nature de l'ensemble A , quitte à demander à la fonction f de l'aider un peu. On fera l'exemple du cas $A = \mathbb{R}$.

Théorème 1.1.6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que f tende vers $+\infty$ des deux côtés, c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Il existe alors un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration. Prenons une valeur quelconque réalisée par la fonction f , par exemple $f(0)$. Il est évident que le minimum m , si il existe, va vérifier la condition $m \leq f(0)$. Tous les points x avec $f(x) > f(x_0)$ n'influencent pas l'existence et la nature du minimum.

Par définition de limite infinie, on sait que pour tout $K \in \mathbb{R}$ il existe un nombre (réel) b tel que $x > b$ entraîne $f(x) > K$ (ceci car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$) ainsi qu'un nombre a tel que $x < a$ entraîne $f(x) > K$ (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$). Cela signifie que l'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq K\}$ est borné, car on a $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq K\} \subset [a, b] \subset [-R, R]$, avec $R = \max\{|a|, |b|\}$. De plus, cet ensemble est fermé : en effet, si on prend une suite $(x_n)_n \subset X$ et on suppose $x_n \rightarrow x_0$, par continuité de f on doit avoir $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Ceci implique $f(x_0) \leq K$ (à cause du fait que toutes les valeurs $f(x_n)$ étaient plus petites que K).

Prenons $K = f(0)$. Grâce à ce qu'on a dit avant, on peut donc se restreindre à l'ensemble $X \subset \mathbb{R}$, car $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$. Et dans cet ensemble là il existe, grâce au théorème précédent, un point $x_0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in X$. Comme en plus on a $f(x) \geq K = f(0) \geq f(x_0)$ pour tout $x \notin X$, on a finalement $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui montre que x_0 est un point de minimum. \square

1.2 Dérivabilité

On rappelle maintenant qu'est-ce qu'une fonction dérivable.

Définition 1.2.1. Une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est dite dérivable au point $x_0 \in]a, b[$ si la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. La valeur de la limite est alors dite la dérivée de f au point x_0 et notée $f'(x_0)$.

On sait bien que si une fonction f est dérivable au point x_0 elle est continue aussi au même point, mais évidemment la réciproque n'est pas vraie. Pour pouvoir parler de dérivée ou dérivabilité d'une fonction en un point il faut pouvoir considérer la limite des taux d'accroissements. Il vaut mieux que ce point soit à l'intérieur du domaine de définition de la fonction.

Si l'on a présenté ici le concept de dérivée c'est par ce qu'il nous est utile pour donner des conditions nécessaires pour qu'un point soit un point de minimum ou maximum d'une fonction.

Ce qui est bien connu est le suivant théorème :

Théorème 1.2.1. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point $x_0 \in]a, b[$. Supposons que x_0 est un point de minimum pour f , c'est-à-dire que pour tout $x \in]a, b[$ on a $f(x) \geq f(x_0)$. Alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. On sait que la valeur $f'(x_0)$ est obtenue comme limite des taux d'accroissement, cette limite étant égale d'une côté et de l'autre. On peut donc écrire

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

même si on sait qu'en vrai $f'(x_0)$ est égale à la limite prise des deux côtés (mais si cette limite existe, elle coïncide avec la limite droite, celle qu'on est en train de considérer, et avec

la limite gauche aussi). Les quantités $f(x) - f(x_0)$ et $x - x_0$ sont positives (au sens ≥ 0), l'une par minimalité de x_0 , l'autre par ce que x est à droite de x_0 . Par conséquent les taux d'accroissement dont on prend la limite sont positifs et la limite aussi (c'est une propriété connue des limites : les limites des quantités positives sont positives). On a donc $f'(x_0) \geq 0$.

Pareillement, si l'on considère la limite gauche, on a la positivité de $f(x) - f(x_0)$ alors que $x - x_0$ sera négatif. On en déduit donc $f'(x_0) \leq 0$. Ceci implique $f'(x_0) = 0$. \square

Observation 1.2.1. On a évidemment utilisé le fait que x_0 se trouve à l'intérieur de l'intervalle, car on a considéré la limite des deux côtés. Si l'on regarde une fonction définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ et un point de minimum sur le bord, en supposant qu'il admette une dérivée d'un côté (gauche en a , droit en b), alors on en déduit seulement une inégalité, et notamment $f'(a) \geq 0$ ou bien $f'(b) \leq 0$.

Observation 1.2.2. Le théorème s'adapte au cas d'un point de maximum, et il donne toujours la condition $f'(x_0) = 0$. Bien sûr, dans le cas des inégalités sur les points du bord, ces inégalités sont renversées.

Ce théorème donne un critère puissant pour la recherche des minima et maxima des fonctions dérivables, même si lors qu'on détecte un point x_0 avec $f'(x_0) = 0$ on ne peut pas savoir ni si il sera un minimum, ni si il sera un maximum (car la condition nécessaire est complètement symétrique), et encore il pourrait être un point qui n'a ni un comportement de minimum ni un comportement de maximum. Tout d'abord le théorème s'adapte très bien au cas des minima locaux (c'est-à-dire les points x_0 tels qu'il existe un rayon $r > 0$ qui fait en sorte que x_0 soit un point de minimum pour la fonction f sur l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$). Ceci nous montre qu'un point avec $f'(x_0) = 0$ pourrait très bien être un point de minimum local, ou de maximum local. Non seulement, l'exemple suivant est très bien connu :

Exemple 1.2.1. Considérons $A = [-1, 1]$ et $f(x) = x^3$. On a $f'(0) = 0$ et pourtant 0 n'est pas un minimum, ni un maximum, ni un minimum local, ni un maximum local. On le peut vérifier facilement car près de 0 les valeurs positives de x donnent des valeurs de $f(x)$ qui dépassent $f(0)$ et les valeurs négatives restent toujours en dessous. Ce qui se passe est que la fonction est presque horizontale au voisinage de 0 mais elle a une petite déviation des deux côtés, l'une vers le haut, l'autre vers le bas, si petite que quand on calcule la limite des taux d'accroissements elle n'influence pas le résultat de la dérivée.

En tout cas, l'utilité du théorème 1.2.1 est la possibilité de regarder un petit nombre de points, ceux qui satisfont les conditions nécessaires, en tant que candidats minima, à la place de regarder a priori tous les points de l'intervalle. Il est très utile si couplé avec le critère d'existence et si la fonction est soit dérivable en tout point, soit à une petite liste de points près.

Critère de recherche de minima et maxima absolus :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable en tout point de $]a, b[\setminus S$, où S est un ensemble fini et, si possible, pas nombreux. On peut donc composer une liste de points de $[a, b]$ qui sont candidats à être minima et/ou maxima, et qui est composée de :

- les points de bord a et b , car là le critère du théorème 1.2.1 n'est pas applicable ;
- les points de S car là non plus on peut l'appliquer ;
- tout point $x_0 \in]a, b[\setminus S$ qui satisfasse $f'(x_0) = 0$ (ce qui est souvent réalisé par un petit nombre de points).

Le théorème de Weierstrass nous garantit que le minimum et le maximum existent et en plus on est sûr qu'on les trouvera parmi les points qu'on a listé. Il suffit donc de calculer les valeurs $f(x)$ correspondant à tous les points x de la liste et on trouvera le (ou les) point(s) de minimum en prenant ceux qui ont les valeurs les moins élevées et les points de maximums en prenant ceux qui ont les valeurs le plus élevées.

Évidemment plein d'autres critères similaires peuvent être bâtis pour d'autres situations, par exemple pour une fonction satisfaisant aux conditions du Théorème 1.1.6.

Observation 1.2.3. Quelle est la différence entre cette approche et celle par tableau de variations ? pas grande chose. Ici on ne calcule pas les signes de la dérivée (et donc on économise du temps) mais on se retrouve à regarder comme candidats ces points aussi qui ont dérivée nulle (ou où f n'est pas dérivable) mais qui ne peuvent pas vraiment minimiser à cause des signes de la dérivée juste avant et juste après (et donc on perd un petit peu plus de temps à calculer les valeurs de f sur ces points là). Si on cherche et le maximum et le minimum le tableau des variations nous force à calculer les signes et en plus souvent ne nous fait pas économiser beaucoup d'évaluations de f sur les points qu'on a trouvé, car la plus part d'entre eux sont soit candidats à minimiser soit à maximiser (sauf ceux qui sont du type x^3 , où la dérivée s'annule sans changer de signe, ou ceux qui sont de type $2x + |x|$, où la fonction n'est pas dérivable mais dérivée gauche et droite ont le même signe). Par contre, si l'on cherche seulement l'une des deux bornes (min ou max), alors p-e le tableau de variations peut être rentable.

Mais c'est des petites différences, c'est à peu près la même idée. Un avantage de cette approche est par contre qu'on pourra l'appliquer en dimension plus grande (en deuxième année, disons), quand une fonction définie sur le plan n'a pas un "sens de variations".

Dernière chose : si f n'est pas continue, parfois on peut quand même (par exemple grâce à la semicontinuité) établir l'existence du maximum ou minimum. Après, si l'on utilise un tableau de variations, il faut être très attentifs, car aux points de discontinuité il y a typiquement un saut. La fonction $f(x) = x$ sur $x \geq 0$ et $f(x) = x + 1$ sur $x < 0$ a une dérivée positive avant et après 0 mais 0 est quand même un candidat minimum (à cause du saut en bas entre 0^- et 0^+).

Chapitre 2

De la dérivation aux développements limités

2.1 Propriétés des fonctions dérivables

On présente ici quelques théorèmes importants sur les fonctions dérivables qui seront repris dans la suite.

Théorème 2.1.1 (Rolle). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[\subset [a, b]$. Supposons $f(a) = f(b)$. Il existe alors un point $\xi \in]a, b[$ tel que l'on ait $f'(\xi) = 0$.*

Démonstration. La fonction f étant continue et l'intervalle $[a, b]$ fermé et borné, d'après le théorème de Weierstrass on sait que f admet un maximum et un minimum sur cet intervalle. Soient m et M les valeurs du minimum et du maximum, respectivement, et K la valeur commune de $f(a)$ et $f(b)$. On a forcément $m \leq K \leq M$. Si toutes les inégalités sont des égalités alors on a $m = M$ et la fonction est constante. Mais une fonction constante admet partout dérivée nulle et tout point $\xi \in]a, b[$ satisfait la condition. Supposons donc qu'on ait soit $m < K = f(a) = f(b)$ soit l'autre inégalité. Dans ce premier cas, il signifie qu'il existe un point de minimum $x_0 \in [a, b]$ et que $f(x_0) < f(a) = f(b)$. Ceci implique en particulier que x_0 est distinct de a et de b . Il est donc à l'intérieur et on sait que si un point à l'intérieur réalise le minimum (un minimum local aurait été suffisant) d'une fonction dérivable, la dérivée en ce point là doit forcément être nulle. Il suffit donc de choisir $\xi = x_0$. Pareillement, si c'est le maximum M qui dépasse strictement K , on en déduit l'existence d'un point intérieur de maximum et ce point aura dérivée nulle. \square

Observation 2.1.1. Vous pouvez remarquer qu'on a vraiment utilisé toutes les hypothèses : la dérivabilité en tout point intérieur est à demander car on ne sait pas où le minimum tombera, et là où il tombe on a besoin de dire que la dérivée vaut zéro ; la continuité d'autre côté est demandée pour assurer l'existence d'un minimum et un maximum, et on en a besoin sur un ensemble fermé borné. Non seulement, il est facile de se rendre compte que sans la continuité en a et b le théorème n'aurait aucune chance d'être vrai : si l'on admet que les valeurs en a et b puissent différer des limites de $f(x)$ lors que x tend vers a et b respectivement, on a beau supposer que les deux valeurs $f(a)$ et $f(b)$ sont égales, mais cela serait toujours une hypothèse inutile car elle n'implique rien au niveau du comportement intérieur de la fonction. Et évidemment sans $f(a) = f(b)$ le théorème est faux (par exemple prenez $f(x) = x$).

Théorème 2.1.2 (Acroissements finis). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[\subset [a, b]$. Il existe alors un point $\xi \in]a, b[$ tel que l'on ait*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. Soit $L = (f(b) - f(a))/(b - a)$ et considérons la fonction g donnée par

$$g(x) = f(x) - Lx.$$

Cette fonction garde les mêmes propriétés de continuité et dérivabilité de la fonction f car on y a rajouté tout simplement une fonction linéaire, qui est elle-même continue et dérivable en tout point. Montrons que $g(a) = g(b)$, de façon à pouvoir appliquer le théorème de Rolle à la fonction g . On a

$$g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - L(b - a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Ceci montre $g(b) = g(a)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g et on obtient qu'il existe un point $\xi \in]a, b[$ tel que

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - L.$$

Grâce au choix de L qu'on a fait, on vient de montrer la thèse. \square

Remarque inutile : au delà des Alpes ce théorème s'appelle Théorème de Lagrange. Indépendamment de son nom, il a plusieurs conséquences intéressantes.

La première qu'on va voir concerne la notion de fonction Lipschitzienne.

Définition 2.1.1. Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne si il existe une constante L (appelée "constante de Lipschitz", Lipschitz étant le mec qui a, peut-être, introduit cette notion) telle qu'on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ pour tout } x, y \in A.$$

Souvent on appelle constante de Lipschitz la plus petite constante L qui permet de réaliser l'inégalité (car, évidemment, si L est une constante qui satisfait l'inégalité ci-dessus, tout $L' \geq L$ la satisfait aussi). On définit donc

$$Lip(f) := \inf\{L \geq 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ pour tout } x, y \in A\}.$$

Il est facile de voir que toute fonction Lipschitz est continue (il suffit toujours de choisir $\delta = \varepsilon/L$). Par contre, elle n'est pas forcément dérivable : il suffit de penser à la fonction $f(x) = |x|$, qui admet 1 comme constante de Lipschitz mais n'est pas dérivable au point 0. Il est intéressant de remarquer que la non-dérivabilité vient ici de la non-existence de la limite des taux d'accroissement (limite différente à droite et à gauche), même si ils restent quand même bornés (contrairement au cas par exemple de la fonction $f(x) = x^{1/3}$, qui admet la limite des taux d'accroissement en 0, mais elle n'est pas finie, les taux n'étant pas bornés).

La notion de fonction Lipschitzienne dévient très facile dans le cas des fonctions dérivables.

Proposition 2.1.3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point de $]a, b[$. Les deux faits suivants sont équivalents :

- la dérivée de f est bornée sur $]a, b[$,
- f est Lipschitzienne.

De plus, si la dérivée est bornée et on a $|f'(x)| \leq L$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f admet la même valeur L comme constante de Lipschitz et si f admet une constante de Lipschitz, la même constante est une borne supérieure pour $|f'(x)|$. On a donc $Lip(f) = \sup_{x \in A} |f'(x)|$.

Démonstration. Démontrons que une borne L sur la dérivée entraîne la nature Lipschitz de la fonction f avec constante de Lipschitz L . Prenons $x, y \in]a, b[$ et supposons par simplicité

$x < y$ (la condition de Lipschitz étant tout à fait symétrique en x et y). On peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[x, y]$ et on obtient

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi),$$

ce qui implique

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|,$$

si L est une constante qui borne la dérivée, c'est-à-dire telle que $|f'(\xi)| \leq L$ pour tout $\xi \in]a, b[$.

Maintenant supposons que f est Lipschitzienne avec constante de Lipschitz L et démontrons $|f'(x_0)| \leq L$ pour tout $x_0 \in]a, b[$. En mettant la valeur absolue partout dans la limite qui donne la définition de dérivée, on trouve

$$|f'(x_0)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}.$$

Pourtant on a $|f(x) - f(x_0)|/|x - x_0| \leq L$ et donc on en déduit $|f'(x_0)| \leq L$ (celle-ci est la partie facile de l'équivalence, alors que pour l'autre il est nécessaire d'utiliser le théorème des accroissements finis). \square

Une autre conséquence du théorème des accroissements finis est le fait qu'on peut faire le développement suivant : si f est une fonction dérivable en tout point d'un intervalle A et $x, x_0 \in A$, alors on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0),$$

où ξ est un point de l'intervalle $]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$ (ce qui dépend de $x > x_0$ ou $x_0 > x$). Celui-ci est un développement exacte de la fonction f , qui est continue car dérivable, et qui donne une idée de l'écart entre $f(x)$ et $f(x_0)$. Il s'agit en fait d'un développement qui n'est pas très satisfaisant et qui est sûrement dépassé par le suivant :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0), \tag{2.1}$$

où $\varepsilon(x)$ est une quantité qui tend vers 0 lors que $x \rightarrow x_0$ (en fait, si l'on définit ε grâce à la relation ci-dessus, qui en donne la valeur en tout point $x \neq x_0$, et on rajoute $\varepsilon(x_0) = 0$, on peut dire qu'on obtient une fonction continue). Ce développement est obtenible à partir de la définition de dérivée, car si

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0),$$

on peut dire

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x)$$

et après reconstruire le développement souhaité.

La quantité $\varepsilon(x)(x - x_0)$ est aussi souvent notée par le symbole $o(x - x_0)$. Il est en fait commun d'écrire $o(g(x))$ si g est une fonction qui converge à zéro lorsque $x \rightarrow x_0$ et alors dans ce cas là dire $f(x) = o(g(x))$ ou " f est un petit o de g " signifie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ceci équivaut, dans la notation de tout à l'heure, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$. Typiquement on utilise la notation du petit o avec des puissances de $x - x_0$. Par exemple on peut dire que $x^2 + x^4$ est un petit o de x pour $x \rightarrow 0$, mais non pas qu'elle est un petit o de x^2 (car la limite du ratio n'est pas nulle mais 1).

Les deux développements ont des avantages et désavantages : le premier est exacte, mais les termes qui sont connus (si l'on connaît le comportement de f en x_0 , c'est-à-dire $f(x_0)$ et $f'(x_0)$) s'arrêtent tout de suite et il n'y a que la partie $f(x_0)$; par contre, le deuxième utilise une fonction ε dont on sait seulement qu'elle converge vers zéro, mais il a l'avantage d'arriver un peu plus loin avec les termes connus, car il donne déjà une approximation avec une droite (la fonction $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$). Le but de ce genre de développement est en fait d'approcher une fonction autour d'un point x_0 en connaissant les valeurs de f et de sa dérivée. On verra dans les sections suivantes que on arrivera à faire beaucoup mieux en utilisant aussi ses dérivées d'ordre supérieur.

2.2 Dérivées d'ordre supérieur

Une question naturelle qu'on se pose quand on a une fonction f dérivable en tout point est celle de considérer la fonction $x \mapsto f'(x)$ est se demander : est-elle continue ? est-elle dérivable ?

Il est assez naturel de se convaincre que f' n'est pas forcément une fonction dérivable et l'exemple le plus facile est le suivant :

Exemple 2.2.1. Considérons $f(x) = x|x|$, qui correspond à deux paraboles différentes, l'une avec concavité en haut, l'autre en bas, qui se joignent en 0 (car $f(x) = x^2$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = -x^2$ pour $x \leq 0$). Il est facile de calculer $f'(x)$ (et de vérifier qu'elle existe) pour $x \neq 0$, car localement la fonction coïncide avec une parabole connue. Concernant 0, on peut calculer à la main la limite

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

et finalement on obtient l'expression générale $f'(x) = 2|x|$. Cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Il est moins facile de comprendre si f' est forcément continue ou non.

En fait il y a ce résultat, dû à Darboux, qui montre que f' a une propriété typique des fonctions continues.

Théorème 2.2.1 (Darboux). *Soit A un intervalle et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point : alors, si $x_0, x_1 \in A$, pour toute valeur l intermédiaire entre $f'(x_0)$ et $f'(x_1)$, il existe ξ entre x_0 et x_1 tel que $f'(\xi) = l$.*

Démonstration. Par praticité, on va supposer $l = 0$, $x_0 < x_1$ et $f'(x_0) < 0 < f'(x_1)$. Ceci ne réduit pas la généralité du théorème, car il suffit de remplacer f par la fonction $x \mapsto f(x) - lx$ et, le cas échéant, de changer de signe à f ou de faire un changement de variable $x \mapsto -x$.

Considérons donc la fonction f sur l'intervalle $[x_0, x_1]$: comme elle est dérivable, elle est continue aussi et, l'intervalle étant fermé et borné, elle admet minimum sur cet intervalle. Soit ξ ce point de minimum : on montrera $\xi \neq x_0$ et $\xi \neq x_1$, ce qui entraînera qu'il s'agit d'un point intérieur, et donc $f'(\xi) = 0$, ce qui conclut la preuve.

Pour montrer $\xi \neq x_0$ il suffit de remarquer $f'(x_0) < 0$, ce qui empêche au point x_0 d'être un point de minimum sur l'intervalle $[x_0, x_1]$, car il ne respecte pas la condition nécessaire pour les points du bord. En fait, si la dérivée au point initial est négative, le point n'est pas un minimum car juste à sa droite on a des valeurs plus petites. Pareillement on a $\xi \neq x_1$. \square

Une autre propriété typique des fonctions continues qui est satisfaite par la dérivée est la suivante.

Théorème 2.2.2. *Soit A un intervalle et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $A \setminus \{x_0\}$. Supposons*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Alors $f'(x_0)$ existe et est égale à l . En particulier, si f est déjà dérivable partout en A et $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ existe alors f' est continue au point x_0 .

Démonstration. On veut démontrer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l.$$

Pour cela on utilise le fait suivant : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f' - l| < \varepsilon$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (grâce à l'hypothèse sur la limite des dérivées au point x_0). De plus, on utilise le théorème des accroissements finis et on voit que, si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[,$$

car ξ aussi appartient à $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ (comme il est un point intermédiaire entre x_0 et x). Ceci montre que la limite des taux d'accroissements est égale à l et que donc f est dérivable au point x_0 et $f'(x_0) = l$. La même démonstration montre la continuité de f' sous l'hypothèse de l'existence de la limite. \square

Observation 2.2.1. Le même énoncé peut s'étendre au cas d'une limite à gauche ou à droite seulement, avec égalité avec la dérivée gauche (ou droite).

Observation 2.2.2. Il est important remarquer la différence qu'il y a en théorie entre la limite des taux d'accroissement et la limite des dérivées. Si on nous demande de démontrer qu'une fonction f donnée est dérivable au point x_0 on devrait considérer les taux d'accroissement $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ et leur limite pour $x \rightarrow x_0$, et non pas la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Pareillement, pour démontrer qu'elle n'est pas dérivable il faut démontrer que la limite des taux d'accroissement n'existe pas, et non pas celle des dérivées. L'exemple d'en bas montre aussi que cette deuxième limite peut ne pas exister alors que la première existe. Pourtant, le résultat du Théorème 2.2.2 nous aide si la limite des dérivées existe. De plus, si les limites droite et gauche des dérivées existent et sont différentes, la fonction ne sera pas dérivable (car la limite droite et la limite gauche des taux d'accroissement seront différentes).

Pourtant, même si ces propriétés sont typiques des fonctions continues, il n'est pas vrai que la dérivée d'une fonction dérivable est continue, et on peut le voir de l'exemple suivant.

Exemple 2.2.2. Considérons la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable en tout point : elle est dérivable hors de 0 car composée et produit de fonctions dérivables, et pour vérifier la dérivabilité en 0 il suffit de calculer la limite des taux d'accroissement, en obtenant

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 1/x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin 1/x = 0,$$

où la dernière limite peut être calculée grâce à $-x \leq x \sin 1/x \leq x$. On a donc

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin 1/x + \cos 1/x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On peut vérifier que cette expression n'est pas continue en $x = 0$, car il n'existe pas la limite $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin 1/x + \cos 1/x$, le premier terme convergeant à zéro, mais le deuxième n'ayant pas de limite.

En vue des exemples ci-dessus, il est naturel introduire la notion de fonctions C^k , c'est-à-dire les fonction dérivables avec continuité k fois. Qu'est-ce qu'il signifie? une fonction C^1 est une fonction qui est dérivable et telle que sa dérivée est une fonction continue. Une fonction C^2 est une fonction telle qu'on puisse faire cette opération deux fois, c'est à dire que elle est dérivable et sa dérivée est non seulement continue, mais dérivable aussi avec dérivée continue. On dit aussi C^0 a propos des fonctions continue. On peut résumer par récurrence tout ça en cette définition.

Définition 2.2.1. On dit qu'une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est $C^0(A)$ si elle est continue. Pour tout $k \geq 1$ on dit qu'une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est $C^k(A)$ si elle est dérivable et la fonction f' est $C^{k-1}(A)$.

Il n'est pas difficile établir le suivant :

Théorème 2.2.3. Soit $k \geq 1$. Si f et g sont deux fonctions $C^k(A)$ alors $f + g$, fg sont aussi $C^k(A)$, ainsi que $1/f$ si en plus $f \neq 0$ sur A . Si g est une fonction $C^k(f(A))$ (C^k sur l'ensemble $f(A)$, qui est un intervalle si A est un intervalle) alors $g \circ f \in C^k(A)$. Si en plus $f' \neq 0$ sur A alors f^{-1} est $C^k(f(A))$ (f^{-1} existe car $f' \neq 0$ et donc, grâce au théorème de Darboux, f' est soit toujours positive soit toujours négative, donc f est strictement monotone et donc inversible).

Démonstration. Il suffit de tout démontrer par récurrence. On sait que le résultat est vrai pour $k = 1$. Maintenant on le suppose vrai pour $k = n$ et on le montre pour $k = n + 1$. Prenons $f, g \in C^{n+1}(A)$ (donc $f', g' \in C^n(A)$) et considérons la somme et le produit. Comme on veut montrer que $f + g$, fg et $1/f$ appartiennent à $C^{n+1}(A)$ il nous suffit de montrer que leurs dérivées appartiennent à $C^n(A)$. Les dérivées qu'on regarde sont $f' + g'$, $fg' + f'g$ et $-f'/f^2$ qui sont obtenues comme sommes, produits et ratios de fonctions C^n . Donc, comme le résultat est supposé vrai pour $k = n$, on en déduit que $f' + g'$, $fg' + f'g$ et $-f'/f^2$ sont C^n et donc $f + g$ et fg sont C^{n+1} .

L'idée est la même en ce qui concerne la composition : prenons $f \in C^{n+1}(A)$ et $g \in C^{n+1}(f(A))$. La dérivée de la composée $g \circ f$ est donnée par $g' \circ f \cdot f'$ qui est un produit d'une fonction $C^n(A)$ (la fonction f' , par hypothèse sur f) et d'une fonction qui est la composition de deux fonctions C^n . en appliquant le résultat dans le cas $k = n$ on trouve que $(g \circ f)'$ est C^n et donc $g \circ f$ est C^{n+1} .

Pour terminer il reste le cas de l'inverse. Si $f \in C^{n+1}(A)$ on calcule $(f^{-1})'$. On a $1/(f' \circ f^{-1})$. La fonction $f' \circ f^{-1}$ est la composition de deux fonctions C^n et est donc C^n . Là aussi on a montré, en utilisant les résultats pour $k = n$, que f^{-1} est C^{n+1} . \square

Observation 2.2.3. On peut dire qu'une fonction est continue en un point x_0 , on peut dire qu'elle est dérivable en ce point, mais si l'on dit qu'elle est C^1 en x_0 alors on veut en fait dire qu'elle est au moins dérivable hors de x_0 aussi et que sa dérivée est continue en x_0 . Pareillement, dire qu'une fonction est C^k en un point donné implique parler de ses dérivées hors de x_0 aussi.

Sous le côté notations, on appelle dérivée seconde d'une fonction f , et on la note par f'' , la dérivée de sa dérivée ($f'' = (f')'$) et plus en général on parle de dérivée k -ième. On écrit en général f, f', f'', f''' mais après on utilise la notation $f^{(k)}$ pour la dérivée k -ième.

Quand on parle de combien de fois une fonction est dérivable avec continuité on appelle ça le degré de régularité de cette fonction. Une fonction est usuellement dite régulière si elle est suffisamment dérivable pour ce qu'on veut y faire avec. Parfois on dit régulière pour dire C^∞ , ce qui est introduit dans la définition suivante.

Définition 2.2.2. Une fonction f est dite $C^\infty(A)$ si $f \in C^k(A)$ pour tout $k \geq 0$.

2.3 Formule de Taylor et développements limités

On considère ici une fonction f suffisamment régulière sur A et on donne des formules de développement beaucoup plus fines de celles qu'on a donné avant. Il s'agit en général d'approcher une fonction f par des fonctions polynomiales, en utilisant les valeurs de f et de ses dérivées dans un point donné. Ce genre de développement est connu comme développement de Taylor. On présente ici deux différentes formules, qui donnent le même résultat (le même polynôme) mais l'expression du reste est différente (et les hypothèses de régularité aussi). On donnera plus tard une définition plus générale de qu'est-ce que c'est qu'un développement limité (ou DL, en général il s'agit de remplacer une fonction par un nombre limité d'expressions plus faciles, des monômes) et on verra que les développements de Taylor sont des DL.

On commence par le premier, le développement de Taylor-Lagrange.

Théorème 2.3.1. *Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $C^n(A)$ qui admet dérivées $n + 1$ -ième en tout point de A et x_0 un point à l'intérieur de A . Alors pour tout $x \in A$ il existe un point ξ entre x_0 et x (c'est-à-dire $\xi \in]x_0, x[$ si $x_0 < x$ ou $\xi \in]x, x_0[$ si $x < x_0$) tel que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

Démonstration. La démonstration qu'on va voir est un exemple de démonstration magique où l'on arrive à la thèse en considérant des fonctions qui n'ont pas grande chose à voir et en leur appliquant d'autres théorèmes, jusqu'à en obtenir une formule qui, apparemment par hasard, est utilisable dans le cadre qui nous intéresse. Dans ce cas on considérera la fonction

$$\phi(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - A \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où A est une constante à choisir pour faire en sorte d'avoir $\phi(x) = \phi(x_0)$ et appliquer le théorème de Rolle à ϕ sur l'intervalle $[x_0, x]$.

Remarquons d'abord que $\phi(x) = 0$ et $\phi(x_0) = R - A(x-x_0)^{n+1}/(n+1)!$, où R est le reste du développement de Taylor, c'est-à-dire

$$R = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0).$$

Notre but sera exactement de montrer $R = f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}/(n+1)!$ pour un ξ entre x et x_0 .

Supposons maintenant qu'on ait choisi A de façon à avoir $\phi(x_0) = 0$, c'est-à-dire

$$R = A \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (2.2)$$

On peut bien appliquer le théorème de Rolle à la fonction ϕ car elle est continue et dérivable partout à l'intérieur de l'intervalle $[x_0, x]$ par conséquence du fait que $f \in C^n(A)$ (donc toutes les fonctions qui apparaissent dans la définition de ϕ sont continues) et que $f^{(n)}$ est dérivable (et donc toutes les fonctions qui apparaissent sont dérivables aussi).

Si l'on calcule la dérivée de ϕ on trouve un effet télescopique :

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= -f'(t) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + A \frac{(x-t)^n}{(n)!} \\ &= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + A \frac{(x-t)^n}{(n)!}. \end{aligned}$$

Le théorème de Rolle nous dit qu'il existe un point ξ dans l'intervalle entre x_0 et x avec $\phi'(\xi) = 0$. Ceci implique, grâce à la formule pour ϕ' , qu'on a $f^{(n+1)}(\xi) = A$.

En remplaçant A par $f^{(n+1)}(\xi)$ dans (2.2), on trouve justement

$$R = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

ce qui était notre but. □

Comme dans le cas des accroissements finis, on peut obtenir un autre développement, plus puissant sous le point de vue hypothèses de régularité-dégré du développement, mais dont le reste a une formulation moins explicite.

Théorème 2.3.2. *Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $C^{n-1}(A)$ qui admet une dérivée n -ième au point $x_0 \in A$. Alors on a*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Démonstration. Dans cette démonstration on va par contre voir une autre technique de preuve très typique, et notamment celle de démonstration par récurrence. On remarque que si $n = 1$ le théorème dit seulement que toute fonction dérivable admet le développement $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$. Ceci descend directement de la définition de dérivée. Or, supposons le théorème vrai pour un certain rang n et démontrons-le pour $n + 1$. Prenons f qui satisfait les hypothèses de régularité du théorème avec $n + 1$: il est évident que alors f' satisfait les hypothèses du théorème avec n . Appliquons donc le résultat à f' : on trouve

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^n). \quad (2.3)$$

On écrit $R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ et on remarque que (2.3) peut s'écrire sous la forme

$$R'(x) = \varepsilon(x)(x - x_0)^n,$$

ε étant une fonction qui tend vers zéro lorsque $x \rightarrow x_0$. Ceci signifie que pour tout $\eta > 0$ il existe $\delta > 0$ tel qu'on a

$$|R'(x)| < \eta |x - x_0|^n \quad \text{pour tout } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

L'énoncé du théorème revient à montrer $R(x) = o((x - x_0)^{n+1})$. Pour cela on remarque $R(0) = 0$ et on écrit

$$|R(x)| = |R'(\xi)| |x - x_0| \leq \eta |\xi - x_0|^n |x - x_0| \leq \eta |x - x_0|^{n+1},$$

où l'inégalité est valable si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, car dans ce cas là ξ aussi appartient au même intervalle. Ceci montre exactement

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0,$$

et donc $R(x) = o((x - x_0)^{n+1})$. □

Observation 2.3.1. Il faut remarquer que la formule de Taylor-Young devient beaucoup plus facile à démontrer, et on peut la déduire de celle de Taylor-Lagrange, si on met l'hypothèse $f \in C^n(A)$ (ce qui est deux fois plus restrictive : parce que l'on demande une dérivée n -ième partout, pas seulement en x_0 , et parce qu'on la veut continue).

En fait, il suffit d'écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n - 1$ et remarquer que $(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0))(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$.

Plus en général on appelle développement limité au point x_0 d'une fonction f à l'ordre n un polynôme P de degré n tel que $f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$. Ce qu'on vient de montrer est que, si la fonction f est C^n (C^{n-1} avec dérivées n -ièmes partout étant suffisant) alors il existe en tout point un développement limité et les coefficients du développement sont calculés d'après les valeurs des dérivées au point x_0 . Il se peut que d'autres fonctions, qui ne sont pas assez régulières, admettent quand même l'existence d'un développement limité d'ordre supérieur à ce que l'on aurait pu s'attendre.

En tout cas, si une fonction admet un développement limité, ce développement est unique parmi les polynômes du même degré.

Théorème 2.3.3. *Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui admet deux développements limités du même ordre n et au même point x_0 , de la forme*

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n) = Q(x) + o((x - x_0)^n),$$

avec $\deg P, \deg Q \leq n$. Alors $P = Q$.

Démonstration. On déduit facilement du fait que P et Q sont des développements limités d'une même fonction f que

$$P(x) - Q(x) = o((x - x_0)^n).$$

On sait bien que tout polynôme peut être écrit en terme de puissances de $x - x_0$ à la place des puissances de x (il suffit de vérifier que $1, x - x_0, (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^n$ forment une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à n , où de démontrer ce résultat par récurrence sur n). Donc $P - Q$ peut s'écrire sous la forme

$$P(x) - Q(x) = A(x - x_0)^k + \sum_{i=k+1}^n A_i(x - x_0)^i,$$

pour un coefficient $A \neq 0$ (en choisissant pour k le premier degré avec coefficient non nul dans cette décomposition : si ce degré n'existe pas c'est par ce que $P - Q$ est le polynôme nul, et dans ce cas là on a obtenu $P = Q$). Donc on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0)^k + \sum_{i=k+1}^n A_i(x - x_0)^i}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Pourtant, dans cette limite, la seule partie qui compte est

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0)^k}{(x - x_0)^n},$$

ce qui donne comme résultat soit $\pm\infty$ si $k < n$ soit A si $k = n$. Comme cette limite ne donne jamais zéro, on a une contradiction et donc $P = Q$. \square

Ce résultat d'unicité des DL a plusieurs conséquences. Une première conséquence que l'on voit concerne les fonctions paires et impaires.

Proposition 2.3.4. *Soit $A =] - a, a[$ un ouvert symétrique de \mathbb{R} qui inclut 0. Supposons que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ soit paire (c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in A$). Alors tout développement limité de f en zéro est paire aussi (et donc toute puissance d'exposant impaire a coefficient nul).*

Si par contre on suppose que f soit impaire (c'est-à-dire $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in A$) on peut dire alors que ses développements sont impaires aussi.

Démonstration. Soit P un polynôme de degré n tel que $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et f paire. On a donc

$$f(x) = f(-x) = P(-x) + o((-x)^n) = P(-x) + o(x^n).$$

Le polynôme $x \mapsto P(-x)$ est donc un autre DL du même ordre de f autour de zéro. Par conséquent $P(x) = P(-x)$ et donc P est paire.

Si f est impaire on obtient

$$f(x) = -f(-x) = -P(-x) - o((-x)^n) = -P(-x) + o(x^n),$$

d'où l'on tire $P(x) = -P(-x)$. □

2.4 Exemples et applications

On va se rendre compte que l'unicité du DL est à la base de toute méthode de calcul du DL différente de la simple dérivation itérée. On en donnera tout de suite un exemple, mais cet exemple sera précédé par quelques définitions concernant l'équivalence et la négligeabilité des fonctions tendant vers zéro.

Définition 2.4.1. Soient $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage du point $x_0 \in A$ et telles que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

on dit alors que f et g sont équivalentes si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

et on dit que f est négligeable devant g si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Si f est équivalente à g on écrit $f(x) = O(g(x))$ et si f est négligeable devant g on écrit $f(x) = o(g(x))$. La relation d'équivalence étant une relation d'équivalence, elle est symétrique et donc $f(x) = O(g(x))$ équivaut à $g(x) = O(f(x))$.

Observation 2.4.1. On dit parfois que deux fonctions sont équivalentes en utilisant une définition beaucoup plus stricte, c'est-à-dire que la limite fasse 1 à la place de n'importe quel nombre fini et non nul. Aussi, on a parfois envie d'étendre cette définition au cas où la limite n'existe pas : dans ce cas là on dit que les deux fonctions sont équivalentes si le quotient est localement borné entre deux constantes c et C avec $0 < c < C < +\infty$ (ou $0 > c > C > -\infty$).

Non seulement, souvent par abus de notation on dit $f(x) = O(g(x))$ pour dire “ f est au pire de l'ordre de g ”, c'est-à-dire “soit $f(x) = O(g(x))$, soit $f(x) = o(g(x))$ ”. C'est un peu comme quand on dit “dénombrable” pour dire “soit dénombrable soit fini”.

On connaît bien par exemple les limites suivantes, qu'on peut démontrer par voie de considérations géométriques et de manipulations algébriques :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

ce qui nous donne les équivalences entre $\sin x$ et x et entre $1 - \cos x$ et x^2 au voisinage de 0.

Ce qui nous intéresse en vue des DL est le suivant :

Observation 2.4.2. Si f et g sont équivalentes au voisinage d'un certain point x_0 , les écritures $o(f(x))$ et $o(g(x))$ (eu voisinage du même point x_0) coïncident.

2.4.1 Calculs de DL et de limites

En utilisant tout ça, on peut voir les exemples suivants.

Exemple 2.4.1. Considérons la fonction

$$f(x) = \sin(2 \sin(x/2))$$

et cherchons-en le DL jusqu'à l'ordre 4 en 0. On commence par le sinus à l'extérieur et on se souvient du DL $\sin y = y - y^3/3 + o(y^4)$. On va choisir après $y = 2 \sin(x/2)$. Pourquoi? pour réaliser la situation de la fonction qu'on veut développer. Pourquoi a-t-on pris le DL du sinus jusqu'à l'ordre 4? car le y qu'on va utiliser sera équivalent à x et donc si l'on cherche un reste $o(x^4)$ on veut un reste du genre $o(y^4)$. On a donc

$$\sin(2 \sin(x/2)) = 2 \sin(x/2) - \frac{1}{3} (2 \sin(x/2))^3 + o((2 \sin(x/2))^4).$$

On peut remplacer $o((2 \sin(x/2))^4)$ par $o(x^4)$ et les expressions avant par leurs DL. Celui de $2 \sin(x/2)$ est facile, mais pour le développement de son cube il y a plusieurs manières de procéder. On pourrait développer le sinus jusqu'à l'ordre 4 et puis en prendre le cube. Ceci va marcher sûrement : il est toujours suffisant de développer les fonctions qu'on a au dedans jusqu'au même ordre qu'on souhaite réaliser pour la fonction composée. Pourtant, on peut faire mieux. Dans l'expression

$$(2 \sin(x/2))^3 = (2 \sin(x/2)) \cdot (2 \sin(x/2)) \cdot (2 \sin(x/2)) = (x + o(x^2)) \cdot (x + o(x^2)) \cdot (x + o(x^2))$$

on a un produit avec un terme x^3 et d'autres termes qui ont au moins deux fois x et une fois $o(x^2)$. Comme $x \cdot x \cdot o(x^2) = o(x^4)$, tous ces termes peuvent être négligés dans notre développement et mis ensemble au $o(x^4)$ à la fin. On a donc

$$f(x) = \sin(2 \sin(x/2)) = x - \frac{2}{6} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^4) - \frac{1}{6}x + o(x^4) = x - \frac{5}{24}x^3 + o(x^4).$$

Exemple 2.4.2. Considérons la fonction

$$f(x) = \ln(\cos x + x^3)$$

et cherchons-en le DL jusqu'à l'ordre 5 en 0. On écrit ça comme

$$f(x) = \ln(1 + (\cos x + x^3 - 1)) = \ln(1 + y) \quad \text{avec } y = g(x) = \cos x + x^3 - 1.$$

Comme ça on a une fonction g telle que $g(0) = 0$ et on la compose avec la fonction $\ln(1 + y)$, dont on connaît bien le développement, et notamment on a

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3) = y - \frac{y^2}{2} + O(y^3).$$

On utilisera la dernière version. Pourquoi s'arrê-t-on au reste $O(y^3)$? Car c'est la fonction g qui sera de l'ordre de x^2 , et précisément

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

On a donc $g(x) = O(x^2)$ (pour calculer la puissance dont une fonction donnée est grand O il suffit de trouver le développement de Taylor et après regarder le premier terme non nul). Or, si $y = g(x) = O(x^2)$, on a $O(y^3) = O(x^6) = o(x^5)$. Il suffit donc de s'arrêter à ce développement là dans le logarithme. Évidemment pour choisir l'ordre où s'arrêter dans la fonction à l'extérieur il faut regarder l'ordre d'équivalence de la fonction à l'intérieur de la composition. En général il

est quand même toujours suffisant développer la fonction à l'extérieur aussi jusqu'à l'ordre final souhaité (dans ce cas, 5), mais parfois on peut économiser des calculs. Pareil pour la fonction à l'intérieur : il est toujours suffisant d'arriver jusqu'à l'ordre souhaité, mais parfois on peut faire mieux. Notamment, si dans le développement de la fonction à l'extérieur il y a une partie y (comme dans ce là), on y peut rien faire : on est forcé à développer jusqu'au but car de toute façon on devra copier le développement de $y = g(x)$ dans le résultat final. Si par contre on commence par y^2 et on est dans le cas $g(0) = 0$ (donc g commence par x) on se retrouvera toujours à calculer des termes au moins $g^2(x)$ avec g qui commence par x : chaque terme de g sera multiplié dans le carré par x au moins et on peut donc s'arrêter un ordre avant. C'est un peu ce qu'on va voir pour calculer $g^2(x)$ et son développement dans ce cas-ci. On a

$$g^2(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^2.$$

On commence à multiplier chaque terme fois tous les autres mais on néglige tout terme qui dépasse l'ordre 5 (par exemple x^3 fois x^3 ou x^4 fois x^2 ou les petits o). On obtient

$$g^2(x) = \frac{x^4}{4} - x^5 + o(x^5)$$

et on s'aperçoit aussi que les termes en x^4 et $o(x^5)$ n'ont joué aucun rôle (car, en étant obligé de les multiplier toujours fois x^2 au moins, on dépassait sûrement l'ordre 5). Plus en général, si je dois calculer le DL à l'ordre n d'un produit du genre $g_1(x)g_2(x)$ avec $g_1(x) = O(x^k)$ et $g_2(x) = O(x^h)$ on peut se contenter de développer g_1 jusqu'à l'ordre $n - h$ (car on multipliera toujours fois x^h au moins) et g_2 jusqu'à $n - k$ (car on multipliera toujours fois x^k au moins). Quand on met tout ça ensemble on obtient

$$f(x) = \ln(\cos x + x^3) = -\frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} - x^5 + o(x^5) \right) = -\frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{2} + o(x^5).$$

Un autre exemple intéressant est le suivant.

Exemple 2.4.3. Considérons la fonction

$$f(x) = \tan x$$

et cherchons-en le DL jusqu'à l'ordre 3 en 0. Mais on veut le trouver rapidement, et sans regarder les tableaux de développements connus. Cependant, on admet de connaître les développements du sinus et du cosinus, qui sont plus simples à s'en souvenir. Non seulement, on admet l'existence du DL à l'ordre 3 de la tangente, car on sait qu'elle est une fonction $C^\infty]-\pi/2, \pi/2[$.

On écrit donc $\tan x \cos x = \sin x$. On suppose $\tan x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3)$. Écrire les trois développements à l'ordre 3 donnera quatre équations qui permettront de déduire les valeurs des constantes inconnues A , B , C et D . Cependant, faut pas exagérer : on sait bien que A vaut 0 car le premier terme du DL en un point x_0 est toujours la valeur $f(x_0)$ et dans ce cas là on $\tan 0 = 0$. En plus, on connaît la valeur de B aussi, car le coefficient du terme linéaire coïncide toujours avec $f'(x_0)$. Ceci peut être vu en écrivant le développement (2.1) et en utilisant l'unicité du DL. Et comme on sait calculer la dérivée de la tangente en 0 est elle vaut 1, on a

$$\left(x + Cx^2 + Dx^3 + o(x^3) \right) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \right) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

En développant les produits (et en négligeant les termes en $o(x^3)$) on trouve

$$x + Cx^2 + Dx^3 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

Ceci signifie que la même fonction, le sinus, admet deux développements limités en 0, et donc ils coïncident. Ceci implique $C = 0$ et $D - 1/2 = -1/6$, ce qui donne $C = 1/3$. On a donc

$$\tan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

On peut voir ce qu'il se passe avec les fonctions réciproques.

Exemple 2.4.4. Cherchons les DL jusqu'à l'ordre 3 des fonctions $f(x) = \arcsin x$ et $g(x) = \arctan x$. On sait $\sin(\arcsin x) = x$. Prenons les DL limités à l'ordre 3 de toute expression. Évidemment on ne connaît pas encore celui de l'arcsinus, mais on peut savoir qu'il est de la forme $x + Ax^3 + o(x^3)$. Ceci on le sait car la fonction arcsinus vaut zéro en zéro, sa dérivée vaut 1, et il s'agit d'une fonction impaire (donc il n'y a pas de partie de degré 2). On a donc

$$\begin{aligned} \arcsin x - \frac{1}{6}(\arcsin x)^3 + o((\arcsin x)^3) &= x \\ x + Ax^3 + o(x^3) - \frac{1}{6}(x + Ax^3 + o(x^3))^3 + o((\arcsin x)^3) &= x. \end{aligned}$$

Grâce au fait que $\arcsin x$ est équivalent à x au voisinage de 0 (ce qui est une conséquence du fait que la fonction vaut zéro en zéro mais sa dérivée non), on peut remplacer le $o((\arcsin x)^3)$ par $o(x^3)$. En plus, en développant et en négligeant les termes d'ordre trop élevé, on obtient

$$x + Ax^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = x,$$

d'où l'on tire $A = 1/6$.

De manière toute à fait équivalente on suppose $\arctan x = x + Bx^3 + o(x^3)$ et on trouve $B = -1/3$.

On applique tout ça au calcul d'une limite.

Exemple 2.4.5. On veut calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \arctan x}{\sin x - \arcsin x}.$$

On remarque que dénominateur et numérateur, les deux, valent 0 et qu'on a donc une condition d'indétermination 0/0. Ceci correspond à faire un développement à l'ordre 0, c'est-à-dire à ne regarder que les valeurs des fonctions, mais nous on peut faire mieux. On regarde le développement à l'ordre 1 et là aussi on voit que, comme toutes les fonctions $\tan x$, $\arctan x$, $\sin x$, $\arcsin x$ sont de la forme $x + o(x)$, on tombe encore sur une expression qui ne nous aide pas. On a en effet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{o(x)},$$

ce qu'on n'est pas capables de traiter car en ce qui concerne $o(x)$ on sait seulement $\lim_{x \rightarrow 0} o(x)/x = 0$ mais on ne sait pas diviser un $o(x)$ par un autre. Il faut donc continuer avec les développements jusqu'à un résultat meilleur. On le trouve à l'ordre 3, où l'on a

$$\frac{\tan x - \arctan x}{\sin x - \arcsin x} = \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}.$$

Maintenant on peut calculer les limites des nouveaux dénominateur et numérateur séparément et on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \arctan x}{\sin x - \arcsin x} = -2.$$

En général on développe séparément dénominateur et numérateur jusqu'au premier ordre qui ne donne pas un résultat banal (ici, l'ordre 3). Après on regarde les exposants qu'on a obtenus : par exemple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + o(x^5)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{1 + \frac{o(x^5)}{x^5}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = 0,$$

alors que, avec la même méthode (toujours diviser par la puissance qui apparaît dans chaque terme de la fraction) on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^5 + o(x^5)} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^4 + o(x^4)} = \pm\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Ax^n + o(x^n)}{Bx^n + o(x^n)} = \frac{A}{B}.$$

2.4.2 Minima, maxima et DL

Les calculs des limites ne sont pas les seules applications possibles et intéressantes des DL. Les développements limités sont aussi très importants en vue de la détection des points des minima et maxima locaux. On a en fait le théorème suivant, qu'on donne dans le cas d'une fonction C^∞ .

Théorème 2.4.1. *Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $C^\infty(]a, b[)$ et $x_0 \in]a, b[$. Soit $n = \min\{k \geq 1 : f^{(k)}(x_0) \neq 0\}$. alors :*

- si n est impaire x_0 n'est ni un minimum local ni un maximum local;
- si n est paire et $f^{(n)}(x_0) > 0$ alors x_0 est un point de minimum local;
- si n est paire et $f^{(n)}(x_0) < 0$ alors x_0 est un point de maximum local.

Démonstration. Grâce au développement de Taylor on a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

et donc

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} \right).$$

Le signe à droite est donné par le signe de $(x - x_0)^n$ fois le signe de la parenthèse, qui ne dépend localement que du signe de $f^{(n)}(x_0)$, car $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} o((x - x_0)^n)/(x - x_0)^n = 0$.

Dans le cas n impair le signe du premier facteur varie selon la position de x par rapport à x_0 alors que l'autre ne varie pas. Par conséquent, au voisinage de x_0 , la quantité $f(x) - f(x_0)$ est d'un côté positive et de l'autre négative, ce qui implique que x_0 ne peut être ni un point de minimum local (car dans ce cas là on aurait eu $f(x) - f(x_0) \geq 0$), ni de maximum local (car on aurait eu $f(x) - f(x_0) \leq 0$).

Dans le cas n pair, par contre, le premier facteur est e tout cas positif. Ceci implique que $f(x) - f(x_0)$ a le même signe de la parenthèse, et donc on a un minimum ($f(x) - f(x_0) \geq 0$) dans le cas $f^{(n)}(x_0) > 0$ et un maximum ($f(x) - f(x_0) \leq 0$) dans le cas $f^{(n)}(x_0) < 0$. \square

Dans ce théorème on n'a pas supposé $\{k \geq 1 : f^{(k)}(x_0) \neq 0\} \neq \emptyset$ simplement car l'énoncé même du théorème portait sur n , son minimum : si cet ensemble est vide alors n n'existe pas et donc il n'y a rien à démontrer. Il y a aussi un vice-versa un peu plus faible. cette version porte directement sur x_0 et déduit quelque chose sur n , et c'est pour ça qu'on suppose, pour clarifier, que n existe (c'est -à-dire que l'ensemble dont on prend le minimum soit non vide).

Théorème 2.4.2. *Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $C^\infty(]a, b[)$ et $x_0 \in]a, b[$. Supposons $\{k \geq 1 : f^{(k)}(x_0) \neq 0\} \neq \emptyset$ et soit $n = \min\{k \geq 1 : f^{(k)}(x_0) \neq 0\}$. Alors :*

- si x_0 est un point de minimum local alors n est paire x_0 et $f^{(n)}(x_0) > 0$;
- si x_0 est un point de maximum local alors n est paire x_0 et $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le théorème de tout à l'heure pour en déduire qu'il n'est pas possible que n soit impaire, ni que n soit paire mais que la dérivée ait le mauvais signe : dans ce cas là on aurait un point qui est au même temps maximum local et minimum local, mais cela implique que la fonction est localement constante, c'est à dire que toute dérivée s'annule en x_0 . Et cela est en contradiction avec les hypothèses. \square

Ces théorèmes correspondent un peu à ce qu'on a dans le cas de la dérivée première (si un point est un extremum local alors la dérivée vaut zéro, et cela peut s'étendre à toute dérivée d'ordre impair, dans un certain sens) et aux théorèmes bien connus sur la dérivée seconde (si elle est strictement positive le point réalise un minimum local, si le point réalise un minimum locale alors elle est ≥ 0 : ici l'inégalité est stricte mais reste quand même la possibilité que les dérivées s'annule toutes, ce qui correspond au cas d'égalité).

Or, dans notre intuition on ne connaît pas trop de fonctions qui ont toutes les dérivées nulles en un point donné et qui ne sont pas la fonction nulle. Par exemple on sait que cela ne peut pas être vrai pour un polynôme, car un polynôme coïncide avec son développement de Taylor (c'est-à-dire le DL d'ordre n d'un polynôme d'ordre n a reste nul, et cela peut être vérifié en utilisant l'unicité du DL). Pourtant, il y a l'exemple suivant.

Exemple 2.4.6. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Cette fonction est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour s'en rendre compte, on commence par voir que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ car $1/x \rightarrow +\infty$ et donc $e^{-1/x} \rightarrow e^{-\infty} = 0$. Ceci montre la continuité. Pour les dérivées, il suffit de calculer la dérivée à droite et on a

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = 0,$$

car cette dernière limite est une forme indéterminée $0/0$ mais le zéro du numérateur l'emporte sur celui du dénominateur grâce à son comportement exponentiel.

Plus en général, on peut montrer que la dérivée k -ième de f est de la forme

$$f^{(k)}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-1/x}$$

pour des polynômes P et Q (ceci peut être montré par récurrence). Par conséquent, on a toujours

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k)}(x) = 0,$$

ce qui montre au même temps que la fonction est C^k (car de l'autre côté toute dérivée est nulle, la fonction étant constante) et que $f^{(k)}(0) = 0$.

2.5 Fonctions convexes

On introduit dans cette section les fonctions convexes et on réliera ce concept à la forme de leur développement de Taylor, dans le cas de fonctions convexes régulières (disons, C^2).

Définition 2.5.1. Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si elle satisfait l'inégalité

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \text{pour tout } x, y \in A, t \in [0, 1].$$

Géométriquement cela signifie que le graphe de la fonction f entre les valeurs x et y des abscisses est toujours au dessous de celui du segment qui relie les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Sinon, on peut voir le point $(1-t)x + ty$ comme une moyenne (pondérée avec des poids différents, mais il s'agit de la moyenne usuelle si $t = 1/2$) entre x et y et la définition s'enonce comme "une fonction convexe est une fonction f telle que f de la moyenne est inférieure ou égale à la moyenne des f ".

Une propriété importante des fonctions convexes est la suivante, qui dit que les taux d'accroissements sont croissants.

Proposition 2.5.1. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x_1 < x_2 < x_3$ trois points de l'intervalle A . On a alors l'inégalité

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

De même, on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Démonstration. Considérons d'abord le point x_2 qui est au milieu entre x_1 et x_3 . Soit $a = x_2 - x_1$ et $b = x_3 - x_2$. On peut vérifier qu'on a

$$x_2 = \frac{b}{a+b}x_1 + \frac{a}{a+b}x_3$$

et, en prenant $t = a/(a+b)$ (ce qui donne $1-t = b/(a+b)$) dans la définition de convexité, on a

$$f(x_2) \leq \frac{b}{a+b}f(x_1) + \frac{a}{a+b}f(x_3),$$

d'où

$$\frac{b}{a+b}f(x_2) - \frac{b}{a+b}f(x_1) \leq \frac{a}{a+b}f(x_3) - \frac{a}{a+b}f(x_2).$$

Cette inégalité donne

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Cela nous dit que le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 est inférieur à celui entre x_2 et x_3 .

On note maintenant $\delta_{i,j}$ le taux d'accroissement $(f(x_i) - f(x_j))/(x_i - x_j)$: on a sûrement

$$f(x_3) - f(x_1) = a\delta_{1,2} + b\delta_{2,3},$$

d'où

$$\delta_{1,3} = \frac{a}{a+b}\delta_{1,2} + \frac{b}{a+b}\delta_{2,3}.$$

De cela, comme on sait déjà $\delta_{1,2} \leq \delta_{2,3}$, on tire $\delta_{1,2} \leq \delta_{1,3} \leq \delta_{2,3}$ (car la moyenne entre $\delta_{1,2}$ et $\delta_{2,3}$ qu'on a est forcément incluse entre le plus petit des deux taux et le plus grand). \square

La chose peut se généraliser à tout couple d'intervalles "l'un plus à droite que l'autre".

Proposition 2.5.2. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $[x_1, x_2]$ et $[x_3, x_4]$ deux intervalles inclus dans A , avec $x_1 \leq x_3$ et $x_2 \leq x_4$. On a alors l'inégalité

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}.$$

Démonstration. Si $x_1 = x_3$ ou $x_2 = x_4$ on se retrouve dans le cas de toute à l'heure, c'est-à-dire celui où les deux intervalles ont le même point de départ ou le même point d'arrivée (deuxième partie de la Proposition 2.5.1) et la thèse est prouvée. Si $x_1 < x_3$ et $x_2 < x_4$ il y a encore trois cas : soit $x_2 < x_3$, et alors les deux intervalles sont complètement l'un à droite de l'autre, soit $x_3 < x_2$, et alors ils se superposent, soit $x_2 = x_3$ et ils se touchent. Ce dernier cas est réglé encore par la Proposition 2.5.1 (première partie) qui nous donne l'inégalité pour deux intervalles consécutifs. Dans le premier cas par contre on a, en appliquant plusieurs fois la même proposition, $\delta_{1,2} \leq \delta_{2,3} \leq \delta_{3,4}$, qui nous donne $\delta_{1,2} \leq \delta_{3,4}$.

Le seul cas qui reste est celui de superposition : dans ce cas on dit $\delta_{1,2} \leq \delta_{3,2} \leq \delta_{3,4}$ par application successive de la deuxième partie de la Proposition 2.5.1. \square

Cela a plusieurs conséquences

Proposition 2.5.3. *Une fonction convexe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet toujours une dérivée droite et une dérivée gauche en tout point $x_0 \in]a, b[$. De plus, si on écrit f'_g et f'_d pour la dérivée gauche et la dérivée droite, on a $f'_g(x) \leq f'_d(x)$ pour tout $x \in]a, b[$ et, si $x_1 < x_2$, on a $f'_g(x_1) \leq f'_d(x_1) \leq f'_g(x_2) \leq f'_d(x_2)$.*

Démonstration. La dérivée droite de f au point x_0 est définie comme étant

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

mais on vient de montrer que cette quantité dont on prend la limite est monotone. Par conséquent sa limite existe, et elle finie car tout taux d'accroissement en x_0 est borné par

$$c = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}.$$

Donc la fonction admet une dérivée à droite et la dérivée à gauche peut être traitée de la même manière.

Pour démontrer que la dérivée gauche est inférieure à la dérivée droite, il suffit d'appliquer la Proposition 2.5.1 aux points $x - h, x$ et $x + h$ et obtenir

$$\frac{f(x) - f(x - h)}{h} \leq \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

En passant à la limite pour $h \rightarrow 0$ on obtient l'inégalité cherchée.

Pour la dernière inégalité qu'on veut montrer, il suffit de prouver que $f'_d(x_1) \leq f'_g(x_2)$. Pour cela on appliquera la Proposition 2.5.2 aux intervalles $[x_1, x_1 + h]$ et $[x_2 - h, x_2]$, qui satisfont les hypothèses de la proposition si h est suffisamment petit. On obtient alors

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leq \frac{f(x_2 - h) - f(x_2)}{h}.$$

En passant à la limite pour $h < 0$ on trouve l'inégalité cherchée. \square

Proposition 2.5.4. *Une fonction convexe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est toujours localement Lipschitzienne sur $]a, b[$ (c'est-à-dire : pour tout sous-intervalle fermé $[c, d] \subset]a, b[$ il existe une constante de Lipschitz valable sur cet intervalle ; cependant, cette constante dépende de l'intervalle $[c, d]$ est il se pourrait que sa valeur explose dès que c approche a ou d approche b). En particulier, f est continue sur $]a, b[$.*

Démonstration. Grâce à la Proposition 2.5.1, dès que $x, y \in [c, d]$, on sait

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(d) - f(b)}{d - b}.$$

Ceci implique

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \max \left\{ \frac{|f(c) - f(a)|}{|c - a|}, \frac{|f(d) - f(b)|}{|d - b|} \right\},$$

et le max à droite est justement une constante de Lipschitz sur l'intervalle $[c, d]$. \square

Proposition 2.5.5. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a, b[$: les deux faits suivants sont équivalents :*

- f' est croissante ;
- f est convexe.

Soit $f \in C^2([a, b])$: les deux faits suivants sont équivalents :

- $f'' \geq 0$;
- f est convexe.

Démonstration. Montrons que f' croissante entraîne la convexité. Soient $x_0, x_1 \in [a, b]$ et $t \in [0, 1]$: on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f entre x_0 et $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ et entre $(1-t)x_0 + tx_1$ et x_1 . On trouve, pour des points $\xi \in [x_0, x_t]$ et $\eta \in [x_t, x_1]$,

$$\begin{aligned} f(x_t) &= f(x_0) + t(x_1 - x_0)f'(\xi), \quad \text{et } f(x_1) = f(x_t) + (1-t)(x_1 - x_0)f'(\eta) \\ &= f(x_0) + t(x_1 - x_0)f'(\xi) + (1-t)(x_1 - x_0)f'(\eta). \end{aligned}$$

Pour vérifier la convexité il suffit donc de vérifier si l'inégalité

$$f(x_0) + t(x_1 - x_0)f'(\xi) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) + t[t(x_1 - x_0)f'(\xi) + (1-t)(x_1 - x_0)f'(\eta)]$$

est vérifiée. Cette inégalité équivaut à

$$f'(\xi) \leq tf'(\xi) + (1-t)f'(\eta),$$

ce qui est vrai grâce à $f'(\xi) \leq f'(\eta)$.

Pour montrer l'autre implication il suffit de remarquer que la convexité, grâce à la Proposition 2.5.1, implique que la dérivée, si jamais elle existe, est croissante.

La proposition concernant les fonctions C^2 est démontrable rapidement dès que l'on s'aperçoit que la condition $f'' \geq 0$ est équivalente à f' croissante. \square

Pour une fonction convexe C^2 il est intéressant de regarder son développement limité à l'ordre 2. Pour tout x et x_0 , en effet, on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

pour un point ξ entre x et x_0 . Or, f étant convexe, la valeur $f''(\xi)$ est sûrement positive, quoi que ce soit ξ , et on a donc

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ceci signifie que la fonction est toujours en dessus de ses tangentes. En particulier si un point x_0 a dérivée nulle alors il est forcément un point de minimum, car $f'(x_0) = 0$ nous permettrait de dire $f(x) \geq f(x_0)$. Ceci a l'importante conséquence que pour une fonction convexe être un point de minimum et être un point où la dérivée s'annule sont des fait équivalents. On peut préciser cela même dans le cas de fonctions convexes non C^2 .

On a besoin d'abord du lemme suivant.

Lemme 2.5.6. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe dérivable au point $x_0 \in]a, b[$ alors elle satisfait l'inégalité*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pour tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. Il faut démontrer cette inégalité sans passer par le développement à l'ordre 2 (car f n'admet pas forcément un développement de ce genre). Considérons un point $x > x_0$ et une valeur positive h telle que $x_0 + h < x$. On a alors, grâce aux taux d'accroissements qui sont croissants,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En passant à la limite pour $h \rightarrow 0$ on trouve

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et, comme $x - x_0 > 0$, on trouve enfin

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ceci est vrai pour $x > x_0$. Pour $x < x_0$ on peut prendre une valeur négative $h > x - x_0$ et regarder les taux d'accroissements sur $[x, x_0]$ et $[x_0 + h, x_0]$ en obtenant

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En passant à la limite on trouve

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

qui cette fois donne encore $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ car $x - x_0 < 0$.

L'inégalité est donc démontrée pour tout x (le cas $x = x_0$ est trivial). \square

.

Observation 2.5.1. On peut voir de la preuve que, si f n'est pas dérivable en x_0 , on peut quand même obtenir quelque chose avec les dérivées droites et gauches. En particulier on a facilement

$$f(x) \geq f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0) \text{ pour tout } x > x_0 \text{ et } f(x) \leq f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0) \text{ pour tout } x < x_0.$$

De plus, si l'on utilise $f_d \geq f_g$, on voit que $f(x) \geq f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$ entraîne $f(x) \geq f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$ pour $x > x_0$ et que donc l'inégalité avec la dérivée gauche est toujours vraie. Pareillement, celle avec f'_d s'étend aux $x < x_0$.

Pour ceux qui doutent que la dérivée gauche d'une fonction convexe est toujours inférieure ou égale à la dérivée droite : prenez $h > 0$ et comparez les taux d'accroissement sur $[x_0 - h, x_0]$ et $[x_0, x_0 + h]$: on obtient, grâce à la monotonie de ces taux

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Passer à la limite pour $h \rightarrow 0$ donne $f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$!

Observation 2.5.2. Une autre remarque intéressante est la suivante : si f est dérivable en x_0 (qui doit être un point à l'intérieur de l'intervalle) et f admet une inégalité du type $f(x) \geq f(x_0) + A(x - x_0)$ alors, forcément, $A = f'(x_0)$. Ceci se voit en divisant l'inégalité par $x - x_0$: pour $x > x_0$ on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq A$$

et, à la limite, $f'(x_0) \geq A$, et, pour $x < x_0$ on a l'inégalité opposée. Si f n'était pas dérivable en x_0 on aurait eu $A \in [f'_g(x_0), f'_d(x_0)]$.

Proposition 2.5.7. *Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable en tout point de A . Si $x_0 \in A$ est un point tel que $f'(x_0) = 0$ alors x_0 est un point de minimum.*

Par conséquent, pour tout point x_0 à l'intérieur de A la condition $f'(x_0) = 0$ est équivalente à la condition $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in A\}$.

Démonstration. Que $f'(x_0) = 0$ implique la minimalité de x_0 est une conséquence de l'inégalité du Lemme 2.5.6, qui dans le cas $f'(x_0) = 0$ donne $f(x) \geq f(x_0)$. L'équivalence énoncée dans la deuxième partie du théorème est une conséquence immédiate de ce que l'on vient de montrer et du Théorème 1.2.1 \square

On résume ici plusieurs résultats concernant l'optimisation des fonctions convexes.

Théorème 2.5.8. *Les propositions suivantes sont vraies :*

1. Une fonction convexe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout point de $]a, b[$ et semicontinue supérieurement en a et b ;
2. une fonction convexe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet toujours un maximum et le maximum est réalisé sur $\{a, b\}$;
3. une fonction convexe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'admet pas de maximum sauf dans le cas d'une fonction constante ;
4. une fonction convexe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pourrait ne pas admettre de minimum mais si elle est la restriction d'une fonction convexe définie sur un intervalle $[c, d]$ avec $c < a$ et $d > b$ (c'est-à-dire si il existe $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe avec $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$) alors elle admet certainement un minimum sur $[a, b]$;
5. si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe alors soit elle est strictement monotone et dans ce cas là elle n'admet pas de minimum, soit elle l'est pas et alors elle admet un minimum ;
6. les points de minimum d'une fonction convexe f forment toujours un intervalle et sont caractérisés, dans le cas d'une fonction f dérivable, sauf si il s'agit de points de bord, par la condition $f' = 0$

Démonstration. 1. On sait qu'une fonction convexe est localement Lipschitzienne sur $]a, b[$ et donc continue en tout point intérieur. En ce qui concerne la semi-continuité aux points de bord, considérons le point a . Grâce à la convexité, on sait qu'on a

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Supposons maintenant $x_n \rightarrow a$ et $f(x_n) \rightarrow l$. On en déduit facilement

$$l \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-x_n}{b-a}f(a) + \frac{x_n-a}{b-a}f(b) = f(a),$$

ce qui nous donne la semi-continuité supérieure. La démonstration au point b est identique.

2. L'existence du maximum est une conséquence du Théorème de Weierstrass pour les fonctions semi-continue supérieurement. Supposons que ce maximum vaille M et qu'il soit réalisé par un point $x_t = (1-t)a + tb$ à l'intérieur. On alors

$$M = f(x_t) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \leq (1-t)M + tM = M,$$

ce qui implique $f(a) = f(b) = M$. Les points a et b seraient donc des points de maximum eux aussi (en effet, on peut montrer aussi la proposition suivante : si une fonction convexe admet maximum à l'intérieur, alors elle est constante).

3. Supposons qu'une fonction convexe sur \mathbb{R} admette maximum M au point x_0 et soient a et b deux points tels que $a < x_0 < b$. Avec la même inégalité de tout à l'heure on trouve $M = f(x_0) = f(a) = f(b)$. Les points a et b étant arbitraire, on a prouvé que f vaut M partout, et elle est donc constante.

4. La fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est convexe et n'admet pas de minimum sur l'intervalle $[0, 1]$ mais elle ne peut pas être étendue à une fonction convexe avant 0. Par contre, toute fonction convexe sur $[c, d]$ est forcément Lipschitzienne sur $[a, b]$ et on y peut donc appliquer le Théorème de Weierstrass standard pour prouver l'existence du minimum.

5. Considérons une fonction convexe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas strictement monotone. Cela signifie soit qu'elle est monotone mais non strictement, soit qu'elle n'est pas monotone. Dans le premier cas il y a donc deux points $a < b \in \mathbb{R}$ avec $f(a) = f(b)$. C'est une conséquence évidente de la monotonie que f est constante sur le segment $[a, b]$. En particulier, f' s'annule en tout point de $]a, b[$. Comme on sait que, pour une fonction convexe, tout point où la dérivée s'annule est un minimiseur, on a bien démontré que f admet un minimum. On considère maintenant le cas d'une fonction qui n'est pas monotone, et cela signifie qu'il existe trois points $a < c < b$ tels que $f(a) > f(c)$ mais $f(c) < f(b)$. Il faut remarquer que la monotonie pourrait être violée également par l'ordre inverse (c'est-à-dire $f(a) < f(c)$ et $f(c) > f(b)$), mais que cela n'est pas compatible avec la convexité. Considérons un point $x > b$: on a, grâce à la convexité,

$$b = \frac{x-b}{x-c}c + \frac{b-x}{x-c}x, \quad f(b) \leq \frac{x-b}{x-c}f(c) + \frac{b-x}{x-c}f(x),$$

ce qui montre

$$f(x) \geq \frac{1}{b-c} (x(f(b) - f(c)) + bf(c) - cf(b)). \quad (2.4)$$

Pareillement, de l'autre côté, pour $x < a$, on a

$$f(x) \geq \frac{1}{c-a} (x(f(c) - f(a)) + cf(a) - af(c)). \quad (2.5)$$

Les deux inégalités (2.4) et (2.4) permettent de conclure que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ et qu'on peut donc appliquer le Théorème 1.1.6.

6. Il suffit de se rendre compte que pour tout m l'ensemble $A_m = \{x : f(x) \leq m\}$ est toujours un intervalle, car si x_0 et x_1 lui appartiennent et $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$ est un point intermédiaire alors $f(x_t) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \leq (1-t)m + tm = m$. Si l'on applique ça à la valeur m du minimum, comme l'ensemble des points de minimum coïncide dans ce cas avec A_m , on a la preuve de l'énoncé. L'autre moitié est une conséquence de la Proposition 2.5.7.

□

2.5.1 Fonction convexes et concaves et leurs applications

On conclut la section avec des remarques sur les applications des fonctions convexes et de leurs opposées, les fonctions concaves.

Définition 2.5.2. Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si $-f$ est convexe.

Les fonctions convexes et, plus souvent, les fonctions concaves trouvent plein d'applications en économie. Typiquement, le prix pour acheter une quantité x d'un certain bien, ou pour le produire, est une fonction concave $f(x)$, avec $f(0) = 0$ et $f \geq 0$. Pourquoi est-il concave? est-il vrai qu'il est bien concave dans la réalité? oui, et on peut s'en rendre compte quand on achète

par exemple des pâtes, où le prix d'un kilo de pâtes est moins que le double du prix 'un demi kilo. Ceci entraîne l'inégalité de concavité

$$f\left(\frac{1}{2}\text{rien} + \frac{1}{2}\text{kilo}\right) > \frac{1}{2}f(\text{rien}) + \frac{1}{2}f(\text{kilo}).$$

Bon, l'exemple des pâtes n'est pas trop convaincant, car on ne trouve pas n'importe quel quantité x des pâtes à acheter. Passons alors à l'achat d'un billet de train. Typiquement (mais on ne le voit plus trop dans un système avec des tarifs spéciaux comme sur les TGV), si le prix d'un billet correspondant à 100km est de 20 euros, la différence entre le prix d'un billet de 1000 kilomètres et un billet de 1100 kilomètres est moins importante que 20 euros. Ceci signifie

$$\frac{f(1100) - f(1000)}{1100 - 1000} < \frac{f(100) - f(0)}{100 - 0},$$

ce qui est toujours typique des fonctions concaves. Pour ce qui est des coûts de production, souvent il y a des coût pour démarrer une activité qui ne sont pas influencés par la quantité x du bien qui sera en effet produite. Par exemple, si pour commencer à produire le bien il est nécessaire d'acheter une machine dont le coût est de 10000 euros et après le coût unitaire de production est de 10euros, la fonction de coût pour le producteur sera une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 10000 + 10x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Cette fonction, même si discontinue (elle est en fait semi-continue inférieurement), est concave.

En général toutes ces fonctions coûts ont une propriété très importante, qui est celle de sous-additivité. En effet, si l'on connaît le prix $f(x)$ pour acheter/produire une quantité x , ainsi que le prix $f(y)$ pour une quantité y , si jamais on est intéressé à une quantité $x + y$, il n'y a pas de raisons de payer plus que $f(x) + f(y)$, car au pire on pourra toujours acheter (ou produire) séparément une quantité x et une quantité y .

Définition 2.5.3. Une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est dite sous-additive, si pour tout $x, y \geq 0$ on a

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Il est intéressant de voir la relation entre fonctions concaves et fonctions sous-additives.

Théorème 2.5.9. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave avec $f(0) \geq 0$. Cette même fonction f est alors sous-additive aussi.

Par contre, une fonction sous-additive n'est pas forcément concave

Démonstration. Soient f concave et $x, y \geq 0$: considérons alors la fonction g définie sur $[0, x + y]$ par

$$g(z) = f(z) + f(x + y - z).$$

Cette fonction est la somme des deux fonctions concaves et est donc concave. En plus, $g(x) = g(y)$ et $g(0) = g(x + y)$. Pour $z = y$, on a

$$z = \frac{y}{x + y}(x + y) + \frac{x}{x + y}0, \quad g(z) \geq \frac{y}{x + y}g(x + y) + \frac{x}{x + y}g(0) = g(0).$$

Si l'on remplace g par son expression en termes de f on a

$$f(y) + f(x) \geq f(0) + f(x + y) \geq f(x + y).$$

Par contre, pour montrer que toute fonction sous-additive n'est pas forcément concave on peut voir l'exemple de la fonction

$$f(x) = \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\}$$

où l'on prend une valeur x et on la arrondit en haut. Cette fonction est sous additive car, si $x \leq n = \lceil x \rceil$ et $y \leq m = \lceil y \rceil$, on a sûrement $x + y \leq n + m$, ce qui implique $\lceil x + y \rceil \leq n + m$. Cependant, elle n'est pas concave car elle est discontinue en tout point de \mathbb{Z} . Il vaut la peine de remarquer que cette fonction est un modèle très raisonnable du prix qu'on paie lorsqu'on cherche à acheter une quantité x d'un bien mais on est forcé à acheter une quantité qui soit multiple d'une unité fixée. \square

Chapitre 3

Intégrales

3.1 Fonctions Intégrables

Supposons qu'une voiture roule à une certaine vitesse v le long d'une autoroute au départ de Paris et qu'on veuille savoir à quelle distance de Paris elle se trouvera après un temps T : la réponse est évidemment vT . Supposons maintenant que la voiture n'ait pas une vitesse constante mais qu'elle change de temps en temps sa vitesse et que, par exemple, elle ait une vitesse v_1 pendant un certain temps T_1 , puis une nouvelle vitesse v_2 pendant un temps T_2 (c'est-à-dire entre l'instant T_1 et l'instant $T_1 + T_2$) et enfin une vitesse v_3 à partir de l'instant $T_1 + T_2$: si l'on veut calculer la distance où elle se trouvera après un temps t la réponse sera

$$v_1 t \text{ si } t \leq T_1; \quad v_1 T_1 + v_2 (t - T_1) \text{ si } T_1 \leq t \leq T_1 + T_2; \quad v_1 T_1 + v_2 T_2 + v_3 (t - (T_1 + T_2)) \text{ si } T_1 + T_2 \leq t.$$

Et si la vitesse changeait continuellement ? l'idée est que pour calculer la réponse dans le cas d'une vitesse qui change de temps en temps il faut faire une somme de résultats du type "vitesse fois temps" et que pour une vitesse en variation perpétuelle il faudra une nouvelle technique, ce qui donnera lieu aux intégrales. Pourtant, elle ne sera pas si nouvelle que ça, comme en fait sa définition sera basée justement sur l'idée d'approcher une vitesse en variation par des cas où elle varie de temps en temps (mais très souvent, pour réaliser une meilleure approximation).

On commence donc par la définition de "fonction qui varie seulement de temps en temps".

Définition 3.1.1. On appelle fonction étagée toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe un nombre fini de points $(t_i)_{i=1, \dots, n}$ avec $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ tels que f est constante sur tout intervalle de la forme $I_i =]t_i, t_{i+1}[$ avec $i < n$. On dit que les points t_i donnent lieu à une partition adaptée à la fonction étagée f . On écrira $\mathcal{E}([a, b])$ pour l'ensemble des fonctions étagées sur l'intervalle $[a, b]$.

Une fonction étagée sera donc de la forme

$$f(x) = \begin{cases} k_0 & \text{si } x = a, \\ m_1 & \text{si } a = t_0 < x < t_1, \\ k_1 & \text{si } x = t_1, \\ m_2 & \text{si } t_1 < x < t_2, \\ k_2 & \text{si } x = t_2, \\ \dots & \\ k_{n-1} & \text{si } x = t_{n-1}, \\ m_n & \text{si } t_{n-1} < x < t_n = b, \\ k_n & \text{si } x = b. \end{cases} \quad (3.1)$$

Souvent on considère des intervalles semi-fermés genre $[t_i, t_{i+1}[$ de façon à avoir $k_i = m_{i+1}$ mais ce qu'on veut souligner par cette définition est que la valeur de f aux points de séparation entre les intervalles n'est pas importante.

Évidemment toute fonction étagée f admet, par définition, au moins une partition adaptée mais elle en admet en général plusieurs (tout intervalle où la fonction est constante peut en fait être ultérieurement séparée, tout en gardant son caractère adapté).

En suivant l'esprit des relations qu'on a présentés entre vitesse et position, on peut définir l'intégrale d'une fonction étagée :

Définition 3.1.2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction étagée de la forme (3.1) on définit l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ la quantité

$$\int_a^b f(t)dt := \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Cette quantité est bien définie (elle ne dépende pas de la partition adaptée choisie pour représenter f).

Il faut quand même démontrer que l'intégrale d'une fonction étagée est bien définie.

Démonstration. Considérons deux partitions différentes $(t_i)_i$ et $(s_j)_j$ et supposons que la deuxième soit plus fine que la première : cela signifie que tout intervalle du type $]t_i, t_{i+1}[$ est divisé en plusieurs intervalles du type $]s_j, s_{j+1}[$ pour $j = j_i^-, \dots, j_i^+$. La fonction f valant m_i sur tout le gros intervalle on obtiendrait un terme $m_i(t_{i+1} - t_i)$ dans l'expression de l'intégrale due à la première partition, égalisée par un terme $\sum_{j=j_i^-}^{j_i^+} m_i(s_{j+1} - s_j)$. Ceci montre que la valeur de l'intégrale ne change pas si l'on passe d'une partition à une partition plus fine. Comme deux partitions distinctes admettent toujours une partition qui est plus fine des deux (il suffit de prendre la partition composée par la réunion des points des deux partitions), on en déduit que la valeur de l'intégrale est indépendante de la partition adaptée choisie. \square

Il est facile vérifier la propriété suivante :

Proposition 3.1.1. Soient f et g deux fonctions en $\mathcal{E}([a, b])$: on a alors

$$\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. En passant à une partition plus fine, on peut supposer d'écrire f sous la forme (3.1) et g sous une forme analogue pour des coefficients m'_i qui remplacent les m_i et la même partition $(t_i)_i$. On a donc

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \sum_{i=1}^n (m_i+m'_i)(t_i-t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i-t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n m'_i(t_i-t_{i-1}) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

\square

Le but de la théorie de l'intégration (ce type d'intégration s'appelant notamment 'Intégration de Riemann' est de donner un sens à l'expression $\int_a^b f(t)dt$ quand f n'est pas étagée. On procédera par approximation supérieure et inférieure.

Définition 3.1.3. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée on définit intégrale supérieure de f sur A la quantité

$$I^+(f; A) := \inf \left\{ \int_a^b g(t)dt : g \in \mathcal{E}(A); g \geq f \right\}$$

et intégrale inférieure de f sur A la quantité

$$I^-(f; A) := \sup \left\{ \int_a^b g(t)dt : g \in \mathcal{E}(A); g \leq f \right\}.$$

Comme f est bornée les ensembles des $g \in \mathcal{E}(A); g \geq f$ et des $g \in \mathcal{E}(A); g \leq f$ ne sont pas vides (car le premier inclut toutes les fonctions constantes plus grandes que $\sup f$ et le deuxième toutes les constantes plus petites que $\inf f$) et les bornes supérieure et inférieure de la définition ci-dessus sont bien défini (il ne faut jamais chercher à calculer l'inf ou le sup d'un ensemble vide!!). De plus, on aura évidemment $I^-(f; A) \leq I^+(f; A)$.

On peut donc donner la définition de fonction intégrable.

Définition 3.1.4. Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite intégrable si elle est bornée et si $I^+(f; A) = I^-(f; A)$. On définira également son intégrale par

$$\int_A f(t)dt := I^+(f; A) = I^-(f; A).$$

Si $A = [a, b]$ on considérera les deux écritures $\int_A f(t)dt$ et $\int_a^b f(t)dt$ comme étant équivalentes.

Les fonctions intégrables d'après cette définition sont souvent dites fonction intégrables selon Riemann ou Riemann-intégrables pour les distinguer des fonction intégrables d'après une autre définition, plus générale, donnée plus tard par Lebesgue. On notera $\mathcal{R}(A)$ l'ensemble des fonctions intégrables selon Riemann sur l'intervall A .

On remarquera aussi la caractérisation suivante :

Proposition 3.1.2. Une fonction bornée $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée $g^+ \geq f$ et une fonction étagée $g^- \leq f$, définies sur une même partition adaptée $(t_i)_{i=1, \dots, n}$ par $g^+ = m_i^+$ sur $]t_i, t_i + 1[$ et $g^- = m_i^-$ sur $]t_i, t_i + 1[$, telles que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)(m_i^+ - m_i^-) < \varepsilon.$$

Démonstration. Démontrons d'abord que, si un tel couple de fonctions étagées existe pour tout $\varepsilon > 0$, alors f est intégrable. On a en fait

$$I^+(f; A) - I^-(f; A) \leq \int_A g^+(t)dt - \int_A g^-(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)(m_i^+ - m_i^-) < \varepsilon$$

et, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, l'égalité de $I^+(f; A)$ et $I^-(f; A)$ est immédiate.

Par contre, si f est intégrable, il signifie que $I^+(f; A) = I^-(f; A)$. Par définition de I^+ et I^- et par les définitions de sup et de inf, on trouve que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction étagée $g^+ \geq f$ avec $\int_A g^+(t)dt < I^+(f; A) + \varepsilon/2$ et, pareillement, une fonction étagée $g^- \leq f$ avec $\int_A g^-(t)dt > I^-(f; A) - \varepsilon/2$. supposer que les deux fonctions soient définies sur la même partition adaptée n'est pas restrictif. De plus, si on les exprimes à l'aide de leurs valeurs m_i^\pm sur les intervalles $]t_i, t_i + 1[$, on a

$$\int_A g^\pm(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)m_i^\pm \quad \text{et} \quad \int_A g^+ - \int_A g^- = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)(m_i^+ - m_i^-).$$

Or, on a $\int_A g^+ - \int_A g^- < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ et ceci entraîne la thèse. \square

On peut tirer de ce critère un autre critère encore plus explicite, si l'on tâche de choisir g^+ et g^- qui réalisent le moindre écart possible entre $\int_a^b g^+(t)dt$ et $\int_a^b g^-(t)dt$.

Proposition 3.1.3. *Une fonction bornée $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition $(t_i)_{i=1, \dots, n}$ telle que*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \left(\sup_{]t_i, t_{i+1}[} f - \inf_{]t_i, t_{i+1}[} f \right) < \varepsilon.$$

Démonstration. On utilisera le critère de toute à l'heure. Supposons que f soit intégrable. Alors il existe un couple de fonctions étagée g^+ et g^- telles que $g^- \leq f \leq g^+$ et

$$\int_a^b g^+(t)dt - \int_a^b g^-(t)dt < \varepsilon.$$

Soit $(t_i)_{i=0, \dots, n}$ une partition adaptée au même temps à g^+ et g^- . Si l'on remplace les valeurs m_i^\pm que les fonctions g^\pm assument sur les intervalles $]t_i, t_{i+1}[$ par $\sup_{]t_i, t_{i+1}[} f$ et $\inf_{]t_i, t_{i+1}[} f$, respectivement, on a diminué g^+ (car forcément $m_i^+ \geq \sup_{]t_i, t_{i+1}[} f$) et augmenté g^- (car forcément $m_i^- \leq \inf_{]t_i, t_{i+1}[} f$). Ceci signifie que la différence est diminuée. Donc a fortiori on a $\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) (\sup_{]t_i, t_{i+1}[} f - \inf_{]t_i, t_{i+1}[} f) < \varepsilon$.

Par contre, si une telle partition existe, on peut obtenir des fonctions étagées g^\pm qui majorent et mineurent f et telles que $\int_a^b g^+(t)dt - \int_a^b g^-(t)dt < \varepsilon$ en prenant

$$g^+ = \sup_{]t_i, t_{i+1}[} f \text{ sur }]t_i, t_{i+1}[, \quad g^+(t_i) = \sup_{[a, b]} f \quad g^- = \inf_{]t_i, t_{i+1}[} f \text{ sur }]t_i, t_{i+1}[, \quad g^-(t_i) = \inf_{[a, b]} f.$$

□

Souvent la quantité $\sup_A f - \inf_A f$ est dite oscillation de f sur A est notée par $osc_A f$ ou $osc(f; A)$. L'oscillation correspond aux plus grandes différences $f(x) - f(y)$ qu'on peut réaliser avec $x, y \in A$: $osc_A f = \sup_{x, y \in A} f(x) - f(y)$. L'idée de ce dernier critère est que les fonctions intégrables sont les fonctions qui ont une petite oscillation, si l'on considère la possibilité de découper $[a, b]$ en sous-intervalles pour réduire les oscillations et on pondère ces oscillations avec les longueurs des correspondants intervalles. Une fonction est intégrable donc si elle oscille peu ou si ses grandes oscillations sont concentrées sur des petits intervalles.

Il est facile vérifier la propriété suivante :

Proposition 3.1.4. *L'espace $\mathcal{R}(A)$ est un espace vectoriel et, si $f, g \in \mathcal{R}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\int_A (f + g)(t)dt = \int_A f(t)dt + \int_A g(t)dt$ et $\int_A (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_A f(t)dt$. De plus, si $\phi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitzienne et $f(A) \subset [c, d]$ alors $\phi \circ f$ est intégrable aussi. Pour terminer, fg aussi est intégrable*

Démonstration. Commençons par démontrer que $f + g$ est intégrable, si f et g le sont. Évidemment elle est bornée comme somme de fonctions bornées. Considérons en plus des fonctions étagées h^\pm et k^\pm , toutes définies sur une même partition adaptée avec valeurs h_i^\pm et k_i^\pm sur $]t_i, t_{i+1}[$, respectivement, et telles que

$$h^+ \geq f, \quad h^- \leq f, \quad k^+ \geq g \text{ et } k^- \leq g,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) (h_i^+ - h_i^-), \quad \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) (k_i^+ - k_i^-) < \varepsilon/2.$$

Si l'on considère les fonctions étagées $u^\pm = h^\pm + k^\pm$ on a justement $u^+ \geq f + g \geq u^-$ et $u^\pm = h_i^\pm + k_i^\pm$ sur $]t_i, t_{i+1}[$, tout en ayant aussi

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) ((h_i^+ + k_i^+) - (h_i^- + k_i^-)) < \varepsilon.$$

Ceci montre que $f + g$ est intégrable grâce à la Proposition (3.1.3).

De plus, si h et k sont n'importe quelles fonction étagées qui majorent f et g respectivement, on a que $h + k$ est une fonction étagée qui majore $f + g$ et donc

$$\int_A (f + g)(t)dt = I^+(f + g; A) \leq \int_A (h + k)(t)dt = \int_A h(t)dt + \int_A k(t)dt,$$

où l'on a utilisé l'additivité des intégrales pour les fonctions étagées. En passant à l'inf sur h et k séparément on trouve

$$\int_A (f + g)(t)dt \leq \int_A f(t)dt + \int_A g(t)dt,$$

et en regardant les intégrales inférieures I^- on trouve l'autre inégalité. L'égalité

$$\int_A (f + g)(t)dt = \int_A f(t)dt + \int_A g(t)dt$$

en découle immédiatement.

Il faut montrer maintenant que si f est intégrable et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λf est intégrable et son intégrale vaut $\lambda \int_A f(t)dt$. Prenons d'abord le cas $\lambda > 0$. Alors si g^+ et g^- sont des fonctions étagées qui majorent et minorent f respectivement λg^\pm majorent et minorent λf respectivement et les différences de leurs intégrales sont multipliées par λ . Il suffit alors de prendre deux fonctions g^\pm telles que $\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)(m_i^+ - m_i^-) < \varepsilon/\lambda$ pour trouver, avec λg^\pm , deux fonctions étagées qui montrent que λf est intégrable. La linéarité de l'intégrale sur les fonctions étagées (évidente) passe facilement à f et λf . Le cas $\lambda = 0$ ne pose pas des difficultés car $0 \cdot f = 0$ est une fonction constante et donc étagée et son intégrale est nulle. Pour regarder le cas $\lambda < 0$ il suffit de regarder le cas $\lambda = -1$ et le composer avec le cas $\lambda > 0$. Pour $\lambda = -1$ il suffit de remarquer que

$$I^+(-f; A) = -I^-(f; A) \quad \text{et} \quad I^-(-f; A) = -I^+(f; A)$$

et l'égalité de I^+ et I^- concernant f entraîne facilement celle portant sur $-f$.

On veut montrer aussi l'intégrabilité de $\phi \circ f$ et fg . Pour la première, prenons g^\pm fonctions étagée définies usuellement avec $g^+ \geq f \geq g^-$ et

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)(m_i^+ - m_i^-) < \varepsilon/L,$$

où L est la constante de Lipschitz de ϕ sur l'intervalle $[c, d]$. On peut aussi supposer que, comme $f(A) \subset [c, d]$, les coefficients m_i^\pm ont été choisis dans l'intervalle $[c, d]$. Posons

$$h_i^+ := \max\{\phi(s) : s \in [m_i^-, m_i^+]\}; \quad h_i^- := \min\{\phi(s) : s \in [m_i^-, m_i^+]\}.$$

Comme $f(t) \in [m_i^-, m_i^+]$ pour $t \in]t_i, t_{i+1}[$, alors les fonctions h^\pm définies comme étant h_i^\pm sur $]t_i, t_{i+1}[$ majorent et minorent $\phi \circ f$ respectivement. De plus, grâce à la Lipschitzienité sur $[c, d]$, on a $h_i^+ - h_i^- \leq L(m_i^+ - m_i^-)$. En particulier

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)(h_i^+ - h_i^-) < \varepsilon,$$

ce qui montre l'intégrabilité de $\phi \circ f$.

Pour le produit fg on utilisera un truc malin : on note que

$$fg = \frac{(f + g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

et que le carré d'une fonction intégrable est intégrable. Pourquoi ? parce que si f est une fonction intégrable qui prend ses valeurs dans $[c, d]$ (comme elle est bornée, ses valeurs sont toujours

inclus dans un intervalle borné comme ça), alors on peut appliquer le critère précédent, comme la fonction $x \mapsto x^2$ est Lipschitzienne de constante $2 \max\{|c|, |d|\}$ sur cet intervalle (il s'agit d'une fonction $C^1(\mathbb{R})$, donc sa dérivée est bornée sur tout intervalle borné). En appliquant ceci à f , g et $f + g$, puis en faisant des sommes et la multiplication par $1/2$, on trouve le résultat. \square

On termine la section par un exemple bien connu de fonction non-intégrable, qui est connue comme "fonction de Dirichlet".

Exemple 3.1.1. Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bien que bornée, la fonction f n'est pas intégrable sur aucun intervalle $[a, b]$ car $I^+(f; [a, b]) = b - a$ et $I^-(f; [a, b]) = 0$. En effet, la fonction constante 1 est une fonction étagée qui majore f si comme la fonction constante 0 est une fonction étagée qui la minore. De plus, toute fonction étagée qui majore f doit valoir au moins 1 à l'intérieur de tout intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ de sa partition adaptée, car cet intervalle inclut forcément des points rationnels où f vaut 1. Symétriquement, toute fonction étagée minorante ne peut pas dépasser la valeur 0 sur les mêmes intervalles car ces intervalles contiennent tous des point irrationnels où f vaut 0. Ceci montre que l'inf des intégrales des fonctions étagées minorantes est obtenu avec la constante 1 et le sup des minorantes avec la constante 0. Comme les deux bornes diffèrent, la fonction n'est pas intégrable.

De manière équivalente, on peut appliquer le critère 3.1.3 : remarquons d'abord que, pour tout intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, on a $\text{osc}(f; t_i, t_{i+1}[) = 1$ car tout intervalle contient au moins un rationnel et un irrationnel. Donc, quoi que ce soit la partition (t_0, t_1, \dots, t_n) choisie, on aura toujours

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \text{osc}(f; t_i, t_{i+1}[) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = b - a$$

et cette quantité ne peut pas devenir aussi petite que l'on veut, car elle est constante (elle ne dépend pas de la partition).

3.2 Des classes de fonctions intégrables

3.2.1 Fonctions monotones

Dans cette section on va démontrer que des classes suffisamment amples de fonctions sont en fait des fonctions intégrables. On parlera notamment de fonctions continues et de fonctions monotone. Une extension possibles du cas des fonctions momotones est celle des fonctions à variation bornée .Le cas le plus simple est celui des fonctions monotone.

Définition 3.2.1. Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite monotone si elle est soit croissante soit décroissante, c'est à dire si elle satisfait la propriété

$$x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (\text{fonction croissante})$$

ou bien la propriété

$$x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (\text{fonction décroissante}).$$

Théorème 3.2.1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone, alors f est intégrable. De plus, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$

Démonstration. Supposons par simplicité que f soit croissante (le cas décroissante étant tout à fait symétrique) Fixons n et prenons la partition $(t_i)_{i=0,\dots,n}$ définie par $t_i = a + (b-a)/n$ (une partition uniforme qui divise $[a, b]$ en n intervalles de même taille). On appliquera le critère 3.1.3. Comme f est croissante sur les intervalles $t_i, t_{i+1}[$ on a bien $osc(f; t_i, t_{i+1}[) = f(t_{i+1}) - f(t_i)$. Donc on trouve

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) osc(f; t_i, t_{i+1}[) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} (f(t_{i+1}) - f(t_i)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)).$$

Cette dernière quantité peut devenir aussi petite que l'on veut quand $n \rightarrow \infty$ et donc il suffit de choisir n suffisamment grand pour que cela soit plus petit qu' ε et appliquer donc le critère 3.1.3.

De plus, on peut choisir deux fonctions étagées g_n^+ et g_n^- , qui estiment la borne supérieure et inférieure de f sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$:

$$g_n^+(x) = f(t_{i+1}) \geq \sup\{f(t) : t \in]t_i, t_{i+1}[\} \quad g_n^-(x) = f(t_i) \leq \inf\{f(t) : t \in]t_i, t_{i+1}[\} \quad \text{si } x \in]t_i, t_{i+1}[,$$

sur les mêmes intervalles de ces partitions uniformes (t_0, t_1, \dots, t_n) .

Ce qu'on vient de montrer est justement que $\int_a^b g_n^+(t) dt - \int_a^b g_n^-(t) dt = (b-a)(f(b) - f(a))/n \rightarrow 0$. Donc, on a

$$I^+(f; [a, b]) - \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} \leq \int_a^b g_n^-(t) dt \leq \int_a^b g_n^+(t) dt \leq I^-(f; [a, b]) + \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}$$

et, par les théorèmes des gendarmes, en utilisant $I^+(f; [a, b]) = I^-(f; [a, b])$ (car on vient de montrer que f est intégrable), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n^-(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n^+(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

En réécrivant l'intégrale de g_n^+ comme une somme on obtient la limite dans la thèse. □

L'idée clé de cette preuve est que pour une fonction monotone on obtient un effet télescopique de termes qui s'effacent si l'on prend des sous-intervalles de la même longueur. Il faut remarquer qu'en général il n'est pas possible de démontrer l'intégrabilité d'une fonction en se restreignant aux partitions régulières (celles où tous les intervalles qui ont la même longueur). Le fait que pour les fonctions monotones soit possible est une propriété en plus de cette classe de fonctions et le fait que l'intégrale soit obtenue comme limite des sommes des valeurs de la fonction dans des points spéciaux aussi.

Les mêmes propriétés sont vraies pour les fonctions continues mais sont moins évidentes. Ceci est dû au fait qu'on n'a pas encore introduit une notion importante liée à la continuité, qui est celle de continuité uniforme.

3.2.2 L'intégrabilité des fonctions continues et l'uniforme continuité

Définition 3.2.2. Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que tout couple de points $(x, y) \in A \times A$ satisfaisant $|x - y| < \delta$ satisfait aussi $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

C'est quoi la différence entre la définition de continuité et d'uniforme continuité? d'abord la continuité est une propriété qui concerne une fonction f et un point x_0 , alors que l'uniforme continuité ne concerne que f . De plus, comme dans la définition de continuité le point x_0 a été fixé, il a le droit d'intervenir dans le choix du δ , alors qu'ici δ ne doit dépendre que de ε . Évidemment si une fonction est uniformément continue, alors elle est continue sur A (la notion d'uniforme continuité est plus forte que celle de continuité en tout point de A). Le contraire n'est pas vrai, comme on peut voir de l'exemple suivant.

Exemple 3.2.1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ est continue mais elle n'est pas uniformément continue.

Pour voir ceci, il suffit d'estimer les variations de f entre un point x et un point $x + h$ (prenons par simplicité $x, h > 0$) : $f(x + h) = x^2 + 2xh + h^2 \geq f(x) + 2xh \geq f(x)$. Si l'on suppose par l'absurde que f est uniformément continue on aurait $f(x + h) - f(x) \leq \varepsilon$ pour tout $h < \delta$. Mais la quantité $2xh$ peut être rendue aussi grande qu'on veut, si x est très grand, et va sûrement dépasser ε . Par contre, la même démonstration n'aurait pas marché si on se restreignait à un ensemble borné de valeurs de x .

Sinon, il existe pas mal de classes de fonctions qui sont uniformément continues et il s'agit en général de classes de fonctions où la continuité uniforme a été mieux "quantifiée". Par exemple, toute fonction Lipschitzienne est uniformément continue car, si L est la constante de Lipschitz d'une fonction f , on satisfait toujours la définition d'uniforme continuité en choisissant $\delta = \varepsilon/L$. Une classe plus générale est la classe des fonctions Hölderiennes (là aussi Hölder est le mec qui a - peut-être - étudié le premier les propriétés de ces fonctions).

Définition 3.2.3. Si $\alpha \in]0, 1]$ une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dite Hölderienne d'exposant α (ou α -Hölderienne) si il existe une constante C telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \text{ pour tout couple } (x, y) \in A \times A.$$

Évidemment dans le cas $\alpha = 1$ on retombe sur la définition des fonctions Lipschitziennes.

Un exemple de fonction Hölderienne qui n'est pas Lipschitzienne est le suivant.

Exemple 3.2.2. La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^\alpha$ est Hölderienne d'exposant α mais elle n'est pas Lipschitzienne.

Pour voir ceci, il suffit d'utiliser le fait que la fonction f , en tant que fonction concave, est sous-additive, ce qui signifie $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$: on a donc, si $x < y$

$$f(x) = x^\alpha < f(y) = y^\alpha \leq f(y - x) + f(x) = |y - x|^\alpha + f(x),$$

ce qui implique $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|^\alpha$.

Pour voir qu'elle n'est pas Lipschitzienne il suffit de voir que sa dérivée n'est pas bornée. La fonction f est en fait dérivable sur $]0, 1[$ mais sa dérivée est donnée par $\alpha x^{\alpha-1}$ et on a donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$, ce qui implique que f' n'est pas bornée (et donc f n'est pas Lipschitzienne sur $]0, 1[$, ni a fortiori sur $[0, 1]$).

Observation 3.2.1. Pourquoi parle-t-on de fonctions Höldériennes pour $\alpha \leq 1$ et pas pour $\alpha > 1$? Simplement car les fonctions Höldériennes pour $\alpha > 1$ sont triviales : toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I étant un intervalle de \mathbb{R}) satisfaisant $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ pour un certain $\alpha > 1$ est en fait constante !! On peut le voir facilement en calculant sa dérivée :

$$|f'(x)| = \lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lim_{y \rightarrow x} \frac{C|x - y|^\alpha}{|x - y|} = 0,$$

ce qui démontre que la fonction est partout dérivable et la dérivée est partout nulle.

Pour une fonction uniformément continue, il est intéressant de définir ce qu'on appelle son "module de continuité".

Définition 3.2.4. Pour toute fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on appelle module de continuité de f la fonction $\omega_f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par

$$\omega_f(a) := \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in A, |x - y| \leq a\}.$$

Le fait que f soit uniformément continue équivaut à $\lim_{a \rightarrow 0} \omega_f(a) = 0$.

On peut facilement vérifier que le module de continuité d'une fonction Lipschitzienne f satisfait $\omega_f(a) \leq Ca$, où C est la Constante de Lipschitz de f , et que si f est Höldérienne on a par contre $\omega_f(a) \leq Ca^\alpha$.

Comme on a remarqué dans l'exemple, l'uniforme continuité est plus difficile sur \mathbb{R} mais plus facile sur les ensembles bornés. En particulier, on a le théorème suivant (Théorème de Heine) :

Théorème 3.2.2. *Soient A un sous-ensemble fermé et borné de \mathbb{R} et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur A .*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f ne soit pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il y a deux points $x, y \in A$ avec $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ et $|x - y| < \delta$. En prenant $\delta = 1/n$ on peut appeler x_n et y_n les points correspondants. On a $|x_n - y_n| < 1/n \rightarrow 0$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Comme A est fermé et borné, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergente. Soit x sa limite. La correspondante sous-suite $(y_{n_k})_k$ converge à la même limite x car on a $|x_{n_k} - y_{n_k}| \rightarrow 0$. En passant à la limite dans l'inégalité $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, comme f est continue, on trouve $0 = |f(x) - f(x)| \geq \varepsilon > 0$, ce qui est une contradiction. \square

Une autre propriété importante des fonctions uniformément continues est la suivante, qu'on écrit et on démontre par complétude :

Théorème 3.2.3. *Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Alors il existe une unique extension continue g de f à l'intervalle fermé $[a, b]$, c'est-à-dire une fonction continue $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.*

Démonstration. Il suffit de définir g sur les points a et b et vérifier la continuité. Pour faire cela, prenons une suite $(x_n)_n \subset]a, b[$ convergeante vers a et considérons $(f(x_n))_n$. Si l'on fixe $\varepsilon > 0$, grâce à l'uniforme continuité de f , il existe $\delta > 0$ tel que $|x_n - x_m| < \delta$ entraîne $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Or, la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, et donc l'inégalité $|x_n - x_m| < \delta$ est vraie pour $n, m \geq N_0$. Ceci implique que la suite $(f(x_n))_n$ satisfait l'inégalité $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ à partir du même rang, et donc $(f(x_n))_n$ est de Cauchy aussi. Elle admet donc une limite et on posera $g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Celle-ci est une bonne définition, c'est-à-dire le résultat ne dépend pas de la suite que l'on a choisi. En effet, si $(y_n)_n$ était une suite différente on aurait eu en fait $|x_n - y_n| < \delta$ à partir d'un certain rang (car x_n et y_n ont la même limite a) et ceci impliquerait $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Cette inégalité passant à la limite, elle implique que la différence des deux limites ne dépasse pas ε . Grâce à l'arbitrarité de ε les deux limites doivent coïncider. En définissant comme ça $g(a)$ (et en utilisant une définition analogue pour $g(b)$ et en laissant $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a, b[$) on trouve une fonction g . Elle coïncide avec f à l'intérieur de l'intervalle ouvert, donc elle est continue (comme la continuité peut être vérifiée localement). De plus, on vient d'imposer que pour toute suite $x_n \rightarrow a$ on a $\lim_n f(x_n) = \lim_n g(x_n) = g(a)$, ce qui donne la continuité en a (et en b c'est pareil). De plus, il est évident que toute extension continue de f doit coïncider avec cette fonction g qu'on vient de définir sur a et b comme il faut imposer la continuité en ces deux points-là et donc cette extension est unique. \square

Observation 3.2.2. La même démonstration peut marcher si f est définie sur un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ quelconque, pas forcément un intervalle. Elle garantit l'existence d'une unique extension de f à l'ensemble des points qui peuvent être atteints comme limite d'une suite de points de A . Cet ensemble s'appelle l'adhérence de A et il est le plus petit sous-ensemble fermé de \mathbb{R} qui contient A .

Corollaire 3.2.4. *Toute fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue sur un intervalle borné est bornée.*

Démonstration. Il suffit de prendre l'extension g de f à $[a, b]$, qui sera une fonction continue sur un intervalle fermé et borné. Cette extension admettra donc un maximum et un minimum et

sera donc bornée. La fonction f résulte bornée comme restriction à un sous-ensemble plus petit d'une fonction bornée sur un ensemble plus grand. \square

Observation 3.2.3. La démonstration qu'une fonction uniformément continue est bornée sur un intervalle bornée pourrait se faire sans passer à l'extension continue sur un compacte. Il suffirait de dire que, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe un $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta$ entraîne $|f(x) - f(y)| < 1$ et puis prendre une partition t_0, t_1, \dots, t_n de l'intervalle telle que $|t_{i+1} - t_i| < \delta$. Si on pose $M = \max_i |f(t_i)|$ on trouve certainement $|f(x)| \leq M + 1$ pour tout x , car tout x est à distance inférieure à δ de l'un des points t_i et donc $f(x) \leq |f(t_i)| + 1$.

Après cette parenthèse sur les fonctions uniformément continues, on peut profiter de cette notion pour revenir aux intégrales.

Théorème 3.2.5. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable et on a aussi*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$

La thèse reste vraie si f est définie sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, sous l'hypothèse qu'elle soit uniformément continue.

Démonstration. Grâce au Théorème 3.2.2 la fonction f est uniformément continue aussi. Nous fixons $\varepsilon > 0$ et nous cherchons à appliquer le critère 3.1.3. On divisera l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de la même longueur $(b-a)/n$, en appelant $t_i = a + i(b-a)/n$ les points de séparation. On aura donc

$$\text{osc}(f;]t_i, t_{i+1}[) \leq \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

L'intégrabilité de f découle facilement du fait que, pour n suffisamment grand, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \text{osc}(f;]t_i, t_{i+1}[) \leq \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right)(b-a).$$

De plus, on a, pour n suffisamment grand cette quantité va être plus petite que le ε qu'on avait fixé, car l'uniforme continuité de f garantit $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) = 0$

De plus, on a

$$f(t_i) - \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \leq f(t) \leq f(t_i) + \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \text{ pour tout } t \in]t_i, t_{i+1}[,$$

et donc, si l'on définit la fonctions étagée g_n par $g_n = f(t_i)$ sur $]t_i, t_{i+1}[$ on a $g_n - \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \leq f \leq g_n + \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right)$ (en fait, les fonctions $g_n - \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right)$ et $g_n + \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right)$ joueront le rôle de g_n^- et g_n^+ , respectivement). Ceci nous dit

$$\int_a^b f(t)dt - \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \leq \int_a^b g_n(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt + \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right),$$

ce qui entraîne, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. En écrivant l'intégrale de g_n comme une somme on trouve la deuxième partie de la thèse. \square

Ceci montre que les fonctions continues aussi, comme les fonctions monotones, non seulement sont intégrables, mais elles ont aussi la propriété que leurs intégrales peuvent être calculées par partitions uniformes.

3.2.3 Fonctions à variation bornée

On a montré que les fonctions monotones sont intégrables. On sait que la somme de deux fonctions intégrables est intégrable. Ceci nous dit que toute fonction qui est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est intégrable. Or, quelles sont les fonctions qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une décroissante ? la réponse est dans la notion suivante.

Définition 3.2.5. Pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on définit sa variation totale comme la quantité

$$V(f, [a, b]) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b \right\},$$

où la borne supérieure est prise parmi toutes les partitions finies de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles.

Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $V(f, [a, b]) < +\infty$ est dite à variation bornée.

Les trois lemmes suivants seront utiles pour continuer.

Lemme 3.2.6. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est monotone, alors on a $V(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|$ et en particulier f est à variation bornée.

Démonstration. Supposons que f soit croissante. Alors on a, pour toute partition $(t_i)_i$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1}) - f(t_i) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|.$$

Ceci implique facilement $V(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|$.

De même, si f est décroissante, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} -f(t_{i+1}) + f(t_i) = -f(b) + f(a) = |f(b) - f(a)|. \quad \square$$

Lemme 3.2.7. Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont à variation bornée, alors $f + g$ aussi et $V(f + g, [a, b]) \leq V(f, [a, b]) + V(g, [a, b])$.

Démonstration. Pour toute partition $(t_i)_i$ on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) + g(t_{i+1}) - f(t_i) - g(t_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \leq V(f, [a, b]) + V(g, [a, b]).$$

En passant à la borne supérieure on trouve $V(f + g, [a, b]) \leq V(f, [a, b]) + V(g, [a, b])$. Il est évident que si les deux variations à droite sont finies ceci est vrai pour celle à gauche aussi. \square

Lemme 3.2.8. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée et $c \in]a, b[$, alors

$$V(f, [a, b]) = V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]).$$

Démonstration. Prenons une partition arbitraire $(t_i)_{i=0, \dots, n}$: il existe une partition plus fine $(t'_i)_{i=0, \dots, m}$ telle que le point $c = t'_k$ soit un élément séparateur de la partition. Ceci peut être obtenu en rajoutant c aux points t_i , si jamais il est pas déjà parmi eux. Si on le rajoute on aura

$m = n + 1$, autrement $m = n$. En appliquant si nécessaire l'inégalité triangulaire aux valeurs $f(t_i)$, $f(c)$, $f(t_{i+1})$, on aura

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq \sum_{i=0}^{m-1} |f(t'_{i+1}) + f(t'_i)| = \sum_{i=0}^{k-1} |f(t'_{i+1}) + f(t'_i)| + \sum_{i=k}^{m-1} |f(t'_{i+1}) + f(t'_i)| \leq V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]).$$

En passant à la borne supérieur on trouve $V(f, [a, b]) \leq V(f, [a, c]) + V(f, [c, b])$.

Pour l'autre inégalité, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} V(f, [a, b]) &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : (t_i)_i \text{ partition de } [a, b] \right\} \\ &\geq \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : (t_i)_i \text{ partition de } [a, b] \text{ qui passe par } c \right\}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que, si l'on se restreint aux partitions telles que c est un élément séparateur, on trouve évidemment une borne supérieur plus petite. D'ici on peut continuer par

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : (t_i)_i \text{ partition de } [a, b] \text{ qui passe par } c \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |f(s_{i+1}) - f(s_i)| : (t_i)_i \text{ partition de } [a, c] \text{ et } (s_i)_i \text{ partition de } [c, b] \right\} \\ &= V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]). \end{aligned}$$

On a utilisé ici le fait que la somme des variations se décompose bien si la partition passe par c . \square

Observation 3.2.4. Dans la dernière démonstration on a utilisé aussi un principe très important dans la gestion des bornes supérieures et inférieures. Supposons qu'on ait

$$\sup\{A(X) + B(Y) : X \text{ fait qqchose et } Y \text{ fait autre chose}\}$$

et supposons que la conditions sur X ne concerne pas Y et celle sur Y ne concerne pas X . Alors cette quantité est égale à

$$\sup\{A(X) : X \text{ fait qqchose et } \} + \sup\{B(Y) : Y \text{ fait autre chose}\}.$$

Ici X et Y peuvent être n'importe quel genre d'objets, et $A(X)$ et $B(Y)$ des quantités leur associées qui en dépendent n'importe comment. Et les conditions sur X et Y peuvent être quelconque. Dans le dernier lemme il s'agissait de suites de points qui devaient donner lieu à des partitions. Ce qui est important est qu'ils puissent être choisis librement. Un exemple typique pourrait être

$$\sup\{x^2 + y^3 : x \in [0, 1], y \in [2, 3]\} = \sup\{x^2 : x \in [0, 1]\} + \sup\{y^3 : y \in [2, 3]\},$$

alors qu'on peut pas s'en sortir si l'on a

$$\sup\{x^2 + y^3 : x \in [0, 1], y \in [x, 3x]\},$$

car la condition sur y concerne x aussi.

La conséquence de tout ça est la proposition suivante.

Proposition 3.2.9. *Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si elle est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.*

En particulier une fonction à variation bornée est intégrable

Démonstration. Toute fonction qui est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est à variation bornée comme conséquence des Lemmes 3.2.6 et 3.2.7.

Au contraire, prenons f à variation bornée. Définissons $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(t) = V(f; [a, t]), \quad h(t) = f(t) - g(t).$$

La fonction g est croissante car, si $s \leq t$, alors $g(t) = V(f; [a, t]) = V(f; [a, s]) + V(f; [s, t]) \geq V(f; [a, s]) = g(s)$. Par construction f est la somme de g et h , il nous reste donc à montrer que h est décroissante.

Prenons $s \leq t$. On a

$$h(s) = f(s) - V(f; [a, s]) = f(s) - V(f; [a, t]) + V(f; [s, t]) = h(t) + f(s) - f(t) + V(f; [s, t]).$$

Or, il est toujours vrai $f(t) - f(s) \leq |f(t) - f(s)| \leq V(f; [s, t])$, car on peut toujours considérer dans $[s, t]$ la partition triviale composée par les seuls points s et t . Par conséquent on a $f(s) - f(t) + V(f; [s, t]) \geq 0$, ce qui implique alors $h(s) \geq h(t)$. La fonction h est donc décroissante et f est la somme d'une fonction croissante et une fonction décroissante. Il faut remarquer que ce même raisonnement n'aurait pas marché si f n'était pas à variation bornée car on aurait obtenu des fonction à valeurs infinis.

La dernière partie de la thèse est une simple conséquence du fait que la somme des deux fonction intégrables est intégrables.

□

3.3 Le théorème fondamental du calcul et l'intégration par parties

On verra dans cette section l'instrument principal pour le calcul des intégrales, qui dans la pratique ne passe pas du tout par la définition via les fonctions étagées, ni par les limites qu'on a vues dans les Théorèmes 3.2.1 ou 3.2.5. Cet outil qu'on verra s'appelle à bonne raison "théorème fondamental du calcul intégral" et relie les concepts d'intégrale et de dérivée.

Pour en parler on a besoin d'abord de remarquer un petit détail assez facile et connu (on m'a dit comme ça en TD) sous le nom de "formule de Chasles".

Lemme 3.3.1. *Si f est une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ (c étant un point intermédiaire entre a et b), alors on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Démonstration. Il faut d'abord remarquer que cette égalité, plutôt triviale, est encore plus triviale quand on parle de fonctions étagées, car on a à faire avec une égalité des sommes. Si f est une fonction étagée et $(t_i)_i$ est une partition qui lui est adaptée, on peut supposer que c est l'un des points séparateurs de la partition (quitte à remplacer la partition par une partition plus fine, où l'on rajoute le point c). Supposons donc $t_k = c$ avec $0 < k < n$. On a

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^n m_i(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=k}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i) = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Une fois cette égalité établie pour les fonction étagées, l'idée est toujours utiliser le fait qu'une fonction étagée sur $[a, b]$ correspond exactement à la juxtaposition de deux fonctions étagée sur

$[a, c]$ et sur $[c, b]$ (il suffit toujours de supposer que c soit dans la partition adaptée, ce qui n'est pas restrictif). On a bien

$$\begin{aligned}
I^+(f; [a, b]) &= \inf \left\{ \int_a^b g(t) dt : g \text{ étagée et } g \geq f \right\} \\
&= \inf \left\{ \int_a^c g(t) dt + \int_c^b g(t) dt : g \text{ étagée et } g \geq f \right\} \\
&= \inf \left\{ \int_a^c h(t) dt + \int_c^b k(t) dt : h \in \mathcal{E}([a, c]), k \in \mathcal{E}([c, b]), h \geq f \text{ sur } [a, c], k \geq f \text{ sur } [c, b] \right\} \\
&= \inf \left\{ \int_a^c h(t) dt : h \in \mathcal{E}([a, c]), h \geq f \text{ sur } [a, c] \right\} + \inf \left\{ \int_c^b k(t) dt : k \in \mathcal{E}([c, b]), k \geq f \text{ sur } [c, b] \right\} \\
&= I^+(f; [a, c]) + I^+(f; [c, b])
\end{aligned}$$

Pour séparer les deux bornes inférieures l'observation à faire est la même que l'observation 3.2.4. Pour conclure, on remarque que si les fonctions sont intégrables alors I^+ et les intégrales coïncident. Par contre, si l'on ne sait pas encore que f est intégrable sur $[a, b]$, on peut utiliser cette égalité pour montrer son intégrabilité. Il suffit en fait de démontrer la même égalité concernant I^- pour déduire que, si $I^+(f; [a, c]) = I^-(f; [a, c])$ et $I^+(f; [c, b]) = I^-(f; [c, b])$, alors on a aussi $I^+(f; [a, b]) = I^-(f; [a, b])$. \square

On est prêt à montrer le suivant :

Théorème 3.3.2 (Théorème fondamental du calcul intégral). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ (en considérant la dérivée droite et gauche seulement pour les points a et b , respectivement).

De même, si f est seulement intégrable sur $[a, b]$ mais elle est aussi continue en un point $x_0 \in [a, b]$ alors F est dérivable au point x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Démonstration. Si l'on remarque que toute fonction continue est intégrable, il suffit de démontrer la deuxième partie de l'énoncé (le fait que la continuité en un point implique la dérivabilité de F au même point et l'égalité $F' = f$ à ce point-là). Quand f est continue en tout point, appliquer le résultat de la deuxième partie donne une démonstration de la première.

Considérons donc f continue au point x_0 . Si l'on fixe $\varepsilon > 0$ et on applique la définition de continuité on trouve un $\delta > 0$ tel que $|t - x_0| < \delta$ implique $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Prenons maintenant $x \in]x_0, x_0 + \delta[$: on a

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt \leq F(x_0) + (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0).$$

La dernière inégalité vient du fait que, si $x \in]x_0, x_0 + \delta[$ alors tous les points $t \in]x_0, x[$ satisfont $|t - x_0| < \delta$ et donc $f(t) \leq f(x_0) + \varepsilon$. On déduit donc

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon \text{ pour tout } x \in]x_0, x_0 + \delta[.$$

On peut obtenir aussi

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \geq f(x_0) - \varepsilon \text{ pour tout } x \in]x_0, x_0 + \delta[$$

si l'on considère que les points $t \in]x_0, x[$ satisfont $f(t) \geq f(x_0) - \varepsilon$ aussi. Ceci montre, par la définition de limite, que l'on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

La limite de l'autre côté n'est pas différente si l'on considère que l'on a, pour $x < x_0$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt - \int_x^{x_0} f(t)dt = F(x_0) - \int_x^{x_0} f(t)dt$$

et on continue avec les inégalités usuelles. □

Définition 3.3.1. Toute fonction dérivable F ayant la propriété $F' = f$ est dite une primitive de la fonction f .

Ce qu'on vient de montrer a la double utilité de montrer que toute fonction continue admet une primitive (et alors elle admet une quantité infinie de primitives, $F + c$ étant elle aussi une primitive de f si F l'est et c est une constante) et que pour calculer des intégrales il suffit de calculer des primitives. En effet, pour calculer $\int_a^b f(t)dt$, il suffit de détecter une primitive F de f : cette primitive ne coïncidera pas forcément avec la fonction G donnée par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, mais les dérivées des deux fonctions seront les mêmes. Alors on pourra dire que leur différence sera une constante (comme la différence aura dérivée nulle). On aura alors $F = G + c$ et on pourra calculer la constante c en utilisant $G(a) = 0$. On aura donc $G(x) = F(x) - F(a)$ (la constante $-F(a)$ étant la seule compatible avec $G(a) = 0$). En prenant $x = b$ on aura donc

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \text{ pour n'importe quelle primitive } F \text{ de } f,$$

ce qui représente la méthode plus courante de calcul d'une intégrale.

Pour plein de fonction en effet on est capables de deviner des primitives. Cela est plutôt facile pour toute fonction puissance : la primitive de $x \mapsto x^k$ est $x^{k+1}/(k+1)$, pour tout $k \neq -1$ (si $k = -1$ on ne peut pas utiliser la même formule, mais on s'aperçoit assez rapidement qu'on trouve un logarithme comme primitive de $1/x$).

Pourtant, le calcul d'une primitive ne suit pas les mêmes règles schématiques du calcul d'une dérivée et toute fonction n'est pas facile à intégrer (c'est-à-dire en trouver une primitive). Non seulement, il y a aussi des fonction "élémentaires" dont la primitive existe (car elles sont des fonctions continues) mais elle n'est pas de la même forme (élémentaire, terme qui est utilisé pour indiquer toute fonction obtenue par composition, produit, somme, quotient et parfois inversion des fonctions usuels : polynômes, exponentielles, logarithme, sinus, cosinus...). C'est le cas par exemple de la célèbre Gaussienne $f(t) = e^{-t^2}$. Par contre une fonction apparemment plus compliquée comme $f(t) = te^{-t^2}$ admet une primitive calculable explicitement, donnée par $F(x) = -e^{-x^2}/2$.

C'est pour cette raison qu'on est intéressée à des méthodes de calcul des intégrales qui nous aident soit à trouver des primitives, soit à trouver directement les valeurs d'expressions de la forme $\int_a^b f(t)dt$. Ces expressions ne sont pas toujours calculées par voie de la recherche d'une primitive, car parfois des considérations de symétrie (supposons que f est impaire et $a = -b$, on obtient sûrement une intégrale nulle, quoi que ce soit l'expression de f) peuvent aider, mais il est vrai que souvent la même méthode de calcul de l'intégrale serait capable de donner le résultat général (c'est à dire pour tout b , et donc la primitive).

Une méthode qui est souvent utile est celle d'intégration par parties, ce qui découle directement du théorème fondamental du calcul

Proposition 3.3.3 (Intégration par parties). Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. On alors

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = - \int_a^b f'(t)g(t)dt + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Démonstration. Prenons la fonction $F = fg$. Sa dérivée est $F' = f'g + fg'$. On peut dire alors que F est la primitive de sa dérivée et on a donc

$$\int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t)) dt = F(b) - F(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

En balançant le terme en $f'g$ de l'autre côté on obtient la thèse. \square

L'utilité de l'intégration par parties est variée. Elle donne une méthode de calcul des intégrales (et des primitives) qui est applicable si l'on a un produit de deux fonctions (f et g') dont une est facile à dériver, l'autre à intégrer (celle qui doit jouer le rôle de g'), et le produit de leur dérivée et primitive respectivement est facile à intégrer (plus facile que le produit originale).

D'autre côté l'intégration par parties est une méthode essentielle dans des problèmes avancés de mathématiques en cas de manque de régularité. Si g est une fonction régulière mais f non, on peut remplacer l'expression $\int f'g$ par une expression contenant $\int fg'$ et les valeurs de f et g sur le bord. De plus, on peut vérifier (ce n'est pas trivial mais pas trop difficile non plus) qu'il vaut la proposition suivante : si u est une fonction telle que

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = - \int_a^b u(t)g(t)dt + f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

pour toute fonction $g \in C^1([a, b])$, alors $u = f'$. Ceci peut être utilisé comme caractérisation de la dérivée d'une fonction (et donne lieu à une définition de dérivée pour des fonctions qui ne sont pas dérivable, mais vous verrez peut-être cela dans quelques ans)

3.4 Méthodes de calcul de primitives et intégrales

3.4.1 Changement de variable d'intégration

L'exemple ?? nous donne une idée intéressante : si dans une expression à intégrer il y a le logarithme qui apparait souvent, mais il y a aussi la dérivée du logarithme, alors on peut oublier la partie avec la dérivée, regarde la fonction qu'on a composée avec le logarithme, en prendre la primitive, et y mettre au dedans le logarithme dans le résultat. Ceci se peut généraliser.

En utilisant la convention $\int_a^b f(t)dt := - \int_b^a f(t)dt$ si $a > b$, on a :

Théorème 3.4.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ une bijection C^1 . Alors on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(s))g'(s)ds = \int_c^d f(g(s))|g'(s)|ds.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f , qui existe grâce au théorème fondamental du calcul (f étant continue). Considérons $F \circ g$: est-elle primitive de quelque chose ? oui, car elle est C^1 (comme composée de fonctions C^1) et elle est donc une primitive de sa dérivée. Sa dérivée est bien $s \mapsto f(g(s))g'(s)$. On a donc, pour tout x et y ,

$$\int_x^y f(g(s))g'(s)ds = F(g(y)) - F(g(x)).$$

Si l'on prend $x = g^{-1}(a)$ et $y = g^{-1}(b)$ on trouve

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(s))g'(s)ds = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt,$$

où la dernière égalité vient du Théorème Fondamental du Calcul et de ses conséquences. Ceci montre la première partie de la thèse. Pour conclure et voir

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(s))g'(s)ds = \int_c^d f(g(s))|g'(s)|ds$$

il suffit de distinguer deux cas : comme g est une bijection continue (elle est C^1), elle est strictement monotone ; soit elle est croissante (et dans ce cas on a $g(c) = a$ et $g(d) = b$, car sinon on ne peut pas réaliser une bijection, et $g' \geq 0$), soit elle est décroissante (avec $g(c) = b$ et $g(d) = a$ et $g' \leq 0$). Dans le premier cas l'égalité est immédiate, dans le deuxième il y a un double changement de signe, car l'intervalle résulte renversé mais $|g'| = -g'$. \square

Ce théorème peut être utilisé dans deux directions : soit on doit intégrer une fonction composée $f(g(t))$ multipliée fois g' (c'est le cas de notre dernier exemple), et alors on passera à l'intégrale de f tout court, soit on a une fonction $f(t)$ et pour quelques raisons on soupçonne que remplacer t avec $g(s)$ pourrait être malin (il faut que dans le produit $f(g(s))g'(s)$ il y ait quelque simplification, sinon cela ne vaut pas le coup).

Ce dernier cas sera développé dans l'exemple suivant.

Exemple 3.4.1. Calculer $\int_a^b \sqrt{1-x^2}dx$ et déterminer une primitive de la fonction intégrande (avec $-1 \leq a < b \leq 1$).

On fera le changement de variable suivant : $x = \sin(y)$. La fonction $y \sin(y)$ est une bijection croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$ et sa restriction à l'intervalle $[\arcsin(a), \arcsin(b)]$ le sera vers $[a, b]$. On appliquera le théorème 3.4.1 avec $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ et $g(s) = \sin(s)$. Il faut remplacer x avec $\sin(y)$, dx avec $\cos(y)dy$ et les bornes d'intégration. On a

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}dx = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{1-\sin^2(y)} \cos(y)dy = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos^2(y)dy$$

(on a utilisé $\cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$ mais $\cos(y) \geq 0$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ aussi). Il faut maintenant calculer la primitive de $\cos^2(y)$ mais cela on sait le faire. De la relation $\cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$ on tire que la primitive F du cosinus au carré est donnée par

$$F(x) = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x).$$

On a donc

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin(b) - \arcsin(a)) + \frac{1}{2} \sin(\arcsin(b)) \cos(\arcsin(b)) - \frac{1}{2} \sin(\arcsin(a)) \cos(\arcsin(a)).$$

On remarque $\sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$ et on continue :

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin(b) - \arcsin(a)) + \frac{1}{2}b\sqrt{1-b^2} - \frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}.$$

On peut déduire que une primitive de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est donnée par $F(x) = \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$. Ce résultat peut être vérifié en utilisant $(\arcsin)'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, ce qui est une conséquence de la formule pour le calcul de la dérivée d'une fonction réciproque.

Dans l'exemple précédent on a directement cherché à calculer le résultat d'une intégrale sur un intervalle $[a, b]$ et on a bien fait attention à changer les bornes lors du changement de la variable. Il faut faire attention quand on calcule une primitive aussi. Une écriture du type

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2(y) dy$$

pourrait engendrer de la confusion et suggérer que la primitive de la fonction $\sqrt{1-x^2}$ coïncide avec la primitive de la fonction \cos^2 . Ceci n'est pas vrai, car il faut composer cette dernière primitive avec la fonction réciproque du changement de variable, l'arcsinus dans ce cas.

On termine cette section par quelques remarques sur des fonctions moins connues que le sinus et le cosinus mais qui peuvent être aussi utiles dans ce genre d'intégrales.

On définit les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ces fonctions, qui sont définies tout à fait différemment (sauf si l'on considère l'expression complexe du sinus et du cosinus, $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/2$ et $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$), ont beaucoup de propriétés similaires aux fonctions trigonométriques, qui peuvent être vérifiées à la main.

On a notamment

$$\begin{aligned} \sinh' &= \cosh; & \cosh' &= \sinh; \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1; \\ \cosh(0) &= 1, & \sinh(0) &= 0; \end{aligned}$$

ainsi que des formules d'addition similaires à celles trigonométriques. Dans tous les cas, il y a des différences de signes.

Un changement de variable $x = \sinh(y)$ est très utile pour le calcul d'une primitive de $\sqrt{1+x^2}$ ainsi comme $x = \cosh(y)$ pour $\sqrt{x^2-1}$ (remarquer la différence de signe par rapport à l'exemple précédent). Évidemment, dans le calcul explicite des primitives on trouvera les fonctions réciproques du sinus et du cosinus hyperboliques, qui peuvent être obtenues en résolvant les équations

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad \text{et} \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y,$$

en mettant $X = e^x$, résolvant une équation de seconde degré, puis prenant le logarithme.

3.4.2 Fonctions rationnelles

Exemple 3.4.2. Calculer $\int_a^b \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$ et déterminer une primitive de la fonction intégrande (il faut se placer sur un intervalle qui ne touche pas les zéros de dénominateur : par souci de simplicité supposons ici $2 < a < b$).

Pour trouver cette primitive on réécrira la fonction intégrande de manière plus simple. Il est en effet possible trouver des constantes A et B telles que

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

On verra après quelles sont les critères pour exprimer une fraction du type $P(x)/Q(x)$ comme somme de fractions plus simples, et ici on se contentera de trouver explicitement ces deux constantes en résolvant un système. Pour que l'égalité qu'on cherche soit vérifiée il faut imposer

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{x^2-3x+2},$$

ce qui équivaut, en imposant l'égalité des coefficients de x et des constantes, à

$$\begin{cases} 1 = A + B, \\ 1 = -2A - B. \end{cases}$$

La solution de ce système est $A = -2$, $B = 3$. On a donc

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

et donc la primitive cherchée est donnée par

$$F(x) = -2 \ln(x-1) + 3 \ln(x-2).$$

Exemple 3.4.3. Calculer $\int_a^b \frac{x^4-2}{x^3-1} dx$ et déterminer une primitive de la fonction intégrande (là aussi, par souci de simplicité, on supposera $1 < a < b$).

On cherchera de faire une décomposition de la fraction intégrande qui s'inspire à celle de l'exemple précédent. Pour commencer, cependant, on s'aperçoit que, comme le numérateur a un degré plus élevé que le dénominateur, il sera possible de sortir des termes de la fraction. On a en effet $x^4 - 2 = x(x^3 - 1) + x - 2$ et donc

$$\frac{x^4 - 2}{x^3 - 1} = x + \frac{x - 2}{x^3 - 1}.$$

On est bien capable de calculer une primitive de x et ce qui nous reste à faire est calculer une primitive de la fraction qu'on a obtenu. L'avantage est qu'on a réduit le degré du numérateur. Ceci peut être toujours fait si l'on a $P(x)/Q(x)$ et $\deg P \geq \deg Q$: grâce à $P = P_1Q + P_2$ (division euclidienne des polynômes avec un reste) on arrive à des fractions avec $\deg P_2 < \deg Q$.

Tout à l'heure on avait décomposé la fraction comme une somme de termes plus simples dont les dénominateurs étaient les facteurs du dénominateur initial. Ici, si l'on veut faire une décomposition en facteurs de degré 1, il faudrait passer aux complexes et utiliser $x^3 - 1 = (x-1)(x+1/2 - i\sqrt{3}/2)(x+1/2 + i\sqrt{3}/2)$. Pourtant, si le but est prendre des primitives plus faciles et passer notamment aux logarithmes, ceci n'est pas très utile car $\ln(x+1/2 - i\sqrt{3}/2)$ ne signifie rien ! On est donc forcé à garder la décomposition réelle $(x^3 - 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Il ne sera pas possible alors d'espérer de trouver une décomposition du type

$$\frac{x-2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + Bx^2 + x + 1$$

car le résultat à droite ne dépend que de deux paramètres, alors que à droite on aurait pu avoir a priori n'importe quelle fraction P_2/Q avec $\deg P_2 < 3$ (un résultat qui dépend donc de trois paramètres, les trois coefficients de P_2).

La décomposition qui sera vraie sera par contre la suivante :

$$\frac{x-2}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Pour calculer les coefficients A , B et C (et au même temps démontrer leur existence, car on n'a pas évoqué des théorèmes généraux qui l'assurent) il faut imposer

$$x-2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1),$$

ce qui signifie

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ 1 = A - B + C \\ -2 = A - C. \end{cases}$$

Ici aussi la solution est simple (il suffit de trouver A en sommant les trois lignes) : $A = -1/3$, $B = 1/3$ et $C = 5/3$. On ne détaillera pas tous les calculs ici mais on veut seulement montrer comment on peut intégrer les fonctions qui apparaissent. Il n'y a pas de problèmes à intégrer $A/(x-1)$, qui donnera lieu à un logarithme. Concernant la partie $(Bx+C)/(x^2+x+1)$, on commence en écrivant le numérateur comme $\lambda(2x+1)+\mu$ (ce qui est possible en prenant $\lambda = B/2$ et $\mu = C - B/2$). Pourquoi ? parce que la première partie est facile à intégrer. On a en effet la fraction $(2x+1)/(x^2+x+1)$, qui a la propriété que le numérateur est la dérivée du dénominateur. Chaque fois qu'on a u'/u la primitive est $\ln(u)$ et ceci est facile à vérifier en dérivant. Ici on aurait donc $\lambda \ln(x^2+x+1)$. Il nous reste à trouver une primitive de $1/(x^2+x+1)$. Plus en général on voudrait trouver une primitive de toute fraction du type

$$\frac{1}{\text{polynôme de degré 2 sans racines réelles}}.$$

Le cas typique est celui de la primitive $1/(1+x^2)$, qui est donnée par la fonction $\arctan(x)$. Tout autre cas peut se ramener à celui-ci, grâce à une écriture du type

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

et plus en général

$$Q(x) = c_1(x-x_0)^2 + c_2.$$

Il est toujours possible écrire un polynôme de degré deux sous cette forme (on trouve c_1 d'après le coefficient de x^2 , puis x_0 pour faire en sorte que le double produit du carré égalise le terme en x , puis c_2 par différence). Dans le cas d'un polynôme sans racines réelles on aura $c_1 c_2 > 0$. Ceci dit que, à un coefficient près, on peut se ramener à x^2+1 . Ici on a

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

et une primitive sera donc donnée par

$$F(x) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right).$$

En composant tous ces résultats on peut trouver une primitive de la fonction donnée et en calculer l'intégrale. Dans le résultat il y aura un polynôme (qui vient de la partie qui est sortie de la fraction), un logarithme de $x-1$, un logarithme de x^2+x+1 , une arcotangente.

On verra un dernier exemple et on donnera en suite une recette pour intégrer toute fonction rationnelle.

Exemple 3.4.4. Calculer $\int_a^b \frac{1}{(x^3-1)^2} dx$ et déterminer une primitive de la fonction intégrande. Il est encore sous-entendu que l'intervalle ne touche pas les zéros de la fonction. De plus, on met 1 au numérateur par simplicité car on a vu que la technique à utiliser dépend fortement du dénominateur et de sa factorisation, et le numérateur n'influence que les constantes qui apparaissent dans les fractions plus simples qu'on va trouver.

Ici le problème est que la factorisation du dénominateur admet des facteurs multiples. En effet on a

$$(x^3-1)^2 = (x-1)^2(x^2+x+1)^2 = (x-1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2+x+1).$$

Si on cherchait d'écrire

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1},$$

on s'apercevrait que le résultat à droite ne dépend que de $A + B$, $C + E$ et $D + F$, donc d'un nombre trop petit de variables. On ne pourra pas s'en sortir comme ça, par conséquent.

Dans le cas de facteurs multiples la décomposition est un peu plus subtile. On peut écrire

$$\frac{1}{(x^3 - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + x + 1)^2},$$

c'est-à-dire on obtient une décomposition avec des fractions dont les dénominateurs ont les facteurs du dénominateur original $Q(x)$, à une puissance qui va de un jusqu'à la puissance qu'on voit dans Q , et dont le numérateur est une constante s'il s'agit d'un facteur de premier degré et un polynôme de degré un si le facteur est de degré deux.

En résolvant le système on peut voir qu'il admet une solution unique et la trouver. On s'intéresse maintenant à montrer que toute fraction qu'on a écrite est facile à intégrer. C'est évidemment le cas de $1/(x - 1)$, qui donne lieu à $\ln(x - 1)$, et de $1/(x - 1)^2$, qui donne lieu à $-1/(x - 1)$. On a déjà vu comment traiter $(Ax + B)/(x^2 + x + 1)$, en le décomposant en une partie avec $(2x + 1)/(x^2 + x + 1)$, qui donne $\ln(x^2 + x + 1)$, et une avec $1/(x^2 + x + 1)$, qui donne un résultat du type $c_1 \arctan(c_2(x - x_0))$. Il nous reste la dernière fraction. Là aussi on peut dire $Ex + F = \lambda(2x + 1) + \mu$ (toujours grâce à la division de polynômes). La partie avec $(2x + 1)/(x^2 + x + 1)^2$ donne tout simplement $-1/(x^2 + x + 1)$. Pour l'autre il faut faire le même changement de variable qui passe par l'écriture de $x^2 + x + 1$ comme $c_1 + c_2(x - x_0)^2$ et qui nous ramène à $1/(1 + x^2)^2$ et se référer à l'exemple suivant.

Exemple 3.4.5. Donner une formule récursive pour $\int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$.

On appellera $I_n(a, b)$ cette intégrale, qu'on sait calculer pour $n = 0$ et 1 . On cherchera une relation entre I_n et I_{n+1} . On a

$$\int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_a^b \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = I_{n+1}(a, b) + \int_a^b x \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} dx.$$

On intégrera par partie la dernière expression, en prenant $f(x) = x$ et $g'(x) = x/(1+x^2)^{n+1}$, ce qui donne $f'(x) = 1$ et $g(x) = -(1+x^2)^{-n}/(2n)$. On a donc

$$\int_a^b x \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{1}{2n} \int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \frac{b}{2n(1+b^2)^n} + \frac{a}{2n(1+a^2)^n} = \frac{I_n(a, b)}{2n} - \frac{b}{2n(1+b^2)^n} + \frac{a}{2n(1+a^2)^n}.$$

Ceci nous dit

$$= I_{n+1}(a, b) = I_n(a, b) \left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{b}{2n(1+b^2)^n} - \frac{a}{2n(1+a^2)^n}.$$

On peut résumer la recette qu'on a construit avec les derniers exemples.

Recette pour l'intégration d'une fonction rationnelle $P(x)/Q(x)$:

- diviser P par Q en obtenant $P = P_1Q + P_2$ et donc $P(x)/Q(x) = P_1(x) + P_2(x)/Q(x)$;
- P_1 est facile à intégrer ;
- factoriser Q sous la forme $Q = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_m^{\alpha_m} Q_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdots Q_k^{\alpha_k}$, où les Q_i avec $i \leq m$ sont des polynômes de degré un et les Q_i avec $i \geq m + 1$ sont des polynômes de degré deux sans racines réelles ; les correspondants α_i leurs exposants dans la factorisation ;
- écrire

$$\begin{aligned} \frac{P_2(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{Q_1(x)} + \cdots + \frac{A_{1,\alpha_1}}{Q_1(x)^{\alpha_1}} + \cdots + \frac{A_{m,1}}{Q_m(x)} + \cdots + \frac{A_{m,\alpha_m}}{Q_m(x)^{\alpha_m}} \\ &+ \frac{A_{m+1,1} + B_{m+1,1}x}{Q_{m+1}(x)} + \cdots + \frac{A_{m+1,\alpha_{m+1}} + B_{m+1,\alpha_{m+1}}x}{Q_{m+1}(x)^{\alpha_{m+1}}} + \cdots \\ &+ \frac{A_{k,1} + B_{k,1}x}{Q_k(x)} + \cdots + \frac{A_{k,\alpha_k} + B_{k,\alpha_k}x}{Q_k(x)^{\alpha_k}}, \end{aligned}$$

- c'est-à-dire en mettant au dénominateur tous les facteurs Q_i et en les prenant à une puissance entre un et leur α_i , et au numérateur soit des constantes (si $\deg Q_i = 1$), soit des polynômes de degré un (si $\deg Q_i = 2$);
- tous les termes du type A/Q_i^β avec $\deg Q_i = 1$ sont faciles à intégrer et donnent soit un logarithme ($\beta = 1$), soit une puissance négative de Q_i ;
 - tous les termes du type $(A + Bx)/Q_i^\beta$ avec $\deg Q_i = 2$ se décomposent en $\lambda Q_i'/Q_i^\beta + \mu/Q_i^\beta$.
 - tous les termes du type $\lambda Q_i'/Q_i^\beta$ sont faciles à intégrer et donnent soit $\ln(Q_i)$ (si $\beta = 1$), soit une puissance négative de Q_i ;
 - pour les termes μ/Q_i^β on utilise $Q_i(x) = c_1 + c_2(x - x_0)^2$ pour se ramener à $1/(1 + x^2)^\beta$ à des coefficients près, et puis on utilise le résultat de récurrence de l'exemple 3.4.5

3.4.3 Fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques

On montre maintenant une technique pour transformer pas mal d'intégrales avec les sinus et les cosinus en d'intégrales de fonctions rationnelles.

Exemple 3.4.6. Calculer $\int_a^b \frac{\sin^3(x) - \cos^4(x)}{\sin(x) \cos(x) + 2 \cos^3(x)} dx$ et déterminer une primitive de la fonction intégrande.

L'idée pour calculer cette intégrale (qu'on ne développera pas en détails) et la suivante : le sinus et le cosinus peuvent s'exprimer assez bien à l'aide d'une quantité magique commune, qui est $t = \tan(x/2)$, et cela donne lieu à un changement de variable assez puissant.

On a

$$\sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = 2 \tan(x/2) \cos^2(x/2) = \frac{2t}{1+t^2},$$

grâce à l'égalité $\cos^2 = 1/(1 + \tan^2)$. De même, on a

$$\sin(x) = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos^2(x/2) (1 - \tan^2(x/2)) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

Faisons donc le changement de variable $t = \tan(x/2)$, qui implique $x = 2 \arctan(t)$. Il faut remplacer tous les sinus et les cosinus par les expressions qu'on a trouvées, qui sont des fonctions rationnelles de t . De plus, il faut remplacer dx par $2dt/(1+t^2)$, grâce à la formule de changement de variable qui fait apparaître une dérivée. Celle-ci aussi est une fonction rationnelle de t . Dans notre cas on se ramènerait à une intégrale du type

$$\int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^4}{\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^4} \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Comme $1 + t^2$ apparaît au dénominateur un peu partout, il est possible de le simplifier dans pas mal d'endroits. Attention : on pourrait se demander comment peut-on obtenir des sinus et des cosinus quand on calcule cette primitive et on la rédérive, si dans les formules pour les fonctions rationnelles ils n'apparaissent jamais... la réponse est évidemment qu'il faut faire gaffe aux bornes, car il faut remplacer a par $\tan(a/2)$ et b par $\tan(b/2)$.

3.5 Applications des intégrales aux développements limités

On termine le long discours sur les intégrales avec deux applications aux DL. La première sort de la question suivante : on connaît les DL de la fonction $1/(1 + x^2)$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

Peut-on déduire d'ici les DL de sa primitive, la fonction arctangente ? On imagine trouver

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

La réponse est oui et elle est assez générale.

Théorème 3.5.1. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui admet un développement limité d'ordre n au point $x_0 \in A : f(x) = p(x) + o((x - x_0)^n)$ avec p un polynôme de degré n . Soient F et P des primitives de f et p , respectivement, avec $P(x_0) = 0$ (c'est-à-dire on a forcément $P(x) = \int_{x_0}^x p(t)dt$). Alors on a le DL suivant

$$F(x) = F(x_0) + P(x) + o((x - x_0)^{n+1}).$$

Démonstration. On veut montrer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0) - P(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0$. Soit $H(x) = F(x) - F(x_0) - P(x)$. On sait $H(x_0) = 0$ et $H'(x) = f(x) - p(x)$. Comme on a $f(x) - p(x) = o((x - x_0)^n)$, on peut dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, si $|y - x_0| < \delta$, alors $|H'(y)| < \varepsilon|y - x_0|^n$. Prenons maintenant $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Grâce au théorème des accroissements finis on a $|H(x)| = |H(x) - H(x_0)| = |x - x_0||H'(\xi)|$ avec $\xi \in]x_0, x[\subset]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Donc $|H'(\xi)| \leq \varepsilon|\xi - x_0|^n \leq \varepsilon|x - x_0|^n$ et finalement $|H(x)| \leq \varepsilon|x - x_0|^{n+1}$. Ceci montre exactement que la quantité $H(x)/(x - x_0)^{n+1}$ tend vers zéro lorsque $x \rightarrow x_0$ et conclut la preuve. \square

Dernière application des intégrales, la fameuse Formule de Taylor avec reste intégrale, qui est celle, parmi les Formules de Taylor, qui donne l'expression du reste la plus précise. Dans la formule de Taylor-Young on avait en fait un terme en $o((x - x_0)^n)$, qui n'est guère précis mais donne seulement des informations sur son comportement local autour de x_0 ; la formule de Taylor-Lagrange donnait une vraie égalité mais avec un terme $f^{n+1}(\xi)(x - x_0)^{n+1}/(n + 1)!$, où le point ξ n'est pas précisé; cette formule donnera par contre une égalité explicite. Par contre, elle demandera plus de régularité pour pouvoir l'appliquer.

Théorème 3.5.2. Soit $f \in C^{n+1}(A)$ et $x_0 \in A$. Alors pour tout $x \in A$ on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Démonstration. Le théorème sera démontré par récurrence sur n . Si $n = 0$ il faut démontrer que pour toute fonction C^1 on a $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt$ et ceci est vrai comme conséquence du théorème fondamental du calcul. Le fait que f' soit continue est justement la bonne hypothèse pour l'appliquer.

Supposons que le résultat soit vrai pour un certain rang n . Passons au rang suivant : il faut prendre $f \in C^{n+2}(A)$. Mais alors $f \in C^{n+1}(A)$ et on peut appliquer le résultat au rang n . On obtient bien

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Dans la dernière intégrale il y a un produit qu'on peut traiter grâce à une intégration par partie. Soit $h(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $g(t) = (x - t)^n$. Grâce à l'hypothèse $f \in C^{n+2}(A)$ la fonction h est C^1 et on a $h'(t) = f^{(n+2)}(t)$, ainsi que $g(t) = -(x - t)^{n+1}/(n + 1)$.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt &= \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1} f^{(n+2)}(t)dt - \left[f^{(n+1)}(t) \frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)} \right]_{x_0}^x \\ &= \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1} f^{(n+2)}(t)dt + f^{(n+1)}(x_0) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)}. \end{aligned}$$

Par conséquent on peut transformer l'égalité d'en haut en

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ & + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Equations différentielles

Dans ce chapitre on va s'occuper d'un type d'équations, très courant en mathématiques mais encore plus dans les applications, où l'inconnue est une fonction et la condition qu'elle doit satisfaire est une égalité concernant la fonction et ses dérivées, égalité qui doit être satisfaite partout sur le domaine de définition de la fonction. Bien évidemment, pour que cela ait un sens, il faut chercher parmi les fonctions de classe C^k avec un k suffisamment grand pour que toutes les dérivées qui apparaissent dans l'équation soient bien définies.

Un exemple typique d'équation différentielle pourrait être le problème "chercher une fonction qui coïncide avec sa dérivée", c'est-à-dire résoudre $f' = f$. Ce problème a une solution évidente (l'exponentielle, comme on sait bien si on connaît toutes les blagues débiles sur les fêtes de fonctions où l'exponentielle est bien sûre que l'intégrer ou la dériver ne lui ferait rien). On peut quand même se demander si celle là est la seule solution (réponse : non, car $f(x) = 2e^x$ l'est aussi) ou si toute solution est un multiple de l'exponentielle (réponse : oui, mais pourquoi?).

Un autre exemple, qui est tout à fait courant en physique, est celui de l'équation de l'oscillateur harmonique $f'' = -f$. Ici les solutions sont des sinus et de cosinus.

Dans ce chapitre (et dans les trois cours qui seront dédiés à ça en amphi) on s'occupera principalement de technique de calcul des solutions. Les questions d'existence, unicité et des propriétés qualitatives des solutions dans des cas où l'on n'est pas capables de les trouver explicitement ne seront pas traitées et il faudra attendre les cours de deuxième année.

L'équations dans sa forme la plus générale sera du type

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots; f^{(n)}(x)) = 0, \quad \text{pour tout } x \in A; \quad f : A \rightarrow \mathbb{R}.$$

La plus part des techniques qu'on verra auront le but de trouver en général toutes les solutions (qui, comme on a vu, ne sont pas uniques) de l'équation. Parfois, on se concentrera par contre (ce qui est le bon cadre pour les théorèmes le plus abstraits auxquels on ne touchera pas) sur ce qui s'appelle le Problème de Cauchy : chercher $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, solution de

$$\begin{cases} F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots; f^{(n)}(x)) = 0; \\ f(x_0) = u_0; \\ f'(x_0) = u_1; \\ \dots \\ f^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}; \end{cases}$$

où A est un voisinage de x_0 . Le fait de donner les valeurs de f et des dérivées jusqu'à la $(n-1)$ -ième est naturel : si on en donne plus on risque d'être contradictoire avec l'équation; non seulement, grâce à l'équation on arrive en général à déduire la valeur de la dérivée successive (la n -ième) et, en dérivant, des successives encore. Ceci montre que c'est justement à partir

de cette quantité de données qu'on arrive à déduire des informations en plus sur une solution éventuelle et qu'on peut espérer un résultat d'unicité.

4.1 Equations linéaires à coefficients constants

4.1.1 Equations homogènes

On commencera par le cas le plus simple, celui des équations linéaires homogènes à coefficients constants, c'est à dire des équations du type

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0. \quad (4.1)$$

Le mot "homogène" se réfère au fait qu'on " $= 0$ " et non pas " $= g(x)$ ", et l'expression "à coefficients constants" au fait que les a_i ne sont pas des fonctions de la variable x mais des nombres.

Sur ce genre d'équations un résultat très important est le suivant :

Théorème 4.1.1. *L'ensemble des solutions de l'équation (4.1) est un espace vectoriel de dimension n , sous la condition que a_n soit non nul.*

On ne donnera pas la démonstration de ce théorème, mais on se limitera à le commenter, de façon à suggérer qu'il est raisonnable.

D'abord il est facile de voir que si f_1 et f_2 sont solutions alors toute combinaison linéaire $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ l'est aussi. Ceci montre que cet ensemble est un espace vectoriel.

Puis on utilisera un résultat d'existence et unicité concernant le Problème de Cauchy, qu'on ne va ni préciser ni évoquer plus que ça ici. En utilisant ce résultat, on peut bien voir que la correspondance $f \mapsto (f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0))$ est bijective si restreinte à l'ensemble des solutions de (4.1). De plus, elle est linéaire. Et son espace d'arrivée est un espace vectoriel de dimension n . Ceci montre que l'ensemble des solutions l'est aussi.

Ce résultat apparemment théorique est en vrai très utile pour la recherche des solutions. En effet, si jamais on trouve n solutions f_1, \dots, f_n différentes et indépendantes de (4.1), après elles forment certainement une base de l'ensemble des solutions et toutes solutions s'écrivent comme $\sum_{i=1}^n A_i f_i$. Les coefficients A_i , dans le cas d'un Problème de Cauchy, peuvent se trouver en imposant les conditions initiales (ce qui revient à résoudre un système linéaire).

On regarde maintenant une méthode précise pour résoudre ce genre d'équations.

Etape 1 : chercher des solutions du type $e^{\lambda x}$.

Le solution sous la forme d'exponentielle sont faciles à détecter car $f(x) = e^{\lambda x}$ résout (4.1) si et seulement si

$$0 = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \left(\sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \right) = e^{\lambda x} P(\lambda),$$

où P est le polynôme associé à l'équation (4.1), donné par $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$.

Comme le facteur exponentiel $e^{\lambda x}$ n'est jamais nul, pour trouver une solution ce qu'on doit regarder est si λ est une racine de P (si $P(\lambda) = 0$).

Donc, première chose à faire : écrire le polynôme associé et en trouver les racines.

Etape 2, premier cas : les n racines sont distinctes

Si le polynôme admet n racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ on a fini : les fonctions $f_i(x) = e^{\lambda_i x}$ sont solutions de l'équation et sont une famille indépendante. Donc on trouve toutes les solutions sous la forme $\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i x}$. Si notre but était de trouver toutes les solutions alors on a fini, elles

sont toutes les fonctions de cette forme. Si par contre on veut résoudre un problème de Cauchy ou l'on a des conditions en plus sur la fonction à chercher (valeur en plusieurs points...) il faut qu'on cherche les valeurs des coefficients A_i de façon à satisfaire ces conditions.

Exemple 4.1.1. Résoudre

$$\begin{cases} f'' = f; \\ f(0) = 0; \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

Le polynôme associé à l'équation $f'' - f = 0$ est $P(z) = z^2 - 1$ et ses racines sont ± 1 . Les fonctions e^x et e^{-x} forment ainsi une base de l'espace des solutions de l'équation. Toute solution est donc de la forme $Ae^x + Be^{-x}$. Il faut qu'on impose les conditions sur $f(0)$ et $f(1)$. Ceci signifie

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ Ae + Be^{-1} = 1. \end{cases}$$

La solution de ce système est $A = e/(e^2 - 1)$, $B = -e/(e^2 - 1)$.

On en tire que la fonction f cherchée est la fonction

$$f(x) = \frac{e}{e^2 - 1}e^x - \frac{e}{e^2 - 1}e^{-x}.$$

Par souci de complétude, on met une démonstration de l'indépendance des solutions exponentielles.

Proposition 4.1.2. *Soient $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$, des réels distincts. Alors les fonctions $(e^{\lambda_i x})_{i=1,\dots,n}$ forment une famille indépendante.*

Démonstration. Sans perdre en généralité on peut supposer $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Supposons par l'absurde qu'il existe une combinaison linéaire nulle des exponentielles. On aurait

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i x} &= 0, \\ e^{\lambda_n x} \left(A_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} \right) &= 0, \\ A_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} &= 0. \end{aligned}$$

En passant à la limite pour $x \rightarrow +\infty$, comme tous les coefficients $(\lambda_i - \lambda_n)$ sont négatif, on trouve $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} A_i e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} = 0$. Par conséquent on en déduit $A_n = 0$. En recommençant le raisonnement avec A_{n-1} on trouve au fur et à mesure que tous les coefficients sont nuls, ce qui démontre que la famille est indépendante. \square

La démonstration qu'on vient de donner est assez élémentaire mais malheureusement utilise l'ordre sur les λ_i . Ceci signifie qu'elle ne peut pas être appliquée aux complexes. Et nous, tout ce qu'on veut faire, doit pouvoir s'appliquer à \mathbb{C} car seulement dans ce cas on est capables de garantir toujours l'existence des racines et donc de pouvoir arriver justement à n fonctions indépendantes. On donne donc une autre démonstration.

Proposition 4.1.3. *Soient $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$, des complexes distincts. Alors les fonctions $(e^{\lambda_i x})_{i=1,\dots,n}$ forment une famille indépendante.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une combinaison linéaire nulle des A_i À partir de

$$\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i x} = 0$$

on peut dériver et obtenir donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i x} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i e^{\lambda_i x} &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

En calculant toutes ces expressions (jusqu'aux dérivées $(n-1)$ -ièmes) en $x=0$ on trouve

$$\text{pour tout } j \leq (n-1) \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^j = 0.$$

Ceci signifie que si M est la matrice $M_{j,i} = \lambda_i^{j-1}$ et A le vecteur (A_1, A_2, \dots, A_n) alors on a $MA = 0$. Pourtant la matrice M est une matrice de Vandermonde et on sait qu'elle est inversible si tous les λ_i sont distinctes (notamment on sait, et c'est facile à calculer, que son déterminant est égal à $\prod_{i < h} (\lambda_i - \lambda_h)$). Donc on trouve $A = 0$ et l'indépendance est montrée. \square

Etape 2, deuxième cas : les n racines ne sont pas distinctes

On tâche ici de généraliser la méthode au cas où les racines ne sont pas distinctes. On sait n fait qu'on polynôme admet toujours des racines dans le corps \mathbb{C} et qu'on peut donc le décomposer en tant que produit des facteurs $(x - \lambda_i)$, les nombres (complexes) λ_i étant ses racines. Pourtant, il se peut que l'un de ces facteurs $(x - \lambda_i)$ apparaisse plusieurs fois. Dans ce cas, on dit que le correspondant λ_i est une racine multiple et on appelle multiplicité de λ_i l'exposant du facteur correspondant dans la factorisation du polynôme. On peut donc dire que λ est une racine de multiplicité k si

$$P(x) = (x - \lambda)^k Q(x), \quad \text{mais } P \text{ n'est pas divisible par } (x - \lambda)^{k+1}.$$

Supposons maintenant que λ est une racine de P de multiplicité k . On a alors que, non seulement $e^{\lambda x}$ est une solution de (4.1), mais que $x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$ le sont aussi. Ceci sera formellement montré dans le lemme 4.1.4 suivant.

Pourquoi on s'arrête à $k-1$? les raisons sont deux. D'abord car si on continuait on trouverait des fonctions qui ne sont plus solution. Et ceci est déjà une bonne raison. De plus, car dans un cas de racine multiple on se retrouve avec moins de racines et notamment on a remplacé k racines distinctes par la seule racine λ . Il faut donc qu'avec λ on produise k solutions différentes et indépendantes. C'est justement en s'arrêtant à $k-1$ qu'on en a créées k (on ne prouvera pas ici l'indépendance, pourtant).

En général on peut donc dire qu'une base des solutions de (4.1) est composée par

$$(x^h e^{\lambda_i x})_{i,h < \text{mult}(\lambda_i)}.$$

Toute solution est donc de la forme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{h < \text{mult}(\lambda_i)} A_{i,h} x^h e^{\lambda_i x}.$$

Observation 4.1.1. Dans tous ces calculs, ils ne faut pas avoir peur d'utiliser les nombres complexes. chaque fois qu'une exponentielle d'un nombre complexe apparaît, il faut se souvenir de sa signification : $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$; $e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$.

De plus, il peut se passer que pour trouver une solution d'une équation à coefficients réels, dont les données initiales sont réelles, on doit passer par des complexes : les coefficients inconnus A_i étant complexes eux-aussi, ils ne faut pas s'inquiéter, car il donneront lieu à des simplifications en faisant disparaître la partie imaginaire.

En alternative, on a le droit de remplacer les exponentielles complexes par des sinus et des cosinus, grâce au fait que les fonctions de la forme

$$Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x}, \quad A, B \in \mathbb{C}$$

coïncident avec les fonctions de la forme

$$Ce^{ax} \cos(bx) + De^{ax} \sin(bx), \quad C, D \in \mathbb{C}.$$

Il et par exemple bien connu que les solutions de l'équation $f'' + f = 0$ sont les sinus, les cosinus et leurs combinaisons linéaires, et ceci ne demande pas forcément de passer par e^{ix} et e^{-ix} .

Lemme 4.1.4. *Si $P(z) = (z - \lambda)^k Q(z)$ alors les fonctions $x^h e^{\lambda x}$ avec $h \leq k - 1$ sont solutions de l'équation homogène.*

Démonstration. La preuve sera très formelle et abstraite. Appelons D l'opérateur qui associe à chaque fonction sa dérivée. D^2 sera l'opérateur qui associera la dérivée seconde, $3D + D^2 + 1$ celui qu'à f associera $3f' + f'' + f$ etc... Avec et opérateur et ses puissances on peut créer toutes les dérivées et des combinaisons de dérivées. Pour qu'une fonction f soit solution de l'équation il faut que $P(D)$ appliqué à f fasse zéro. Considérons d'abord l'action de $D - \lambda$ sur une fonction du type $x^h e^{\lambda x}$:

$$(D - \lambda)(x^h e^{\lambda x}) = hx^{h-1} e^{\lambda x} + \lambda x^h e^{\lambda x} - \lambda x^h e^{\lambda x} = hx^{h-1} e^{\lambda x}.$$

Ceci montre que cet opérateur, si il prend une fonction du type $x^h e^{\lambda x}$, la transforme en une fonction du même type, en baissant l'exposant de x et en multipliant fois un coefficient. En appliquant plusieurs fois l'opérateur on arrivera, après h itérations, à une fonction du type $Ce^{\lambda x}$, qui sera annulée par l'itération suivante. Donc, si le h initiale est inférieur au nombre d'itérations de $D - \lambda$, le résultat final est nul.

On peut vérifier que le règles usuelles de calcul avec le polynôme sont vraies pour ces opérateurs différentiels et donc quand on fait $P(D)(f)$ on peut très bien faire $Q(D)(D - \lambda)^k(f)$. Toute fonction $f(x) = x^h e^{\lambda x}$ avec $h \leq k - 1$ est donc solution de $P(D)(f) = 0$. \square

quelque chose qu'on peut suivre mieux, de manière moins abstraite, mais qui aussi important est la proposition suivante, qui sera démontrée en reprenant la preuve de la Proposition 4.1.2

Proposition 4.1.5. *Soient $(\lambda_i)_{i=1, \dots, n}$, des réels distincts et n_i des nombres naturels. Alors les fonctions $(x^j e^{\lambda_i x})_{i=1, \dots, n, j \leq n_i}$ forment une famille indépendante.*

Démonstration. Sans perdre en généralité on peut supposer $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Supposons par l'absurde qu'il existe une combinaison linéaire nulle des exponentielles. On écrit

$$\sum_{i \leq n, j \leq n_i} A_{i,j} x^j e^{\lambda_i x} = 0.$$

Puis on va définir (i_0, j_0) de la manière suivante :

$$i_0 = \max\{i : \exists j : A_{i,j} \neq 0\}, \quad j_0 = \max\{j : A_{i_0,j} \neq 0\}.$$

En reprenant la stratégie de la Proposition 4.1.2 on peut écrire

$$x^{j_0} e^{\lambda_{i_0} x} \left(A_{i_0, j_0} + \sum_{i \leq n, j \leq n_i, (i, j) \neq (i_0, j_0)} A_{i, j} x^{j-j_0} e^{(\lambda_i - \lambda_{i_0}) x} \right) = 0,$$

$$A_{i_0, j_0} = - \sum_{i \leq n, j \leq n_i, (i, j) \neq (i_0, j_0)} A_{i, j} x^{j-j_0} e^{(\lambda_i - \lambda_{i_0}) x}.$$

En passant à la limite pour $x \rightarrow +\infty$, tous les termes à droite tendent vers 0 par croissance comparée, alors que A_{i_0, j_0} a été choisi de manière à être non nul. Ceci donne une contradiction et démontre qu'il n'y a pas de combinaison linéaire nulle (sauf celle avec tous les coefficients nuls). \square

4.1.2 Equations non homogènes

On passe maintenant au cas des équations du type

$$a_n f^{(n)}(x) + a_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = g(x). \quad (4.2)$$

Ces équations présentent pas mal d'analogies avec les équations homogènes. Mais il y a des choses qui ne sont plus vraies. Notamment, l'ensemble des solutions n'est plus un espace vectoriel. Ceci est évident car la fonction nulle n'y appartient pas. Et tout espace vectoriel contient 0.

Pourtant, ce qui est vrai est le suivant

Proposition 4.1.6. *Si f_1 et f_0 sont solutions de (4.2), alors $f_1 - f_0$ est solution de (4.1).*

Ce résultat ne mérite d'être démontré, il suffit de faire la différence entre l'équation satisfaite par f_1 et celle satisfaite par f_0 . On en tire le critère suivant pour résoudre (4.2) : d'abord il faut chercher une solution quelconque f_0 de l'équation, qui ne satisfasse pas forcément les données initiales ou les conditions en plus qu'on a éventuellement, puis on cherche des solutions du type $f_0 + f$, où f est une solution de (4.1) que l'on peut trouver d'après la méthode précédente et qui dépendra de n paramètres, qui seront à choisir de façon à satisfaire les données.

La recherche de f_0 est ce qu'on appelle la recherche d'une solution particulière mais en fait f_0 n'est pas vraiment une solution particulière, plutôt une solution quelconque, et évidemment n'est pas unique. N'importe quelle solution de l'équation pourrait marcher et l'idée c'est de chercher la plus facile.

Dans des cas faciles il est possible de la deviner, comme dans les suivants.

Exemple 4.1.2. Considérons l'équation $f'' + f = 2$. On peut donc choisir $f_0 = 2$.

Exemple 4.1.3. Considérons l'équation $f'' + f = e^x$. On peut donc choisir $f_0 = \frac{1}{2}e^x$.

Ce dernier exemple est à la base de la méthode suivante qu'on détaillera, qui peut marcher chaque fois que g est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle.

Méthode pour la recherche d'une solution particulière si $g(x) = Q(x)e^{\lambda x}$

Comme d'hab dans cette section, on donnera pas de justifications théoriques aux méthodes qu'on va détailler. La meilleure interprétation de ça est la suivante : utilisez ceci comme des suggestions pour trouver des solutions ; en faisant les calculs, vous verrez que vous en trouvez bien une !

Pour chercher une solution de

$$\sum_{i=0}^n a_i f^{(i)}(x) = Q(x)e^{\lambda x}$$

on la cherchera parmi les fonctions du type $f_0(x) = R(x)e^{\lambda x}$, où R est lui aussi un polynôme. Ceci restreint déjà l'étendue de la recherche, mais pour se ramener à chercher seulement un petit

nombre de paramètres, on veut donner des estimations sur le degré du polynôme R . Et voilà

$$\deg(R) \leq \deg(Q) + \text{mult}_P(\lambda),$$

c'est-à-dire qu'on cherche R parmi les polynômes dont le degré est borné par la somme de celui de Q et de l'éventuelle multiplicité de λ en tant que racine de P . Exemple, si l'équation est

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = (x + 2)e^{-x},$$

alors on a

$$P(z) = z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2; \quad Q(x) = x + 2, \quad \deg(Q) = 1, \quad \lambda = -1, \quad \text{mult}_P(\lambda) = 2.$$

Il faudra alors chercher R parmi les polynômes de degré $1 + 2 = 3$. On cherchera donc une solution du type $(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$. Pourtant on sait que les termes du type $(cx + d)e^{-x}$ sont justement solutions de l'équation homogène, ce qui implique que les mettre ou non dans une solution particulière est indifférent (car ils e changent pas le résultat). Donc il vaut mieux chercher des solutions du type $(ax^3 + bx^2)e^{-x}$. De toute façon, en rajoutant les solutions de l'homogène, on récupérera les termes en $(cx + d)$ aussi. Comme ça le nombre de paramètres reste toujours le même.

Observation 4.1.2. De la nature linéaire de l'équation on tire que la même méthode peut être utilisée chaque fois qu'on a un terme du type $g(x) = Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + Q_2(x)e^{\lambda_2 x}$, en trouvant séparément deux solutions particulières f_1 et f_2 qui résolvent

$$\sum_{i=0}^n a_i f_1^{(i)}(x) = Q_1(x)e^{\lambda_1 x}; \quad \sum_{i=0}^n a_i f_2^{(i)}(x) = Q_2(x)e^{\lambda_2 x},$$

ce qui entraîne

$$\sum_{i=0}^n a_i (f_1 + f_2)^{(i)}(x) = g(x).$$

Observation 4.1.3. Avant de faire un exemple, une remarque sur les fonctions trigonométriques. Le même raisonnement marche pour des cas où l'on remplace les exponentielles par des sinus ou des cosinus. On peut notamment utiliser $Q(x) \sin kx = \text{Im}(Q(x)e^{(ik)x})$ et $Q(x) \cos kx = \text{Re}(Q(x)e^{(ik)x})$ (si Q est à coefficients réels) ou bien

$$Q(x) \sin kx = Q(x) \frac{e^{(ik)x} - e^{-(ik)x}}{2i}; \quad Q(x) \cos kx = Q(x) \frac{e^{(ik)x} + e^{-(ik)x}}{2}.$$

Dans le premier cas il suffit de résoudre l'équation avec e^{ikx} et puis prendre la partie réelle (ou imaginaire) de la solution. Dans le deuxième il faut par contre se référer à la remarque précédente pour gérer la somme de deux termes produit de polynôme et d'exponentielle.

Exemple 4.1.4. On considérera l'équation suivante.

$$f''(x) + f(x) = (x + 1) \sin x.$$

Grâce à l'observation 4.1.3, on peut voir ça comme

$$f''(x) + f(x) = \text{Im} \left((x + 1)e^{ix} \right).$$

On cherchera une solution f_0 de l'équation (complexe)

$$f''(x) + f(x) = (x + 1)e^{ix},$$

où l'on a $\lambda = i$ qui est une racine du polynôme P ($P(z) = z^2 + 1$) de multiplicité un. Le polynôme Q étant de degré un, on cherchera donc R de degré deux. Mieux, on le cherchera du type $ax^2 + bx$. Pour que $f_0(x) = R(x)e^{ix}$ soit solution il faut calculer ses dérivées

$$f_0'(x) = R'(x)e^{ix} + iR(x)e^{ix}; \quad f_0''(x) = R''(x)e^{ix} + 2iR'(x)e^{ix} - R(x)e^{ix}.$$

e imposer que l'équation soit satisfait, donc

$$(R''(x) + 2iR'(x)) e^{ix} = (x + 1)e^{ix}.$$

Ceci impose l'équation $R''(x) + 2iR'(x) = x + 1$. comme on voit, e polynôme R ne rentre que par ses dérivées. Si on l'écrit sous la forme $ax^2 + bx$ on trouve

$$2a + 2i(2ax + b) = x + 1,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 4ia = 1; \\ 2a + 2ib = 1. \end{cases}$$

La solution de ce système est $a = -i/4$, $b = 1/4 - i/2$. Une solution particulière est donc de la forme

$$f_0(x) = \frac{1}{4} \left(-ix^2 + (1 - 2i)x \right) e^{ix}.$$

Si notre but était de trouver sa partie imaginaire pour trouver une solution particulière de l'équation avec le sinus, alors il faut calculer la partie imaginaire d'un produit. Attention, il ne suffit pas de remplacer e^{ix} par $\sin x$. Il ne suffit pas non plus de faire le produit des parties imaginaires! Comme on a

$$f_0(x) = \frac{1}{4}x \cos x + \frac{1}{4}(x^2 + 2x) \sin x - \frac{1}{4}i(x^2 + 2x) \cos x - \frac{1}{4}ix \sin x$$

on en déduit

$$\text{Im}(f_0(x)) = -\frac{1}{4}(x^2 + 2x) \cos x - \frac{1}{4}x \sin x,$$

ce qui nous donne la solution particulière cherchée. Pour trouver toute solution il suffit de prendre

$$\frac{1}{4}(x^2 + 2x) \cos x - \frac{1}{4}x \sin x + A \cos x + B \sin x.$$

Pourquoi a-t-on pris des sinus et des cosinus comme base des solutions de l'homogène et non pas e^{ix} et e^{-ix} ? parce que c'est la même choses. On peut trouver sinus et cosinus à partir des exponentielles complexes et viceversa. Évidemment, il faut utiliser des coefficients complexes.

Méthode de la variation des constantes

Cette méthode vise à chercher une solution particulière pour une fonction g générale. Comme on verra, la même méthode pourrait donner la solution générale aussi (elle inclut quelque part les coefficients des solutions de l'homogène), mais on a toujours le droit de l'utiliser pour chercher une solution particulière et rajouter les solutions de l'homogène après.

L'idée est la suivante et on la verra d'abord sur un exemple d'ordre deux.

Exemple 4.1.5. Trouver toutes les solutions de

$$f''(x) + f(x) = g(x) := \frac{1}{1 + x^2}.$$

Si l'équation était homogène, les solutions auraient été $A \sin x + B \cos x$. La méthode de la variation des constantes suggère de chercher de solution de l'équation avec g parmi les fonctions du type $f_0(x) = A(x) \sin x + B(x) \cos x$. Il faut remarquer que cela n'est pas du tout restrictif. Ce n'est pas comme toute à l'heure, quand on cherchait des solutions du type polynôme fois exponentielle : celle condition-là était bien une restriction, alors que pour l'instant ici on n'a rien imposé, car toute fonction peut s'écrire sous la forme $A(x) \sin x + B(x) \cos x$. Pourtant, d'un côté cette écriture sera plus pratique, car les conditions sur $A(x)$ et $B(x)$ seront plus facile à exprimer, et d'autres côté les conditions seront imposées plus tard.

Ce genre de méthode, chercher une solution particulière dans une classe plus restreinte, est un peu comme un pari : le plus on met de conditions, le plus difficile c'est de trouver une solution, alors qu'il sera plus facile de développer les calculs, surtout si les conditions qu'on mettra imposeront une valeur nulle à des termes.

Ici, comme toujours, si l'on veut vérifier si f_0 est une solution de l'équation, il faut qu'on calcule ses dérivées. On commence par la dérivée première.

$$f_0'(x) = A'(x) \sin x + B'(x) \cos x + A(x) \cos x - B(x) \sin x.$$

On décide maintenant, de manière complètement arbitraire d'imposer une condition de simplification. On impose que les termes avec A' et B' donnent une contribution nulle. Ceci nous simplifiera les calculs. Donc on impose que A et B satisfassent

$$A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = 0,$$

ce qui implique

$$f_0'(x) = A(x) \cos x - B(x) \sin x; \quad f_0''(x) = A'(x) \cos x + B'(x) \sin x - A(x) \sin x - B(x) \cos x.$$

On met maintenant les termes qu'on a trouvés dans l'équation, et, en calculant $f_0'' + f_0$, on a des termes qui s'effacent et on trouve

$$A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = g(x).$$

Celle-ci est la deuxième condition à imposer. Comme on a deux inconnus à chercher, A et B , c'est raisonnable d'imposer deux conditions. Les calculs qu'on a faits montrent que, si le système suivant est satisfait

$$\begin{cases} A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = 0, \\ A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = g(x), \end{cases}$$

alors f_0 est une solution.

Le système est un système 2 équations 2 inconnus, linéaire et tout à fait normal (sauf qu'en fait il s'agit d'un système pour chaque valeur de x) qu'on peut résoudre comme on veut. Une fois qu'on en trouve les solutions, on a A' et B' . On trouvera A et B en prenant les primitives. C'est intéressant de remarquer que ces primitives sont définies à une constante près. Par conséquent, la solution qu'on trouve peut être modifiée en rajoutant des termes du type $c \sin x$ ou $c \cos x$, ce qui est tout à fait normal, comme le sinus et le cosinus sont les solutions de l'homogène. C'est pour ça qu'on a dit que la même méthode pourrait conduire aux solutions générales.

Dans notre cas, avec $g(x) = 1/(1+x^2)$, on trouve, en multipliant la première équation fois $\sin x$ et la deuxième fois $\cos x$ et en ajoutant,

$$A'(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}, \quad B'(x) = \frac{-\sin x}{1+x^2}.$$

Une solution f_0 est donc donnée par

$$f_0(x) = \sin x \int_0^x \frac{\cos t}{1+t^2} dt - \cos x \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2} dt.$$

Avec ce choix précis de g on n'est pas capables (au moins, je ne suis pas capable) de calculer les primitives. L'expression de la solution avec les intégrales est quand même utile pour connaître des propriétés qualitatives des solutions (leur croissance, convexité...) ou pour les calculer numériquement (en remplaçant les intégrales par des sommes finies sur une partition).

La solution générale est finalement

$$f_0(x) = \sin x \left(A + \int_0^x \frac{\cos t}{1+t^2} dt \right) + \cos x \left(B - \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2} dt \right).$$

On expliquera ici comment généraliser cette méthode à une équation générale (linéaire à coefficients constants mais non homogène) d'ordre n .

Considérons l'équation générale

$$\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)} = g.$$

Soit $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de solutions de l'homogène (typiquement, des exponentielles...). La solution générale de l'homogène serait du type $\sum_i A_i y_i(x)$ et on cherche donc, en s'inspirant à ça, une solution du type $f_0(x) = \sum_i A_i(x) y_i(x)$.

Comme toute à l'heure on commence à calculer ses dérivées

$$f_0'(x) = \sum_i A_i'(x) y_i(x) + \sum_i A_i(x) y_i'(x).$$

Comme première chose, on impose que la partie avec les A_i' s'annule : $\sum_i A_i'(x) y_i(x) = 0$, ce qui entraîne

$$f_0'(x) = \sum_i A_i(x) y_i'(x), \quad f_0''(x) = \sum_i A_i'(x) y_i'(x) + \sum_i A_i(x) y_i''(x).$$

Ici, pourtant, il ne suffit pas de s'arrêter à la dérivée d'ordre deux, et il faut continuer. Pour continuer il est bien de se simplifier la vie en imposant aussi $\sum_i A_i'(x) y_i'(x) = 0$. On a donc

$$f_0''(x) = \sum_i A_i(x) y_i''(x), \quad f_0'''(x) = \sum_i A_i'(x) y_i''(x) + \sum_i A_i(x) y_i'''(x).$$

On continue comme ça, jusqu'à la dérivée n -ième : on impose que tous les sommes $\sum_i A_i'(x) y_i^{(k)}(x)$ s'annulent jusqu'à $k = n-2$. Par conséquence on obtient des expressions simplifiées des dérivées, et notamment

$$f_0^{(k)} = \sum_i A_i(x) y_i^{(k)}(x), \quad \text{pour } k \leq n-1, \quad f_0^{(n)}(x) = \sum_i A_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_i A_i(x) y_i^{(n)}(x).$$

Si on met tout ça dans l'équation on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\sum_{i=1}^n A_i(x) y_i^{(k)}(x) \right) + a_n \left(\sum_i A_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_i A_i(x) y_i^{(n)}(x) \right) = g(x).$$

Les premiers termes peuvent être couplés en obtenant

$$\sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{i=1}^n A_i(x) y_i^{(k)}(x) \right) = \sum_{i=1}^n A_i(x) \left(\sum_{k=0}^n a_k y_i^{(k)}(x) \right) = 0,$$

qui est nul car les y_i sont solutions de l'homogène. La condition finale devient donc

$$a_n \left(\sum_i A_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) \right) = g(x),$$

ce qui nous dit que, si les A_i satisfont le système suivant

$$\begin{cases} \sum_i A_i'(x) y_i(x) = 0, \\ \sum_i A_i'(x) y_i'(x) = 0, \\ \dots \sum_i A_i'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0, \\ \sum_i A_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = g(x)/a_n, \end{cases}$$

alors f_0 est une solution. Ce système, n équations et n inconnus, peut être résolu et peut aussi s'écrire de la manière suivante sous forme matriciale. Soit $W(x)$ la matrice (dont les coefficients

dépendent du point x) qui a $y_i^{(j)}$ dans sa case à la $(j + 1)$ -ième ligne et i -ième colonne. Cette matrice est dite matrice Wronskienne, ou “le Wronskien”, de l'équation. Si $A'(x)$ est le vecteur (inconnu) qui a $A'_i(x)$ sur sa i -ième coordonnée et $G(x)$ est le vecteur (donné avec l'équation) $(0, 0, \dots, 0, g(x)/a_n) \in \mathbb{R}^n$, alors la condition est

$$W(x)A'(x) = G(x).$$

L'inversibilité de la matrice Wronskienne découle justement de l'indépendance des solutions y_i . Comme dans l'exemple, on résout le système (avec la méthode qu'on préfère : on inverse le Wronskien, on fait des sommes de colonnes, on devine...) et l'on trouve les A'_i . Puis on prend les primitives. Et on a une solution particulière par intégration.

4.2 Equations linéaires d'ordre un, coefficients variables

Dans cette section on se dédie aux équations du type

$$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x).$$

C'est des équations linéaires qui ont pas mal de propriétés en commun avec ceux qui sont à coefficients constants (par exemple, si l'on résout l'homogène et on trouve une solution particulière on a gagné) mais qui, évidemment, ne peuvent pas être résolue en passant par le polynôme associé. La résolution de ces équations à l'ordre supérieur est nettement plus difficile, mais pour l'ordre un on peut s'en sortir.

Typiquement, nous on aime bien (surtout pour des raisons liées aux théorèmes d'existence et unicité) les équations de la forme $f' = qqchose$. Dans le cas des équations à coefficients constants cela ne posait pas de problèmes car si le coefficient a_1 est nul alors on n'a pas de dérivées et l'équation n'est plus une équadiff, et si il n'est pas nul n peut sans problèmes diviser par a_1 partout. Dans ce cas le coefficient $a(x)$ peut s'annuler quelque part mais pas ailleurs et ceci peut donner des problèmes.

Si le coefficient $a(x)$ est constamment égal à un, on dit que l'équation est sous forme résolue (même si en fait, avant de la résoudre il faudra travailler encore un petit peu). Si le coefficient $a(x)$ ne s'annule pas, on peut se ramener à la forme résolue en divisant par lui. Si le coefficient s'annule il peut y avoir des problèmes d'existence ou d'unicité de la solution qu'on traitera pas ici. C'est pour ça qu'on s'occupera seulement des équations sous forme résolue :

$$f'(x) = -b(x)f(x) + c(x).$$

Commençons par le cas homogène $c = 0$: $f'(x) = -b(x)f(x)$. Ici il n'est pas trop difficile de deviner une solution. On sait que toute fonction exponentielle, quand on la dérive, n'a l'effet que d'être multipliée fois la dérivée de l'exposant. Si donc B est une primitive quelconque de b , la fonction

$$f(x) = e^{-B(x)}$$

est une solution de l'équation. Non seulement, comme l'équation est linéaire et homogène, l'espace des solutions sera un espace vectoriel et donc toute fonction du type

$$f(x) = Ae^{-B(x)},$$

où A est une constante, est une solution. Cet espace vectoriel sera bien de dimension un (en correspondance biunivoque avec les données initiales $f(0)$) et celles-ci sont toutes et seules les solutions (le fait que toute solution est de cette forme peut être vérifié en dérivant $f(x)e^{B(x)}$:

$$(f(x)e^{B(x)})' = f'(x)e^{B(x)} + b(x)f(x)e^{B(x)} = 0,$$

ce qui montre que la quantité $f(x)e^{B(x)}$ est constante).

Pour le cas non homogène on utilisera une technique tout à fait correspondante à celle de la variation des constantes. On cherchera une solution du type $f(x) = A(x)e^{-B(x)}$, ce qui, comme toute à l'heure, n'est pas du tout contraignant.

En développant les dérivées et en les mettant dans l'équation, on trouve

$$A'(x)e^{-B(x)} - b(x)A(x)e^{-B(x)} = -b(x)A(x)e^{-B(x)} + c(x),$$

ce qui implique

$$A'(x) = c(x)e^{B(x)}.$$

Comme dans la section précédente, on a trouvé A' , et donc A est défini à une constante additive près, ce qui est normal car rajouter une constante fois $e^{-B(x)}$ n'est que rajouter une solution de l'homogène.

La solution générale est donc de la forme

$$f(x) = e^{-B(x)} \left(A + \int_0^x c(t)e^{B(t)} dt \right)$$

et l'on peut bien vérifier que toute fonction de cette forme est solution.

De plus, si on connaît une valeur $f(x_0)$ (typiquement $x_0 = 0$) et la primitive B a été choisie de façon à avoir $B(x_0) = 0$ (donc $B(x) = \int_{x_0}^x b(t)dt$), alors la constante A coïncide avec $f(x_0)$ (il suffit pour cela de remplacer x avec x_0 dans la formule).

4.3 Equations non linéaires d'ordre un à variable séparable

Seule cette dernière section sera dédiée à des équations non linéaires. Les équations non linéaires d'ordre un plus générales, dans leur forme résolue, ont la forme

$$f'(x) = F(x, f(x)).$$

Pour ce type d'équation il existe un théorème très connu (Théorème de Cauchy-Lipschitz) qui donne un résultat d'existence (locale : c'est-à-dire, si on fixe $f(x_0)$ il existe une solution définie sur un voisinage de x_0) et d'unicité. Ce résultat demande pourtant que F satisfasse quelques hypothèses, et notamment que F soit Lipschitzienne (ou C^1). De plus, pour ces équations, il n'existe pas toujours une solution définie sur toute la droite réelle, comme on verra dans les exemples.

Les équations qu'on sait traiter aisément sont celles de la forme (dite "à variables séparables")

$$f'(x) = a(x)b(f(x)), \tag{4.3}$$

où donc la fonction F a la forme $F(x, y) = a(x)b(y)$.

On commencera par un exemple qui explique l'idée et puis on rendra tout ça rigoureux.

Exemple 4.3.1. Considérer l'équation

$$f'(x) = x^2 f(x),$$

qui d'ailleurs appartient à la classe d'équations linéaires qu'on a étudiée dans la dernière section. Si l'on écrit f' comme df/dx , on peut mettre l'équation sous la forme

$$\frac{df}{dx} = x^2 f; \quad \frac{df}{f} = x^2 dx,$$

ce qui ne signifie pas grande chose mais fait ce qui est déclaré dans le nom "séparer les variables". Puis, on a envie d'intégrer, grâce à la présence du df et du dx , en obtenant

$$\int \frac{df}{f} = \int x^2 dx; \quad \ln(f) = \frac{x^3}{3} + c.$$

On obtient donc

$$f = e^{x^3/3+c},$$

ce qui correspond complètement à ce qu'on avait vu dans la partie sur les équations linéaires à coefficients constants.

De toute façon, cette méthode, avec ses écritures qui ne sont pas du tout formelles, écrite comme ça, n'a pas vraiment le but de démontrer qu'on a trouvé une solution, mais plutôt de suggérer une solution. On pourra après la vérifier (en dérivant) et conclure grâce aux théorèmes d'unicité.

Pour formaliser cette méthode on peut regarder de près ce qu'on a fait : on a divisé par $b(f)$ (ici f) et pris une primitive (ici le logarithme). Puis on a pris une primitive de l'autre coté aussi.

On peut donc énoncer et démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.3.1. *Supposons $b \neq 0$ et continue. Si f est solution de (4.3) et A est une primitive de a et B de $1/b$, alors on a*

$$B(f(x)) = A(x) + C,$$

ce qui implique $f(x) = B^{-1}(A(x) + C)$ (B est inversible car strictement monotone, sa dérivée b étant une fonction continue et non nulle, donc de signe constant).

Démonstration. Il suffit de vérifier que la quantité $B(f(x)) - A(x)$ est bien constante, ce qui équivaut à ce que sa dérivée soit nulle. Sa dérivée est

$$B'(f(x))f'(x) - a(x) = \frac{f'(x)}{b(f(x))} - a(x),$$

qui est nulle grâce à l'équation. □

L'hypothèse que b ne s'annule pas n'est pas restrictive car si pour une certaine valeur y_0 on a $b(y_0) = 0$ alors la constante $f = y_0$ est solution de (4.3). Pour décider si chercher une solution constante ou chercher une solution avec cette méthode il faut regarder la valeur initiale $f(x_0)$ qui nous est donnée : si elle annule b alors la solution sera constante, sinon on la trouvera comme ça.

On va voir ça dans des exemples.

Exemple 4.3.2. Trouver la solution de

$$\begin{cases} f'(x) = xf^2(x), \\ f(0) = 1; \end{cases} \quad \text{et de} \quad \begin{cases} f'(x) = xf^2(x), \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

La solution du deuxième système est évidemment $f(x) = 0$. Concernant le premier, par contre, on a

$$a(x) = x, \quad A(x) = \frac{x^2}{2} \quad b(y) = y^2, \quad \frac{1}{b(y)} = y^{-2}, \quad B(y) = -y^{-1},$$

donc

$$-\frac{1}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + c,$$

d'où

$$f(x) = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} + c}.$$

La constante c peut être trouvée en imposant $f(0) = 1$, ce qui nous dit

$$1 = f(0) = -\frac{1}{c}, \quad \text{d'où } c = -1.$$

La solution est donc

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}}, \quad \text{sur }] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[.$$

comme on peut voir cette solution n'est définie que sur un intervalle borné, qui dépende de la valeur de c qui dépende de son côté de la valeur de $f(0)$. Aux bornes de cet intervalle la solution va à l'infini et ce n'est plus possible de la prolonger.

La même méthode est très efficace pour des équations autonomes, c'est-à-dire où on n'a pas la partie $a(x)$, donc $f'(x) = b(f(x))$ tout court. L'exemple que l'on va voir est quand même un peu particulier.

Exemple 4.3.3. Trouver la solution de

$$\begin{cases} f'(x) = \sqrt{f(x)}, \\ f(0) = 1; \end{cases} \quad \text{et de} \quad \begin{cases} f'(x) = \sqrt{f(x)}, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

La même méthode de toute à l'heure nous donne

$$a(x) = 1, \quad A(x) = x \quad b(y) = y^{1/2}, \quad \frac{1}{b(y)} = y^{-1/2}, \quad B(y) = 2y^{1/2},$$

Donc on a

$$2\sqrt{f(x)} = x + c.$$

Dans le premier cas on impose $f(0) = 1$ et on trouve $c = 2$. La solution est donc

$$f(x) = \left(\frac{x+2}{2}\right)^2.$$

Dans le deuxième on trouve $c = 0$ et la solution est

$$f(x) = \frac{x^2}{4}.$$

Pourtant, il est évident que la fonction nulle $f(x) = 0$ est une solution aussi. Ceci est en effet un exemple (typique) de non-unicité, et la raison est à chercher dans le fait que la fonction $b(y) = \sqrt{y}$ n'est ni Lipschitzienne ni C^1 , ce qui empêchera d'appliquer les théorèmes usuels.

4.4 Astuces diverses : changement de variable

Cette dernière section veut suggérer des méthodes pour se ramener à des équations de type connu par des changements de variable. On verra deux exemples. Une fois on fera un changement de variable en x , une fois en f .

Exemple 4.4.1. L'équation

$$x^2 f''(x) + f(x) = 0$$

n rentre pas dans les cadres qu'on a étudié jusqu'ici. Si elle était d'ordre un on aurait pu appliquer soit la théorie des équations linéaires à coefficients variables soit celle de la séparation des constantes. Mais là elle est d'ordre deux. Le changement de variable que l'on suggère est très efficace quand on a chaque dérivée de f multipliée fois une puissance de x du bon exposant (disons tous des termes du type $x^h f^{(h)}(x)$). Posons

$$z(x) = f(e^x).$$

On a

$$z'(x) = f'(e^x)e^x \quad \text{et} \quad z''(x) = f'(e^x)e^x + f''(x)(e^x)^2 = z'(x) + f''(x)(e^x)^2.$$

En utilisant l'équation, qui dit que pour tout t (donc $t = e^x$ aussi) on a $t^2 f''(t) = -f(t)$, on trouve

$$z''(x) = z'(x) - f(e^x) = z'(x) - z(x),$$

ce qui implique que z satisfait l'équation linéaire à coefficients constants

$$z'' - z' + z = 0.$$

On peut donc calculer z d'après ce qu'on a appris sur ce type d'équations. Puis, si l'on connaît z on retrouve f par $f(x) = f(e^{\ln x}) = z(\ln x)$. On peut remarquer que cette solution n'est définie que pour $x > 0$. Ceci est normal, car l'équation peut être mise en forme résolue sur $\{x \neq 0\}$ seulement. Sur les positifs on peut utiliser ce changement de variable et sur les négatifs utiliser $w(x) = f(-e^x)$ marche aussi bien.

Exemple 4.4.2. L'équation

$$\cos(f(x))f'(x) + x^3 = 0 \tag{4.4}$$

peut être résolue en tant qu'équation à variables séparables (mais il y a un petit souci là où le cosinus s'annule). Ou bien on peut remarquer que $\cos(f(x))f'(x) = (\sin(f(x)))'$ et faire ce changement de variable sur la fonction f , en posant $z(x) = \sin(f(x))$. L'équation devient très facilement $z'(x) + x^3 = 0$. Si l'on remarque que $x^3 = (x^4/4)'$ on a alors

$$\left(\sin(f(x)) + \frac{x^4}{4} \right)' = 0.$$

Ceci implique que la quantité $\sin(f(x)) + x^4/4$ reste constante le long de la solution. Une quantité qui a cette propriété (elle est constante le long des solutions) est dite "intégrale première" de l'équation. Trouver une intégrale première permet souvent de transformer une équation différentielle d'ordre un en une équation sans dérivées (comme ici) ou une équation d'ordre supérieur en une d'ordre plus bas.

Par exemple si l'on prend l'équation $f'' + f = 0$ et on la multiplie par f' on obtient $((f')^2 + f^2)' = 0$, ce qui nous donne une intégrale première d'ordre un pour une équation d'ordre deux.

Ceci dit, les méthodes de changement de variable ou d'intégrale première sur l'équation (4.4) ne sont rien de différent de la méthode de séparation des constantes. Il est plus intéressant de voir ce qu'il se passe sur un exemple d'ordre supérieur, là où l'on a moins d'outils à disposition. Par exemple, l'équation

$$\cos(f(x))f''(x) - \sin(f(x))(f'(x))^2 + 1 = (x+1)\cos x$$

a l'air très compliquée, mais si l'on pose $\sin(f(x)) = z(x)$ on la transforme en

$$z''(x) - z(x) = (x+1)\cos x,$$

ce qui peut être résolue avec les méthodes usuelles.