ISSEA - Yaoundé

Cours d'optimisation dynamique

Espaces de Sobolev et Optimisation en temps continu

Filippo SANTAMBROGIO

Année 2009

Ces notes sont censées répondre à des questions qu'on se pose quand on étudie le calcul des variations ou le contrôle optimal en dimension 1 (avec la seule variable temporelle, disons) et on nous dit "pour tout qui concerne l'existence des solutions, il faudrait connaître la théorie des Espaces de Sobolev". Et si on ne la connaît pas ? on tâche d'y remedier…

Le tout se compose de trois sections :
– dans la première on fait un resumé rapide des outils et des concepts d'analyse fonctionnelles dont on a besoin ;
– dans la deuxième on donne des définitions précises concernant les espaces $W^{1,p}$ et l'on démontre les théorème principaux ; un résumé sur l'espace de Hilbert H^1 est proposé, ce qui permet d'avoir un cadre plus rapide sur ses propriétés ;
– dans la troisième section les résultats sont appliqués à un problème variationnel typique et des variantes possibles sont analysée.

1 Préliminaires informels

1.1 Deux pages d'analyse fonctionnelle

On va voir très rapidement et de manière informelle tout ce dont on a besoin.

Espaces vectoriels normés. Tout d'abord on prend un espace vectoriel, mais on pensera surtout aux espaces de dimension infinie. Il s'agira surtout d'espaces de fonctions (par exemple l'espace de toutes les fonctions continues sur un intervalle, ou toutes les fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$…). On s'intéresse seulement aux espaces E qui sont munis d'une norme, c'est-à-dire une fonction qui associe à tout vector $x \in E$ un nombre $||x|| \in \mathbb{R}^+$ (faut penser à sa longueur) et qui satisfait les propriétés
– $||x|| \geq 0$ pour tout x,
– $||x|| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
– $||\lambda x|| = |\lambda|\ ||x||$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$,
– $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ pour tout $x, y \in E$.

Les espaces L^p. Un exemple de norme pourrait être associer à toute fonction f son l'intégrale de $|f|$, où la borne supérieure de f.

Ce deux dernier exemples ne sont que des cas particuliers des espaces L^p : si X est un espace de mesure (par exemple, un intervalle de $\mathbb{R}$ avec la mesure de Lebesgue), pour tout $p \in [1, +\infty[$ l'espace des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ telles que $\int_X |f(x)|^p dx < +\infty$ est muni de la norme $||f||_{L^p} := (\int_X |f(x)|^p dx)^{1/p}$. Le cas $p = +\infty$ est representé par l'espace des fonctions bornées (ou bornées à un ensemble négligeable près), avec la norme $||f||_{L^\infty} := \inf\{M \in \mathbb{R} \ : \ |f(x)| \leq M p.p.\}$, qui correspond à la norme du sup.

Espaces de Banach. Avec une norme on peut faire une distance : on dit que la distance entre x et y est $||x - y||$. On a donc un espace métrique. On peut se poser la question "est-ce qu'il est complet" (c'est-à-dire toute suite de Cauchy converge). Tout espace vectoriel normé n'étant pas complet, on appelera Espace de Banach tout espace qui s'avère être complet par rapport à la distance induit par sa norme. Par exemple les espaces L^p sont bien des espaces de Banach.

Espaces de Hilbert. Il y a un cas d'espaces vectoriels normés assez intéressant. On peut parfois définir sur un espace vectoriel un produit scalaire : une application qui associe à tout couple de vecteurs $(x, y) \in E \times E$ un nombre réel noté $< x, y >$ ou $x \cdot y$ (parfois on fais des produits scalaires à valeurs complexes aussi). Une manière très naturelle de définir une norme en partant d'un produit scalaire est de poser

$$||x|| := \sqrt{< x, x >}.$$

Dans la définition de produit scalaire il y a un tas de propriétés à vérifier, dont le fait que $< x, x >$ doit toujours être positif (sinon on ne pourrait pas en prendre la racine) et toute autre propriété dont on a besoin pour vérifier que la définition ci-dessus donne bien lieu à une norme.

Les espaces de Banach dont la norme est issue d'un produit scalaire s'appellent Espaces de Hilbert.

Séparabilité. Autre définition : on dit qu'en Espace de Banach est séparable si il contient un sous-ensemble dense et dénombrable (par exemple l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dense dans l'espace des fonctions continue sur $[0, 1]$).

Espace dual et convergence faible. Pour tout espace de Banach E on peut définir un espace dual E', dont les éléments sont les applications linéaires et continues sur E, ce qui revient à dire

$$E' = \{f : E \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ est linéaire et il existe une constante } C \text{ telle que } f(x) \leq C||x||\}.$$

Pour les applications linéaires il est bien connu que l'existence d'une constante C satifaisant $f(x) \leq C||x||$ équivaut à la continuité de f.

Dans un Espace de Banach E on a déjà une notion de convergence ($x_n \to x$ si $||x_n - x|| \to 0$) mais, grâce au dual, on peut en introduire une autre :
- on dit qu'une suite $(x_n)_n \subset E$ converge faiblement à x si pour tout $f \in E'$ on a $f(x_n) \to f(x)$;
- on dit pareillement qu'une suite $(f_n)_n \subset E'$ converge faiblement-* à f si pour tout $x \in E$ on a $f_n(x) \to f(x)$.

Cette convergence est plus faible que celle usuelle et elle a des propriétés de compacité en plus : Il est en fait vrai le fait suivant : si E est séparable alors toute suite bornée dans E' admet une sous-suite faiblement-* convergente.

Compacité dans E plutot que dans E'. Il se trouve que ce théorème est très utile dans le cas des espaces de Hilbert, car eux ils sont dans un certain sens le duaux de soi même. En fait, si H est un Espace de Hilbert et $f \in H'$, alors il existe un vecteur $x_f \in H$ tel que $f(y) :< x_f, y >$ pour tout $y \in H$. Autrement dit, toute fonctionnelle linéaire sur H s'écrit comme le produit scalaire avec un vecteur de H. L'espace H' n'est rien d'autre, donc, qu'une copie de l'espace H. Dans ce cadre la convergence faible peut se réécrire comme $x_n \to x$ si $< x_n, y > \to < x, y >$ pour tout $y \in H$. Et l'on peut dire : si H est séparable alors toute suite bornée dans H admet une sous-suite faiblement convergente.

Il y a des espaces de Banach qui ne sont pas des espaces de Hillbert qui satisfont un peu le même principe. Souvent pour un espace de Banach E' n'a rien à voir avec E mais il y a pas mal de cas où c'est E'' qui ressemble à E (E'' étant le dual du dual). Ceci car tout $x \in E$ peut de manière naturelle s'interpreter comme une fonctionnelle linéaire sur E' qui associe à $f \in E'$ la valeur $f(x)$. Pourtant, en faisant comme ça il n'est pas certain qu'on récupère tous les éléments de E''. Quand tous les éléments de E'' s'écrivent sous la forme "évaluation sur un élément de E" alors on dit que l'espace E est refléxif. Pour les espaces refléxifs aussi on peut dire "si E est séparable alors toute suite bornée dans E admet une sous-suite faiblement convergente".

Il y a deux propriétés importantes des suites faiblement convergentes :
- si $x_n \rightharpoonup x$ (c'est avec une flèche comme ça qu'on écrit la convergence faible) alors $(x_n)_n$ est une suite bornée ;
- si $x_n \rightharpoonup x$ alors $||x|| \leq \liminf_n ||x_n||$.

Opérateurs compactes Considérons maintenant une application $T : E \to F$ qui va d'un Espace de Banach à un autre. On sait ce qu'il signifie qu'elle soit continue : il existe une constante C telle que $||T(x)||_F \leq C||x||_E$ pour tout $x \in E$. Ceci corréspond à dire que toute suite $(x_n)_n$ qui est convergente (vers x) en E est transformée en une suite convergente en F (c'est-à-dire $T(x_n) \to T(x)$).

Il y une défintion plus forte, qui est celle d'application compacte. On dit que$T$ est compacte si elle transforme tout sous-ensemble borné en un sous-ensemble dont l'adhérence est compacte. Das le cas des espaces de Hilbert séparables ou des Banach refléxifs séparable on peut aussi dire que T est compacte si elle transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente. Remarquez que souvent on prend T l'injection d'un espace dans un autre (par exemple l'espace des fonctions continues dans l'espaces des fonctions intégrables sur $[0, 1]$). La compacité de l'injection correspond alors à une implication entre la convergence faible selon une topologie et la forte selon l'autre norme des mêmes suites de fonctions.

1.2 Le cas des fonctions continues

L'ensemble des fonctions continues et bornées sur un intervalle ou plus en général un espace métrique X est un Espace de Banach quand on utilise la norme

$$||f||_{C(X)} := \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\}.$$

Évidemment, si X est compacte il est inutile de préciser qu'on parle de fonctions bornées, toute fonction continue sur un compact étant bornée.

La convergence forte d'une suite de fonctions dans cet espace coïncide avec la convergence uniforme. La convegrence faible est plus obscure. La compacité (forte) dans cet espace est caractérisée par le théorème d'Ascoli qui dit :

Théorème 1.1. *Si une suite de fonctions $f_n \in C(X)$ est bornée par une même constante et en plus elle est équicontinue, alors elle admet une sous-suite qui converge uniformément sur X.*

Inversement, si une suite de fonctions $f_n \in C(X)$ converge uniformément vers une focntion continue f, alors elle doit être équicontinue et bornée.

On rappelle ce q'uil signifie équicontinue pour une famille de fonction f_n : il signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ qui est le même pour toute fonction f_n tel que $d(x, y) < \delta$ entraîne $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ pour tout n.

Ceci est très utile quand on rencontre des espaces E des fonctions (cela sera le cas des espaces de Sobolev) qui ont cette propriété :
- toute fonction $f \in E$ est en fait continue ;
- des inégalités du type $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$ sont vraies et la fonction ω (module de continuité) ne dépende que de la norme $||f||$ dans E.

2 Espaces de Sobolev en dimension 1

2.1 $W^{1,p}$ en détails

Soit $p \in [1, \infty]$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on définit

$$W^{1,p}(I) := \{u \in L^p : \exists g \in L^p, \ \int_I u\,\varphi' = -\int_I g\varphi, \ \forall\varphi \in C^1_c(I)\}.$$

Par densité on peut dans la définition ci-dessus remplacer "$\forall\varphi \in C^1_c(I)$" par "$\forall\varphi \in C^\infty_c(I)$". Autrement dit $u \in W^{1,p}(I)$ si $u \in L^p$ et $u' \in L^p$, la fonction g intervenant dans la définition ci-dessus est évidemment unique ; on la note alors simplement $g = u'$. $W^{1,p} = W^{1,p}(I)$ est un espace vectoriel que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},\ \forall u \in W^{1,p}.$$

Pour $p = 2$ on note $H^1 := W^{1,2}$ et l'on munit H^1 du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle := \int_I (uv + u'v'),\ \forall (u,v) \in H^1 \times H^1.$$

On vérifie sans difficulté les propriétés suivantes

Théorème 2.1. *$W^{1,p}$ est un espace de Banach. $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$. H^1 est un espace de Hilbert séparable.*

Exercice 2.1. Soit (u_n) une suite de $W^{1,p}$. On suppose que (u_n) converge vers u dans L^p et que (u_n') converge dans L^p, montrer que $u \in W^{1,p}$ et que (u_n) converge vers u dans $W^{1,p}$.

Exercice 2.2. Soit $u \in W^{1,p}(I)$ et $\varphi \in C_c^1(I)$ montrer que $u\varphi \in W^{1,p}$ et $(u\varphi)' = u'\varphi + u\varphi'$.

Le résultat suivant permet d'identifier en un certain sens les fonctions $W^{1,p}$ aux primitives de fonctions L^p :

Théorème 2.2. *Soit $u \in W^{1,p}$ alors u admet un représentant que nous noterons encore $u \in C(\overline{I})$ tel que*

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t)dt, \forall x, y \text{ dans } \overline{I}.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ et

$$v(x) := \int_{x_0}^x u'(t)dt,\ \forall x \in I.$$

Soit $\varphi \in C_c^1(I)$ et $[a,b]$ un segment inclus dans I et contenant $\mathrm{supp}(\varphi)$ on a alors

$$\int_I v\varphi' = \int_a^b v\varphi' = -\int_a^{x_0} \Big(\int_x^{x_0} u'(t)dt\Big)\varphi'(x)dx + \int_{x_0}^b \Big(\int_{x_0}^x u'(t)dt\Big)\varphi'(x)dx$$

avec le théorème de Fubini, il vient donc :

$$\begin{aligned}\int_I v\varphi' &= -\int_a^{x_0} \Big(\int_a^t \varphi'(x)dx\Big)u'(t)dt + \int_{x_0}^b \Big(\int_t^b \varphi'(x)dx\Big)u'(t)dt \\ &= -\int_I u'\varphi = \int_I u\varphi'.\end{aligned}$$

on a donc $\{v - u\}' = 0$ et donc il existe une constante C telle que $v - u = C$ p.p., ce qui achève la preuve. □

Pour $p > 1$ et $u \in W^{1,p}$, on a donc

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_x^y |u'| \leq \|u'\|_{L^p}|x-y|^{1/p'} = \|u'\|_{L^p}|x-y|^{1-1/p} \tag{1}$$

ainsi les fonctions de $W^{1,p}$ sont $C^{0,\alpha}$ avec $\alpha = 1 - 1/p$. Notons également que les fonctions $W^{1,\infty}$ sont Lipschitziennes (et la réciproque est vraie comme le montre le résultat suivant). Les fonctions $u \in W^{1,p}$ admettant un représentant continu, dans la suite de ce paragraphe, nous identifierons u à ce représentant continu.

Exercice 2.3. Montrer que si $u \in W^{1,1}(I)$ alors u est uniformément continue sur I.

Proposition 2.3. *Soit $u \in L^p$ avec $1 < p \leq \infty$ on a alors les équivalences entre :*

1. *$u \in W^{1,p}$,*
2. *il existe une constante C telle que*

$$\Big| \int_I u\, \varphi' \Big| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}},\ \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

3. *il existe une constante C telle que pour tout ouvert $\omega \subset\subset I$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < d(\omega, \mathbb{R} \setminus I)$ on ait*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

De plus, on peut choisir $C = \|u'\|_{L^p}$ dans les assertions 2 et 3.

Nous omettons la démonstration de ce résultat.

Exercice 2.4. Montrer que pour $p = 1$, les assertions 2. et 3. de la proposition 2.3 sont équivalentes, sont vraies pour $u \in W^{1,1}$ mais n'entrainent pas que $u \in W^{1,1}$. Supposons en outre I bornée, les fonctions L^1 vérifiant les assertions 2. ou 3. de la proposition 2.3 sont appelées fonction à variation bornée. Montrer que u est à variation bornée si et seulement s'il existe une constante C telle que

$$\sum_{k=0}^{n-1} |u(t_{k+1}) - u(t_k)| \leq C$$

pour toute suite $t_0 < t_1 ... < t_n$ de I. Montrer que u est à variation bornée si et seulement si u est différence de deux fonctions croissantes bornées sur I et que c'est encore équivalent à dire que la dérivée distribution de u est une mesure signée finie. Toujours dans le cas où I est borné, montrer que $u \in W^{1,1}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que pour toute suite d'intervalles disjoints $(I_k)_{k=1,\dots,n}$, $I_k =]a_k, b_k[$, si $|\bigcup_k I_k| \leq \delta$ alors

$$\sum_k |u(b_k) - u(a_k)| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2.5. Montrer que toute suite bornée de $W^{1,1}$ possède une sous-suite qui converge ponctuellement.

Il peut s'avérer parfois utile (pour la convolution ou la transformée de Fourier, par exemple) d'étendre les fonctions de $W^{1,p}(I)$ à $\mathbb{R}$ entier, on a alors :

Théorème 2.4. *(Théorème de prolongement) Il existe un opérateur linéaire continu $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ tel que $Pu|_I = u$, pour tout $u \in W^{1,p}(I)$.*

Démonstration. Si I est non borné, on peut supposer $I =]0, +\infty[$, on définit alors P en prolongeant $u \in W^{1,p}(]0, +\infty[)$ par parité (ou par réflexion : c'est à dire $Pu(x) = u(x)$ si $x \geq 0$ et $Pu(x) = u(-x)$ si $x < 0$) à $\mathbb{R}$ entier, on vérifie immédiatement que $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}(I)}$.
Dans le cas où I est borné, on peut supposer $I =]0, 1[$, pour $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$, on prolonge u par parité à $]-1, 0[$ puis par réflexion par rapport à 1 à l'intervalle $]1, 2[$, on note $\tilde{u}$ le prolongement de u à l'intervalle $]-1, 2[$ ainsi obtenu, soit alors g une fonction cut-off : $g \in C_c^1(\mathbb{R})$, $\chi_{[0,1]} \leq g \leq \chi_{[-1/2,3/2]}$ et $Pu := g\tilde{u}$ (prolongée par 0 en dehors de $]-1, 2[$). On vérifie sans difficulté que P a les propriétés voulues. □

Exercice 2.6. Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ et $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ montrer que $\rho \star u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ et que

$$(\rho \star u)' = \rho \star u'.$$

Théorème 2.5. (Théorème de densité) *Soit $p \in [1, \infty[$ et $u \in W^{1,p}(I)$, il existe $(u_n)_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n|_I$ converge vers u dans $W^{1,p}(I)$.*

Démonstration. Par prolongement si nécessaire, on peut se ramener au cas où $I = \mathbb{R}$. On procède alors par troncature et régularisation par noyau convolutif. Soit $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\chi_{[-1,1]} \leq \eta \leq \chi_{[-2,2]}$ et $\eta_n(t) := \eta(n^{-1}t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit par ailleurs ρ_n un noyau régularisant. Soit maintenant $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ on pose $u_n := \eta_n(\rho_n \star u)$. Par construction, $u_n \in C_c^\infty$ et

$$u_n' = \eta_n'(\rho_n \star u) + \eta_n(\rho_n \star u').$$

On a $u_n - u = \eta_n(\rho_n \star u - u) + (\eta_n - 1)u$; chacun des deux termes dans l'expression précédente tend vers 0 dans L^p : le premier car η_n est borné dans L^∞ et $\rho_n \star u \to u$ dans L^p et le second par convergence dominée. Pour les dérivées, on a :

$$|u_n' - u| \leq \frac{1}{n}\|\eta'\|_{L^\infty}|\rho_n \star u| + |\eta_n(\rho_n \star u') - u'|$$

de la même manière que précédemment on en déduit que $u_n' \to u'$ dans L^p et donc que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}$. □

Théorème 2.6. *(Injections de Sobolev en dimension 1) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, il existe une constante $C = C(I)$ (indépendante de p) telle que pour tout $p \in [1, \infty]$, et tout $u \in W^{1,p}(I)$ on ait*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}} \tag{2}$$

autrement dit $W^{1,p}(I) \subset L^\infty$ avec injection continue. Si de plus I est borné, alors

1. *pour tout $p > 1$, l'injection $W^{1,p} \subset C(\overline{I})$ est compacte*
2. *l'injection $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ est compacte pour tout $q \in [1, \infty[$.*

Démonstration. Par prolongement, il nous suffit d'établir (2) pour $I = \mathbb{R}$. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R})$, pour $p = 1$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^x |u'| \leq \|u'\|_{L^1}.$$

Pour $p \in]1, \infty[$ et $x \in \mathbb{R}$, comme $|u|^{p-1}u \in C_c^1(\mathbb{R})$ avec $(|u|^{p-1}u)' = p|u|^{p-1}u'$, on a :

$$|u(x)|^{p-1}u(x) = \int_{-\infty}^x p|u(s)|^{p-1}u'(s)ds$$

avec l'inégalité de Hölder, il vient

$$|u(x)|^p \leq p\|u\|_{L^p}^{p-1}\|u'\|_{L^p}$$

avec l'inégalité de Young ($a^{(p-1)/p}b^{1/p} \leq (p-1)a/p + b/p$) et le fait que $p^{1/p} \leq e^{1/e}$ pour tout $p \geq 1$, on en déduit que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq e^{1/e}\Big(\frac{p-1}{p}\|u\|_{L^p} + \frac{1}{p}\|u'\|_{L^p}\Big) \leq e^{1/e}\|u\|_{W^{1,p}}$$

on en déduit donc que (2) est satisfaite pour tout $u \in C_c^1(\mathbb{R})$. Soit maintenant $u \in W^{1,p}$ et (u_n) dans $C_c^1(\mathbb{R})$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}$, on déduit de ce qui précède que (u_n) est de Cauchy dans L^∞ et ainsi que $u \in L^\infty$, $u_n \to u$ dans L^∞ et u satisfait (2).

Supposons maintenant que I soit borné, l'assertion 1. découle de (1) et du théorème d'Ascoli. Pour prouver l'assertion 2., on va montrer que B, la boule unité de $W^{1,1}$, satisfait les conditions du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov dans L^q pour tout $q \in [1, \infty[$. Soit $\omega \subset\subset I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < d(\omega, \mathbb{R}^d \setminus I)$, nous savons déjà (voir exercice 2.4) que

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leq |h|\|u'\|_{L^1} \leq |h|, \ \forall u \in B.$$

Avec (2) on en tire donc que pour tout $u \in B$ on a

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)}^q \leq (2\|u\|_{L^\infty})^{q-1}|h| \leq (2C)^{q-1}|h|$$

de sorte que B vérifie la première condition du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov. Pour la seconde condition du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, on remarque simplement que pour tout $u \in B$

$$\|u\|_{L^q(I\setminus\omega)} \leq \|u\|_{L^\infty} |I \setminus \omega|^{1/q} \leq C|I \setminus \omega|^{1/q}.$$ □

Exercice 2.7. Montrer que $W^{1,1} \subset C(\overline{I})$ avec injection continue mais que cette injection n'est pas compacte (même dans le cas où I est borné).

Corollaire 2.7. *Si I est non borné, $1 \leq p < \infty$ et $u \in W^{1,p}(I)$ on a*

$$u(x) \to 0, \text{ pour } |x| \to \infty, \ x \in I.$$

Démonstration. On sait qu 'il existe $(u_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n|_I \to u$ dans $W^{1,p}$ et donc avec (2), $u_n|_I \to u$ dans L^∞. Pour tout $x \in I$ on a $|u(x)| \leq \|u_n - u\|_{L^\infty} + |u_n(x)|$, soit $\varepsilon > 0$, pour n assez grand, le premier terme est inférieur à ε et pour $|x|$ assez grand, le second est nul, ce qui montre le résultat voulu. □

On vérifie par ailleurs facilement :

Corollaire 2.8. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, u et v dans $W^{1,p}(I)$ alors $uv \in W^{1,p}(I)$ avec $(uv)' = u'v + uv'$ et on a la formule d'intégration par parties*

$$\int_x^y uv' = -\int_x^y u'v + u(y)v(y) - u(x)v(x), \ \forall (x,y) \in \overline{I}^2.$$

Exercice 2.8. Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$ et $u \in W^{1,p}(I)$ montrer que $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ et que $G \circ u' = (G' \circ u)u'$ (noter aussi que l'hypothèse $G(0) = 0$ est inutile dans le cas où I est borné).

Pour $1 \leq p < \infty$ on note $W_0^{1,p} = W_0^{1,p}(I)$ l'adhérence de $C_c^1(I)$ dans $(W^{1,p}, \|.\|_{W^{1,p}})$. On munit $W_0^{1,p}$ de la norme de $W^{1,p}$, comme, par définition, $W_0^{1,p}$ est fermé dans $W^{1,p}$, c'est un espace de Banach pour la norme $W^{1,p}$. On note aussi $H_0^1 := W_0^{1,2}$. On sait déja que si $I = \mathbb{R}$, $C_c^1(\mathbb{R})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$ de sorte que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$. Pour $I \neq \mathbb{R}$, I a un bord non vide et les fonctions de $W_0^{1,p}(I)$ sont les fonctions $W^{1,p}(I)$ nulles sur le bord de I :

Théorème 2.9. *Soit $u \in W^{1,p}(I)$ alors $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur ∂I.*

Démonstration. Si $u \in W_0^{1,p}(I)$, u est limite dans $W^{1,p}(I)$ d'une suite $(u_n)_n \subset C_c^\infty(I)$, il résulte du théorème 2.6 que (u_n) converge uniformément vers u sur $\overline{I}$ et donc $u = 0$ sur ∂I. Réciproquement, si $u = 0$ sur ∂I, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{x \in I : |u| \geq 1/n\}$ est compact, soit alors $G \in C^1(\mathbb{R})$, paire nulle sur $[-1, 1]$ et telle que $G(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$. On pose alors $u_n = n^{-1}G(nu)$ on a $u_n \in W_0^{1,p}$ car, par construction, $\text{supp}(u_n) \subset \{x \in I : |u| \geq 1/n\}$. On vérifie sans peine avec l'exercice (2.8) et le théorème de convergence dominée que (u_n) converge vers u dans $L^p(I)$ et que (u_n') converge dans L^p, ceci implique que (u_n) converge vers u dans $W^{1,p}(I)$ et prouve que $u \in W_0^{1,p}(I)$. □

Exercice 2.9. Soit $u \in W^{1,p}$ et $c \in \mathbb{R}$ montrer que $u' = 0$ p.p. sur $\{u = c\}$ (indication : s'inspirer de la preuve du théorème précèdent).

Proposition 2.10. (Inégalité de Poincaré) *Supposons I borné. Alors il existe une constante C telle que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p}, \ \forall u \in W_0^{1,p}.$$

Démonstration. En notant $I =]a, b[$ pour $u \in W_0^{1,p}$ et $x \in I$ on a

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| \leq \int_a^x |u'| \leq \|u'\|_{L^1}$$

et donc $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^\infty}$; on conclut par l'inégalité de Hölder. □

Si I est borné on déduit de l'inégalité de Poincaré que $u \mapsto \|u'\|_{L^2}$ est une norme équivalente (associée au produit scalaire $(u,v) \mapsto \int_I u'v'$) sur H_0^1 à la norme H^1 usuelle.

Exercice 2.10. *(Inégalité de Poincaré-Wirtinger)* Soit I un intervalle ouvert (borné ou non) et $u \in W^{1,1}(I)$, montrer que

$$\|u - \underline{u}\|_{L^\infty} \leq \|u'\|_{L^1} \text{ où } \underline{u} := \frac{1}{|I|}\int_I u.$$

2.2 H^1, un résumé

Définitions. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'espace $H^1(I)$ est l'espace des fonctions $u \in L^2(I)$ telles qu'il existe une fonction $g \in L^2(I)$ qui joue le rôle de f' dans l'intégration par parties, c'est-à-dire

$$\int_I u\,\varphi' = -\int_I g\varphi,\ \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Cette fonction g, si elle existe, est unique et est notée u'.

On munit H^1 du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle := \int_I (uv + u'v'),\ \forall (u,v) \in H^1 \times H^1.$$

Ce produit scalaire fait de $H^1(I)$ un espace de Hilbert.

Continuité. Pour toute fonction $u \in H^1(I)$ on a

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} u'(t)dt \quad \text{ et } \quad |u(x) - u(y)| \leq ||u'||_{L^2}|x-y|^{1/2}.$$

La première égalité est vraie presque partout et l'inégalité est vraie si l'on remplace u (qui est a priori une fonction L^2, donc définie seulement presque partout) par l'expression donnée à gauche, qui sera donc son représentant continu. Toute fonction de H^1 est donc continue et $1/2-$Höldérienne (ou bien elle adment un représentant höldérien, mais ça revient au même).

Toute suite $(u_n)_n$ bornée dans H^1 est donc équicontinue (elles sont toutes Höldérienne avec le même exposant et la même constante) et toute suite qui converge faiblement dans H^1 converge uniformément grâce au théorème d'Ascoli. Ceci est la même chose que dire que l'injection de $H^1(I)$ dans $C(I)$ est compacte.

Ne borner que la dérivée. Pour borner une suite $(u_n)_n$ dans H^1 la partie importante est borner sa dérivée dans L^2. On a en fait, pour un $x_0 \in I$ quelconque,

$$||u||_{H^1} = \sqrt{||u||_{L^2}^2 + ||u'||_{L^2}^2} \leq \sqrt{D||u||_{L^\infty}^2 + ||u'||_{L^2}^2} \leq C|u(x_0)| + C||u'||_{L^2}, \tag{3}$$

grâce au fait que $|u(x)| \leq |u(x_0)| + D^{1/2}||u'||_{L^2}$. En particulier, si on a des fonctions qui s'annullent quelque part (de moyenne nulle, par exemple, ou nulles sur le bord), on peut dire que ce n'est que la norme L^2 de la dérivée qui compte.

L'espace H_0^1. On peut aussi définir l'espace $H_0^1(I)$, comme l'adhérence dans $H^1(I)$ des fonctions $C_c^\infty(I)$. Il se trouve que cela corréspond exactement à l'espace des fonctions H^1 dont le représentant continu est nul sur les bornes de I. De plus, sur $H_0^1(I)$, on peut utiliser le produit scalaire

$$< u, v >_{H_0^1} := \int_I u'(t)v'(t)\,dt,$$

car la norme associée à ce produit scalaire est la norme L^2 de la dérivée u' et les considération qu'on a fait ci-dessus démontrent que cette norme est équivalente à la norme H^1 (grâce au fait que u vaut zéro au bord).

3 Applications

On montrera ici comment étudier en détails l'existence d'une solution pour un problème-type classique.

Soit $I = [a, b] \subset$ un intervalle et $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée inférieurement.
.

Théorème 3.1. *Considérons le problème*

$$\min \left\{ J(u) := \int_a^b \left(F(t, u(t)) + |u'(t)|^2 \right) dt \quad : \quad u \in H^1(I),\ u(a) = A,\ u(b) = B \right\}.$$

Ce problème de minimisation admet un minimum.

Démonstration. Prenons une suite minimsante u_n telle que $J(u_n) \to \inf J$. La somme des deux termes de J (la partie F et la partie $|u'|^2$) reste alors bornée mais les deux sont bornés inférieurement par des constantes donc on peut dire qu'ils sont tous bornés. En particulier on en tire que $||u_n'||_{L^2}$ est bornée. De plus, comme les valeur au bord sont fixées, en utilisant (3), on peut dire que toute la norme $||u_n||_{H^1}$ est bornée.

Hence, $(u_n)_n$ est une suite bornée dans H^1 et on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans H^1 vers une fonction u. La convergence $u_n \rightharpoonup u$ implique une convergence uniforme aussi, et en particulier ponctuelle au bord. Par conséquent, comme $u_n(a) = u_n(b) = 0$ pour tout n, on en déduit $u(a) = u(b) = 0$. Donc u est une fonction admissible pour notre problème de minimisation. Il suffit de montrer que $J(u) \leq \liminf_n J(u_n) = \inf J$ pour déduire $J(u) = \inf J$ et que u minimise J.

Cette stratégie est très générale et très utilisée en calcul des variations ; elle s'appelle la méthode directe et demande à trouver un bon type de convergence sur l'espace des fonctions admissibles tel que

– il y ait compacité, c'est-à-dire toute suite minimisante admette une sous-suite convergente (ou au moins que l'on puisse facilement démontrer qu'au moins une suite minimisante bien choisie a cette propriété),
– la fonctionnelle soit semi-continue inférieurement, c'est-à-dire $J(u) \leq \liminf_n J(u_n)$ quand u_n converge vers u.

Dans notre cas on $u_n \to u$ uniformément, donc les fonctions v_n définies par $v_n(t) = F(t, u_n(t))$ convergent uniformément aussi vers la fonction v donnée par $v(t) = F(t, u(t))$ (ceci dépend du fait que F est continue). En particulier, $\int_a^b v_n \to \int_a^b v$. Ceci donne la continuité du premier terme.

Pour la même raison, on pourrait montrer (et on le fait, même si apparemment ça n'a rien à voir) que

$$\lim_n \int_a^b |u_n(t)|^2 dt = \int_a^b |u(t)|^2,$$

car $u_n^2 \to u^2$ uniformément.

On utilise maintenant la propriété de semicontinuité de la convergence faible, qui nous dit que, si $u_n \rightharpoonup u$ dans H^1, alors la norme de la limite est inférieure ou égale à la limite-inf des normes. On a donc (en prenant les normes au carré)

$$\int_a^b \left(|u(t)|^2 + |u'(t)|^2 \right) dt \leq \liminf_n \int_a^b \left(|u_n(t)|^2 + |u_n'(t)|^2 \right) dt.$$

Si l'on rétire $\int u^2$ des deux côtés on trouve

$$\int_a^b |u'(t)|^2 dt \leq \liminf_n \int_a^b \left(|u_n(t)|^2 + |u_n'(t)|^2 \right) dt - \int_a^b |u(t)|^2 dt = \liminf_n \int_a^b |u_n'(t)|^2 dt.$$

Ceci montre que le deuxième terme est semicontinue inférieurement et conclut la preuve (il faut remarquer que on aurait pu utiliser le raisonnement suivant : si $u_n \rightharpoonup u$ dans H^1 alors $u_n' \rightharpoonup u'$ dans L^2 - prouvez-le par exercice - et puis appliquer la semicontinuité de la norme L^2 par rapport à sa convergence faible). □

Valeurs au bord. Le même raisonnement peut s'appliquer si les contraintes sur $u(a)$ et/ou $u(b)$ sont rétirées et remplacée éventuellement par des pénalisation, en considérant

$$\min\left\{J(u) := \int_a^b \left(F(t,u(t)) + |u'(t)|^2\right) dt + g(u(a)) + h(u(b)) \quad : \quad u \in H^1(I)\right\}.$$

Si g et h sont coninues, la convergence uniforme de u_n à u implique que les deux termes additionnels sont continus aussi. Pourtant, il faut garantir que la suite reste bornée et pour cela il serait bien d'avoir, par exemple, l'une des hypothèses suivantes : soit $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$, soit $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty$, soit $F(t,x) \geq c(|x|^2 - 1)$ pour une constante $c > 0$.. En effet, si l'une des conditions sur la croissance de g ou h est satisfaite on peut déduire que soit $u_n(a)$ soit $u_n(b)$ reste bornée et alors on peut dire que $||u_n||_{H^1}$ est bornée. Au cas contraire c'est la condition sur F qui est satisfaite et alors $\int_a^b |u(t)|^2 dt$ reste bornée, ce qui implique qu'on contrôle la norme L^2 de u et, en sommant avec la norme de la dérivée on trouve une borne pour $||u||_{H^1}$.

Semi-continuité. Le même type de raisonnement marcherait évidemment si les hypothèses de continuité sur F, g et h sont remplacées par des hypothèses de semi-continuité inférieure.

Dépendence non-quadratique par rapport à u'. Le terme en $|u'(t)|^2$ pourrait très bien être remplacé par un terme en $|u'(t)|^p$, $p > 1$, et on arriverait au même résultat en utilisant l'espace $W^{1,p}(I)$. Pour $p = 1$ par contre il y a des problèmes à cause du fait que l'espace $W^{1,1}$ n'est pas raflexif. Pratiquement, il n'est pas toujours vrai que une suite bornée converge faiblement à une sous-suite près. D'ailleurs, la limite ponctuelle ou L^q qu'on pourrait trouver d'après la section 2 ne sera pas forcement continue.

Non seulement, avec des méthodes de ce genre on arrive souvent à gérer le cas d'un terme $G(u')$ qui ne soit pas forcement une puissance, mais plus en général une fonction convexe. Ceci vient du fait que toute fonction convexe peut s'écrire comme sup de fonctions linéaires et que la semi-continuité est stable par borne supérieure. Mais il resterait quand même à arranger la partie compacité, ceci ne concernant que la partie semi-continuité.

Minimiser parmi les fonctions régulières. Et si dans la pratique on ne cherche pas à minimiser parmi les fonctions H^1 ou $W^{1,p}$ mais parmi les fonctions C^1 ? bon, alors une stratégie est la suivante : on fait une extension du problème de minimisation à tout H^1 (ou à un autre espace de Sobolev, d'après l'exposant qui apparaît pour u') ; on déontre que ce probème admet un minimum ; puis on écrit l'équation d'Euler-Lagrange du problème et on espère que par chance on puisse montrer que le minimiseur est forcement C^1. Souvent ceci est le cas (mais ça peut dependre de la régularité des autres termes, F par exemple). supposons que F est C^1 : l'équation d'Euler-Lagrange dit plus ou moins $-u''(t) = F'(t, u(t))$ (où F' est la dérivée par raport à la deuxième variable). À droite du signe d'égalité on a quelque chose de continu, donc u sera même C^2 ! !