

Feuille 6 de TD Équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} y''' - 3y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1; \end{cases} & \quad b) \begin{cases} y'' - 2y' + y = 3x \\ y(0) = 1, y'(0) = 2; \end{cases} \\ c) \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^x - x - 1 \\ y(0) = y'(0) = 0; \end{cases} & \quad d) \begin{cases} y''' - 3y' - 2y = 3xe^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0; y''(0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2. Trouver (ou écrire à l'aide d'une intégrale) la solution du système

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \tan x + \cos x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 3. Trouver (ou écrire à l'aide d'une ou plusieurs intégrales) les solutions des équations

$$y''(x) - y(x) = \frac{1}{1 + e^{2x}}; \quad z''(x) + z(x) = \ln(1 + \cos x).$$

Exercice 4. Trouver toutes les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation

$$x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0.$$

Exercice 5. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t) dt; \quad f(0) = 1.$$

Trouver de même toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$f'(x) = f(x) + \int_0^x f(t) dt; \quad f(0) = 1.$$

Exercice 6. Trouver toutes la solution du système

$$\begin{cases} f'(t) = 1 + f(t)^2 \\ f(0) = a, \end{cases}$$

selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$, en précisant l'intervalle sur lequel chaque solution est définie.

Exercice 7. Trouver une solution du système

$$\begin{cases} f'(t) = \cos(t) \sqrt{1 - f(t)^2} \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

en précisant l'intervalle sur lequel elle est définie.

Exercice 8. Trouver la solution du Problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = 3\frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^5}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

On pourra utiliser un changement de variable $y(x) = z(x)x^n$ (l'entier n étant à chercher pour que l'expression de l'équation soit plus simple).