Polytech' Paris-Sud
PeiP 1 - S1
Mathématiques

Feuille de TD – chapitres 6 et 7
Courbes et fonctions dans le plan

Exercice 1. Déterminer l'équation polaire d'une droite $ax + by + c = 0$. Que se passe-t-il si $c = 0$?

Exercice 2. Déterminer l'équation polaire du cercle d'équation $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

Exercice 3. On considère la courbe paramétrée $\gamma(t), \quad t \in \mathbb{R}$ donnée par les formules $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et

$$x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + \cos t, \quad y(t) = \sin^3 t$$

Le but de l'exercice est de tracer $\Gamma = \{(x(t), y(t)), \quad t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que, pour tracer Γ on peut étudier γ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Montrer que la trajectoire Γ admet un axe de symétrie évident qui permet de réduire l'étude de γ à l'intervalle $[0, \pi]$.
2. Pour t dans $[0, \pi]$, calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. Donner le tableau de variations associé à γ sur $[0, \pi]$.
3. Donner l'équation de la tangente en $t = \pi/3$.
4. Donner un développement limité à l'ordre 3 en $t_0 = 0$ de chacune des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On écrira

   $$x(t_0 + s) = X(s) + o(s^3), \qquad y(t_0 + s) = Y(s) + o(s^3)$$

   où X et Y sont des fonctions polynomiales de degré inférieur à 3. Faire un schéma de l'allure de la courbe paramétrée $(X(s), Y(s))$ pour s voisin de 0.
5. Faire de même en remplaçant t_0 par $t_1 = \pi$.
6. Montrer qu'il existe un unique nombre t_2 dans $[0, \pi]$ tel que $x(t_2) = 0$. En exprimant $\cos 2t$ en fonction de $\cos t$, montrer que

   $$\cos t_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

   En déduire que $\sin t_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.
7. Tracer la courbe Γ en reportant toutes les informations obtenues précédemment. On admettra qu'au voisinage de $t_0 = 0$ (et de $t_1 = \pi$) , $\gamma(t)$ a même allure que les esquisses de courbes tracées en 4. et 5.

   On prendra comme valeurs approchées $\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,65$ et $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^3 \approx 0,8$.
8. Exprimer la vitesse instantanée à l'instant t. En déduire que la longueur L de la courbe entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = \pi$ peut s'écrire :

   $$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{(1 + 2u)^2 + 9u^2(1 - u^2)}du$$

   (On ne cherchera pas à calculer cette intégrale !).

Exercice 4. Soit la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ avec :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t\,, \\ y(t) = \sin^3 t\,. \end{cases}$$

1. Etudier les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.
2. Déterminer les symétries puis tracer la courbe géométrique correspondante.
3. Vérifier que les points de cette courbe satisfont l'équation $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$.
4. Déterminer la distance parcourue par le mobile entre les instants 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5. Soit $\alpha = \sqrt{3}$. On considère la courbe paramétrée γ définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$ avec

$$x(t) = e^{\alpha.t}(\alpha \cos t + \sin t),\ y(t) = e^{\alpha.t}(\alpha \sin t - \cos t).$$

1. Calculer et simplifier $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.
2. Soit Γ la courbe paramétrée par $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour $r > 0$, l'intersection de Γ avec le cercle de centre $(0,0)$, de rayon r est réduite à un point $\gamma(t_r)$ et calculer t_r en fonction de r.
3. Justifier que x et y sont des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Déterminer leurs dérivées et construire les tableaux de variations de x et y sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$.
4. Donner un vecteur directeur de la tangente à γ à l'instant $t_0 = 0$. Cette tangente est-elle horizontale ? verticale ?
5. Reprendre cette question pour chacun des instants $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$, $t_3 = \frac{3\pi}{2}$ et $t_4 = 2\pi$.
6. Sur un graphique clair, construire la courbe $\Gamma_{[0,2\pi]}$, paramétrée par $\gamma(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ en y plaçant les tangentes calculées dans les deux questions précédentes.
7. Comparer $x(t)$ et $x(t+2\pi)$, $y(t)$ et $y(t+2\pi)$. En déduire que $\gamma(t+2\pi)$ est l'image de $\gamma(t)$ par une homothétie de centre $(0,0)$ dont on précisera le rapport. Donner alors une esquisse de la courbe Γ complète.
8. Déterminer et simplifier la vitesse $v(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$. En déduire une expression simplifiée de $D(t,s)$, la distance parcourue par le mobile entre les instants t et s,, $t < s$, donnée par
$$D(t,s) = \int_t^s v(\tau)\ d\tau.$$

Exercice 6. Considérer les fonctions suivantes définies par $f_i(0,0) = 0$ pour $i = 1, ..., 6$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_1(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\,, \qquad f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\,, \qquad f_3(x,y) = -4xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$f_4(x,y) = \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad f_5(x,y) = \frac{x - \sin x}{x^2+y^2}\,, \qquad f_6(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4}$$

Déterminer lesquelles sont continues en $(0,0)$ et lesquelles y sont différentiables.

Exercice 7. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \ \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{ et } f(0,0) = 0.$$

1) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue en $(0,0)$.
2) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 8. Soit $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}$ si $x \neq y$.
Montrer que l'on peut définir $f(x,x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ de sorte que la fonction f ainsi prolongée soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
Plus difficile : le prolongement est-il une fonction C^1 ? différentiable ?

Exercice 9. Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $h(x,y) = f(x) + g(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que si f continue en x_0 et si g est continue en y_0, alors h est continue en (x_0, y_0).
2) On suppose h continue en (x_0, y_0). L'application f est elle continue en en x_0, ? L'application g est elle continue en en y_0 ?

Exercice 10. Les deux fonctions suivantes sont-elles continues en 0 ?

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
2. $g(x,y) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{y}) + y\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } \ xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ xy = 0 \end{cases}$

Exercice 11. Écrire le développement de Taylor d'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \cos\left(\tan(x + \sin y)\right).$$

Exercice 12. Soient les fonctions g, h et $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par
$$g(x,y) = x + y, \quad h(x,y) = x + y^2, \quad k(x,y) = x^2 + y.$$

a) Dans chacun des cas suivants déterminer, si elle existe, une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ telle que
$$\frac{\partial f}{\partial x} = g,\ \frac{\partial f}{\partial y} = h; \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = g,\ \frac{\partial f}{\partial y} = k; \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = h,\ \frac{\partial f}{\partial y} = k.$$

b) Discuter, dans les cas d'existence, l'éventuelle unicité : si l'on trouve deux telles fonctions f_1 et f_2, que peut-on dire de $f_1 - f_2$?

Exercice 13. Montrer que la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ est, localement autour du point $(0,1)$, d'équation $y = \varphi(x)$. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de φ au voisinage de 0 et l'équation de la tangente à Γ en $(0,1)$.

Exercice 14. On considère toutes les boites qui sont des parallélépipèdes rectangle, de volume 1, *sans couvercle*. On cherche celles dont la surface totale des parois est minimale.

1. Exprimer la surface totale S des parois en fonction de la largeur ℓ et de la profondeur p , $S = f(p,\ell)$.
2. Montrer que f a un unique point critique (p_0, ℓ_0), et calculer la valeur de f en ce point.
3. Par un DL d'ordre 2, montrer que l'on a trouvé un minimum local de la fonction f.
4. On fixe ℓ à une certaine valeur > 0 et on considère la fonction d'une variable $g(p) = f(p,\ell)$. Etudier g et trouver une formule pour son minimum absolu $m(\ell)$ en fonction de ℓ.
5. Etudier la fonction $m(\ell)$ et en déduire que $f(p_0, \ell_0)$ est le minimum absolu de f.

Exercice 15. Le but de cet exercice est de répondre à la question suivante : *Parmi tous les triangles de périmètre fixé, quels sont ceux qui ont une surface maximale ?*

On donne la formule suivante (formule de Heron d'Alexandrie) : l'aire d'un triangle de côtés a, b, c est donnée par

$$A = \sqrt{p(p-A)(p-b)(p-c)}$$

où p est le demi-périmètre du triangle, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

1. Pour simplifier, on considère les triangles de périmètre 2 (c-à-d $p = 1$). Exprimer l'aire en fonction des deux longueurs a et b.
2. Dessiner le domaine de définition de la fonction.
3. Un triangle de périmètre 2 a ses côtés de longueur plus petite que 1 (pourquoi ?...). D'autre part, comme la racine carrée est croissante, on peut tout aussi bien chercher le maximum de A^2.

   On cherche donc maintenant le maximum, pour x et y compris entre 0 et 1, de la fonction

   $$f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1).$$

   Trouver les points critiques de f.
4. En faisant le DL2 de f au point critique, évaluer si l'on a affaire à un minimum local, un maximum local ou autre chose.
5. On voudrait maintenant vérifier que le point critique correspond bien au maximum de la fonction f.
   - Pour y fixé (entre 0 et 1), trouver la valeur de x pour laquelle $f(x,y)$ est maximale. On note $m(y)$ la valeur de f au point correspondant.
   - Trouver la valeur maximale de $m(y)$ pour y variant entre 0 et 1.
   - Conclure.

Exercice 16. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rclcrcl} f_1(x,y) &=& x^3+3xy^2-15x-12y, && f_2(x,y) &=& 3x^3+xy^2-xy, \\ f_3(x,y) &=& x^4+\frac{1}{3}y^3-4y-2, && f_4(x,y) &=& x^3+xy^2-x^2y-y^3. \end{array}$$

Pour chaque fonction, montrer que les extrema locaux ne sont pas globaux.

Exercice 17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$.

a) Déterminer les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Chercher le minimum global de f sur $\overline{B(0,3)} = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq 3\}$.

c) Démontrer que ce point minimum est aussi minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18. Soit n un entier, $n \geq 2$. On considère n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, pour $i = 1, \ldots, n$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Vérifier que f n'admet qu'un seul point critique $(\hat{a}, \hat{b})$ sur $\mathbb{R}^2$. Exprimer $\hat{b}$ en fonction de $\hat{a}$.