Polytech Paris-Sud
Mardi 11 janvier 2011

Contrôle continu de Maths 1

Durée : 2h

Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Question de cours (5 points)

Définir ce qu'une fonction C^1 et une fonction différentiable en deux variables.
Est-il vrai qu'une fonction C^1 est forcément différentiable ? si oui, le démontrer, si non, donner un contre-exemple, en suivant ce qui a été fait en cours.

Exercice 1 (7 points)

On considère la courbe paramétrée $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ définie par

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t - \cos(3t) \\ y(t) = 3\sin t - \sin(3t) \end{cases}$$

1. Donner l'ensemble de définition ainsi que la périodicité de γ.
2. Montrer qu'il suffit d'étudier la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et qu'on peut obtenir l'ensemble des points de la courbe à l'aide de deux symétries.
3. Étudier la branche correspondant à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, c'est à dire la restriction de γ à $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calculer $\gamma'(0)$. Ce calcul permet-il de déterminer la droite tangente à cette branche au point $t = 0$? En utilisant éventuellement un autre paramétrage (par exemple $t \mapsto \gamma(t^\alpha)$), trouver l'équation de la droite tangente à cette branche au point $t = 0$. Représenter enfin cette branche de la courbe.
4. Représenter l'ensemble de la courbe.
5. Calculer la longueur de cette courbe.

Exercice 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 5xy - 2x - 2y + 1$.

1. Déterminer le ou les points critiques de f, c'est à dire les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui annulent les dérivées partielles d'ordre 1.
2. Écrire en ce ou ces points critiques le développement de Taylor-Young à l'ordre 2. En déduire la nature du ou des points critiques (minima locaux, maxima locaux, ni minima ni maxima…).
3. On note g la restriction de f au carré $[0, 1] \times [0, 1]$: pour tout $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, on a donc $g(x, y) = f(x, y)$. On fixe $x \in [0, 1]$. Calculer le maximum de la fonction partielle définie par $g_x(y) = g(x, y)$ pour tout $y \in [0, 1]$. On note $g^\sharp(x)$ ce maximum. Représenter la fonction $g^\sharp$.
   Montrer ensuite que la fonction $g^\sharp$ admet un minimum et le calculer. On note $(g^\sharp)_\flat$ le minimum de $g^\sharp$.
4. On fixe maintenant $y \in [0, 1]$. Calculer le minimum de la fonction partielle définie par $g_y(x) = g(x, y)$ pour tout $x \in [0, 1]$. On note $g_\flat(y)$ ce minimum. Représenter la fonction $g_\flat$. Montrer ensuite que la fonction $g_\flat(y)$ admet un maximum et le calculer. On note $(g_\flat)^\sharp$ le maximum de $g_\flat$.
5. Donner une conclusion relativement aux questions 2. et 3. puis une conclusion à l'ensemble de l'exercice.

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

1. Donner l'ensemble de définition f. Après avoir justifier son existence, donner l'ensemble de définition de la primitive de f qui s'annule en 0.
2. Montrer en les calculant l'existence de deux fonctions polynomiales P et Q telles que $f(x) = P(x) + \frac{Q(x)}{x^3 - x^2 - x + 1}$.
3. Calculer la primitive de f qui s'annule en 0.