Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023

UE de calcul différentiel, courbes et surfaces

Contrôle partiel: Correction

Exercice 1. (6 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0, y) = 0$ et $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2}$ si $x \neq 0$.

1. Donner la définition de la différentiabilité de f en $(0, 0)$.
2. Montrer que f admet une dérivée directionnelle au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas différentiable en ce point.

Correction. Question 1. La fonction f est dite différentiable en $(0, 0)$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = f(0, 0) + L(x, y) + \underset{\|(x,y)\|\to 0}{o}(\|(x, y)\|).$$

Cette dernière condition est équivalente à

$$\lim_{\substack{\|(x,y)\|\to 0 \\ (x,y)\neq 0}} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - L(x, y)|}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Question 2. Soit $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculons la dérivée directionnelle de f dans la direction u en $(0, 0)$. Si $a = 0$, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{f(tu) - f(0, 0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{1}{t}(0 - 0) = 0.$$

Sinon, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{f(tu) - f(0, 0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{1}{t}\left(\frac{t^3 b^3}{t^2 a^2} - 0\right) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{b^3}{a^2} = \frac{b^3}{a^2} = f(u).$$

Dans tous les cas, la dérivée directionnelle de f dans la direction u en $(0, 0)$ n'est autre que $f(u)$.
Si f était différentiable en $(0, 0)$, par un résultat du cours, elle serait continue. Pourtant, en définissant pour $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n := (\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^2})$, la suite (u_n) tend vers 0 quand $n \to +\infty$, alors que

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)^3}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^3} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0, 0).$$

La fonction f n'est donc pas continue en $(0, 0)$, et elle ne peut donc pas être différentiable en $(0, 0)$.
Un autre argument possible pour nier la différentiabilité de f serait que si elle était différentiable les dérivées directionnelles devraient dépendre de manière linéaire de u, ce qui n'est pas le cas parce qu'elles valent $f(u)$ et f n'est pas linéaire.

Exercice 2. (6 points) Soit $E := C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$, à valeurs réelles. On munit E de la norme définie pour tout $f \in E$ par

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Enfin, on définit

$$\begin{aligned} F : \quad & E \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int_0^1 \sin(f(t))dt. \end{aligned}$$

1. Montrer que F est différentiable en tout point de E, et que pour tous f et h dans E, la différentielle de F en f appliquée à h vaut

$$DF(f)(h) = \int_0^1 \cos(f(t))h(t)dt.$$

Indication : On pourra utiliser sans preuve le fait que pour tous réels a et b,

$$|\sin(b) - \sin(a) - \cos(a)(b-a)| \leq \frac{1}{2}(b-a)^2.$$

2. En quels points de E cette différentielle est-elle nulle ?

Correction. Question 1. Il faut provuer que l'on a $\int_0^1 \sin(f(t)+h(t))dt - \int_0^1 \cos(f(t))h(t)dt = o(||h||_\infty)$. Or, en suivant l'indication appliquée à $a = f(t) + h(t)$ et $b = f(t)$ et en intégrant sur $[0, 1]$ on a bien

$$\left| \int_0^1 \sin(f(t) + h(t))dt - \int_0^1 \cos(f(t))h(t)dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |h(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2}||h||_\infty^2.$$

Puisque $||h||_\infty^2 = o(||h||_\infty)$ le résultat est prouvé.
Question 2. La différentielle sera nulle seulement pour les fonctions f qui sont des constantes c telles que $\cos(c) = 0$ (donc $c = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pur $k \in \mathbb{Z}$. Il est clair que pour ces fonctions la différentielle est nulle, puisque $\cos(f(t)) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Pour montrer la réciproque, on montre d'abord que si la différenteille s'annule alors $\cos(f(t)) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Prenons donc une fonction f telle que $\int_0^1 \cos(f(t))h(t)dt = 0$ pour toute fonction continue h. En prenant $h = \cos(f)$ on trouve $\int_0^1 \cos^2(f(t))dt = 0$. Comme $\cos^2(f(t)) \geq 0$, on déduit $\cos^2(f(t)) = 0$. On a donc $f(t) \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ pour tout t. Cela n'implique pas en général que f est contante (elle pourrait prendre différentes valeurs dans cet ensemble) mais comme f est une fonction continue elle doit être constante, parce que si elle prenait deux valeurs différentes dans cet ensemble elle devrait également prendre toutes les valeurs intermédiaires, ce qui est absurde.

Exercice 3. (6 points) Soit

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto e^{xy}(xy - 1) + y(y - 4). \end{aligned}$$

1. Montrer que f admet un unique point critique.
2. Ce point est-il un point d'extremum local ?
3. Est-il un point d'extremum global ? (On pourra commencer par tracer le tableau des variations des fonctions $z \mapsto e^z(z - 1)$ et $y \mapsto y(y - 4)$.)

Correction. Question 1. La fonction f est de classe C^∞. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= ye^{xy}(xy - 1) + ye^{xy} = xy^2 e^{xy}, \\ \partial_y f(x, y) &= xe^{xy}(xy - 1) + xe^{xy} + 2y - 4 = x^2 ye^{xy} + 2y - 4. \end{aligned}$$

En conséquence, le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si c'est une solution du système

$$\begin{cases} xy^2 e^{xy} = 0, \\ x^2 ye^{xy} + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

Soit donc (x, y) un point critique de f, c'est à dire une solution de ce système. Par la première équation, comme l'exponentielle ne s'annule pas, on a nécessairement

$$xy^2 = 0,$$

et donc $x = 0$ ou $y = 0$. Mais si $y = 0$, la deuxième équation donne $-4 = 0$, ce qui est impossible. On a donc $x = 0$, et par la deuxième équation, $y = 2$. Réciproquement, on vérifie que le point $(0, 2)$ est solution de notre système. On a bien démontré que f admet un unique point critique : le point $(0, 2)$.

Question 2. Commençons par calculer la hessienne de f. En dérivant à nouveau les dérivées partielles de f, on trouve que la hessienne de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} + xy^3e^{xy} & 2xye^{xy} + x^2y^2e^{xy} \\ 2xye^{xy} + x^2y^2e^{xy} & x^2e^{xy} + x^3ye^{xy} + 2 \end{pmatrix}.$$

En $(x, y) = (0, 2)$, on obtient donc

$$H_f(0, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est visiblement définie positive. Par un résultat du cours, $(0, 2)$ est un point de minimum local de f.

Question 3. Soit $a : z \in \mathbb{R} \mapsto e^z(z - 1)$ et $b : y \in \mathbb{R} \mapsto y(y - 4)$. Ces fonctions sont de classe C^∞, et pour tout $z \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$a'(z) = ze^z, \qquad b'(y) = 2y - 4.$$

La dérivée de a s'annule en 0, et est négative pour les z négatifs et positive pour les z positifs. La dérivée de b s'annule pour $y = 2$, et est négative pour les $y \leq 2$ et positive pour les $y \geq 2$. Un calcul rapide de limites nous permet d'obtenir les tableaux de variations suivant :

z	$-\infty$		0		$+\infty$
$a(z)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

y	$-\infty$		2		$+\infty$
$b(y)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Il apparaît donc que le minimum global de a est -1 et que le minimum global de b est -4. On en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = a(xy) + b(y) \geq -1 + (-4) = -5.$$

Or $f(0, 2) = -5$, donc $(0, 2)$ est un point de minimum global de f.

Exercice 4. (8 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|||Dg(x)|||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \leq k,$$

où $k \in [0, 1[$. On définit f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à $x \in \mathbb{R}^n$ associe $f(x) := x + g(x)$. Le but de cet exercice est de montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que g est une application contractante.
2. Montrer que si x et x' sont deux points de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = f(x')$, alors
$$\|x' - x\| = \|g(x') - g(x)\|.$$
En utilisant la première question, en déduire que f est injective.
3. Montrer que f est surjective. (Étant donné $y \in \mathbb{R}^n$, on pourra appliquer le théorème du point fixe à l'application $x \mapsto y - g(x)$.)
4. Pourquoi f est-elle de classe C^1 ? Exprimer sa différentielle en fonction de celle de g. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n$,
$$\|Df(x)(u)\| \geq (1-k)\|u\|.$$
En déduire que $Df(x)$ est un homéomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ et conclure.

Correction. Question 1. Une contraction est une application qui est Lipschitzienne de constante strictement plus petite que 1. L'inégalité des accroissement finis nous dit qu'une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est Lipschitzienne de constante au plus $\sup_x |||Dg(x)|||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}$ si ce sup est fini. Ici ce sup vaut $k \in (0,1)$, donc la constante de Lipschitz est plus petite que 1.
Question 2.. L'égalité $f(x) = f(x')$ signifie $x + g(x) = x' + g(x')$ donc $x - x' = g(x') - g(x)$. En prenant les normes des deux côtés on trouve
$$||x - x'|| = ||g(x') - g(x)|| \leq k||x - x'||.$$
Cela implique $(1-k)||x - x'|| \leq 0$ et, comme $k < 1$, $||x - x'|| \leq 0$, donc $||x - x'|| = 0$ et donc $x = x'$. Comme on a montré que $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$, la fonction f est injective.
Question 3. Pour la surjectivité de f on fixe $y \in \mathbb{R}^n$ et on cherche x tel que $f(x) = y$. Cela signifie $x = y - g(x)$, donc on cherche bien un point fiwe de la fonction $x \mapsto y - g(x)$. La constant de Lipschitz de cette fonction est la même que celle de g, qui est une contraction, donc cette application est aussi une contraction. Comme $\mathbb{R}^n$ est un espace complet, elle admet donc un (unique) point fixe, c'est-à-dire une solution de $f(x) = y$. La fonction f est donc surjective.
Question 4. La fonction f est de classe C^1 parce que l'identité $x \mapsto x$ l'est, et g aussi, par hypothèse, et f est donc la somme de deux fonctions C^1. On a $Df = I - Dg$, où I est l'application linéaire identité, différentielle de l'identité. On a donc
$$Df(x)(u) = u - Dg(x)(u),$$
ce qui nous donne
$$||Df(x)(u)|| = ||u - Dg(x)(u)|| \geq ||u|| - ||Dg(x)(u)|| \geq ||u|| - |||Dg(x)|||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}||u|| \geq ||u|| - k||u||,$$
ce qui est l'inégalité recherchée. Comme $k < 1$ on trouve $||Df(x)(u)|| > 0$ pour tout $u \neq 0$, donc l'application linéaire $Df(x)$ est injective pour tout x. S'agissant d'une application linéaire de ^{n} dans $\mathbb{R}^n$ elle est aussi surjective, continue, et d'inverse continue, et elle est donc un homéomorphisme. Le théorème d'inversion locale garantit donc que f est localement un difféomorphisme. Comme f est aussi injective, le théorème d'inversion globale garantit qu'elle est globalement un difféomorphisme entre son domaine et son impage. Ici, comme elle est dfinié sur $\mathbb{R}^n$ et son image est $\mathbb{R}^n$, elle est un difféomiorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.