

EXO 1

$$H^*(y) = \sup_x \left(x \cdot y - \frac{|x|^3}{3} - \frac{|x|^2}{2} \right)$$

POUR MAXIMISER, IL VAUT MIEUX PRENDRE $x = t \frac{y}{|y|}$ $t \geq 0$

(SI $y=0 \Rightarrow x=0$ ET $\max = 0$)

$$\max_t t|y| - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \Rightarrow |y| = t^2 + t, \quad t \geq 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4|y|}}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{on prend} \\ + \text{ ET} \\ \text{pas } - \end{array} \right)$$

$$H^*(y) = |y|t - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{(4|y|+1)^{3/2}}{12} - \frac{6|y|+1}{12}$$

EN $y \approx 0$ ON A

$$H^*(y) = 1 + \frac{3}{2} \cdot 4|y| + O(|y|^2) - \frac{6|y|+1}{12} = O(|y|^2)$$

$$\Rightarrow \alpha = 2$$

EN $|y| \rightarrow +\infty$ ON A

$$H^*(y) \approx C|y|^{3/2}$$

$$\Rightarrow \beta = 3/2$$

SI $H(x) = a|x|^p + b|y|^q$ $1 < p < q < +\infty$

$H \in C^1$ ET STR. CONV. $\Rightarrow H^*$ STR. CONV. ET C^1

$$H^*(0) = \sup(-H(x)) = 0 \quad \nabla H^*(0) = 0 \text{ car } 0 = \nabla H(0)$$

$$\nabla H^* = (\nabla H)^{-1} \quad \text{AVEC } |\nabla H(x)| = O(|x|^{p-1}) \text{ POUR } x \approx 0$$

ON TROUVE $|\nabla H^*(y)| = O(|y|^{\frac{1}{p-1}})$ POUR $y \approx 0$

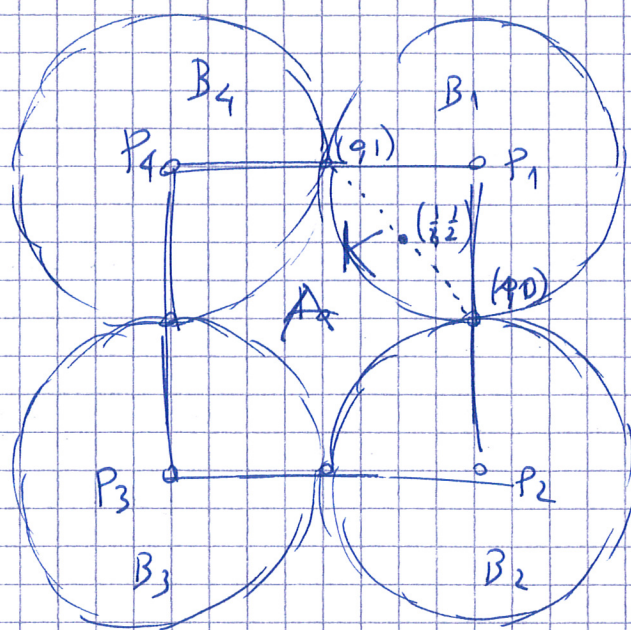
$$\Rightarrow H^*(y) = O(|y|^{1+\frac{1}{p-1}}) \quad \text{ET} \quad 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} = p'$$

AVEC $|\nabla H(x)| = O(|x|^{q-1})$ POUR $|x| \gg 1$ ON TROUVE

$$|\nabla H^*(y)| = O(|y|^{\frac{1}{q-1}}) \quad \text{ET} \quad H^*(y) = O(|y|^{q'}) \text{ POUR}$$

$$|y| \gg 1$$

EXO 3

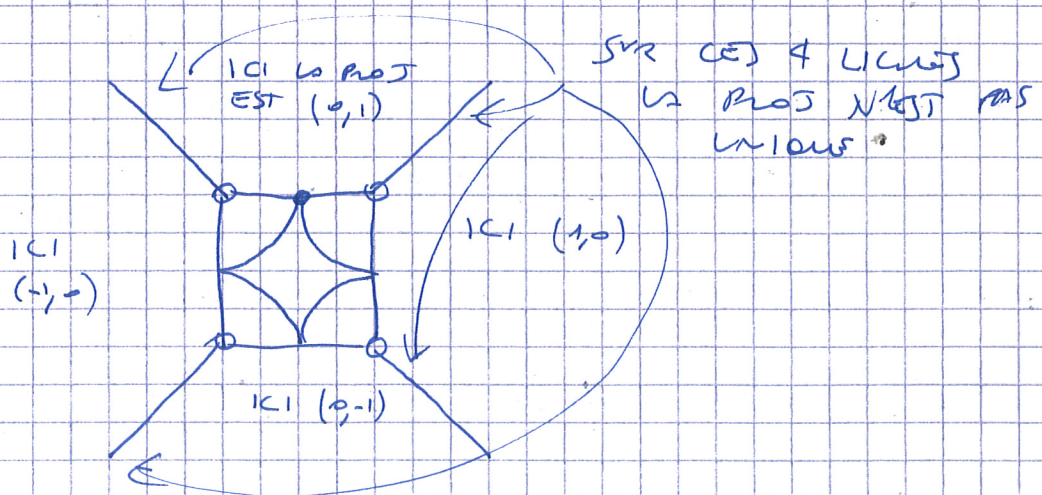


1) A EST FORMÉ OR K EST FERMÉ ET LES BOULES B_i SONT OUVERTES. $A \subset K$ QUI EST BORNÉ
 $\Rightarrow A$ COMPACT

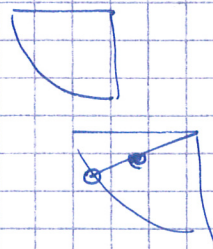
2) A N'EST PAS CONVEXE: $(0,1) \in A$, $(1,0) \in A$
 MAIS $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin A$ OR $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in B_1$

3) $\min \{ |x - \bar{x}| : x \in A \}$ ADMET UNE SOLUTION
 CAR A EST COMPACT ET $x \mapsto |x - \bar{x}|$ EST CONTINUE

4)



DANS LES 4 PARTIES
 LA PROJECTION EST UNIQUE:



EXO 4

1) B_1 EST COMPACTE ET $f(x) := \frac{1}{2}Ax \cdot x$ EST CONTINU

2) C'EST LES CONDITIONS D'OPTIMISATION STANDARD.

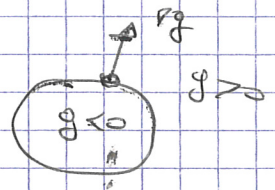
SOIT $x_0 \in \overset{o}{B}_1 \Rightarrow \nabla f(x) = 0, \quad |x_0|^2 - 1 = 0$

SOIT $x_0 \in \partial B_1 \Rightarrow \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$ AVEC

$$\partial B_1 = \{g=0\} \text{ ou } g(x) = \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)$$

ON TROUVE $\lambda \geq 0$ EN UTILISANT L'OPTIMISATION SUR B_1 ET PAS JUSTE SUR ∂B_1

(DIRECTION DE ∇f ET ∇g)



3) 1^{ère} CS: $|x_0| < 1 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow -\lambda_1 \leq 0 \Rightarrow \lambda_1 \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ EST CONVEXE ET $\nabla f(x_0) = 0$

$\Rightarrow x_0$ MINIMISE

2^{ème} CS: $|x_0| = 1$. ON UTILISE

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + (Ax_0 - b) \cdot h + \frac{1}{2} Ah \cdot h$$

$$= f(x_0) - \lambda x_0 \cdot h + \frac{1}{2} (A - \lambda_1 I) h \cdot h + \frac{\lambda_1}{2} |h|^2$$

ON PROUV $x_0 + h \in B_1 \Rightarrow |x_0 + h|^2 \leq 1 = |x_0|^2$

$$\Rightarrow 2x_0 \cdot h + |h|^2 \leq 0$$

ATTENTION: IL FAUT DIRE $\lambda \geq 0$

$$\Rightarrow -\lambda x_0 \cdot h \geq \frac{\lambda_1 |h|^2}{2}$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) \geq f(x_0) + \frac{\lambda_1 + \lambda}{2} |h|^2 + \frac{1}{2} \underbrace{(A - \lambda_1 I) h \cdot h}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow x_0$ MINIMISE

4) SUPPOSONS $x_0 \notin \partial B_1$ SOIT v UN VECTEUR T.Q. $Av \cdot v \leq (\lambda_1 + \varepsilon) |v|^2$ ET $x_0 \cdot v < 0$

SOIT $t = \frac{-x_0 \cdot v}{|v|^2/2} \Rightarrow x_0 + tv \in B_1 \Rightarrow f(x_0 + tv) \geq f(x_0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} Av \cdot v + t^2 \lambda x_0 \cdot v \Rightarrow Av \cdot v + \lambda |v|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda + \varepsilon \geq 0$$

SI $x_0 \in B_1$ ALORS $Df(x_0) \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0 \geq -\lambda_1$