Chapitre 5

Séries de Fourier

5.1 Introduction : cordes vibrantes

Attention : la section 5.1 est une introduction qui donne les motivations et les applications des séries de Fourier, mais n'est pas le corps principal de ce qu'on a vu en classe.

Même si elles portent le nom de Joseph Fourier, qui a développé leur théorie autour des années 1820 pour l'étude de la propagation de la chaleur, les séries de Fourier doivent beaucoup à l'étude des cordes vibrantes, due à D'Alembert, Euler et Bernoulli au milieu du XVIIIème siècle. On va s'appuyer sur leur description des cordes vibrantes pour présenter la théorie des séries de Fourier.

5.1.1 Mise en équation

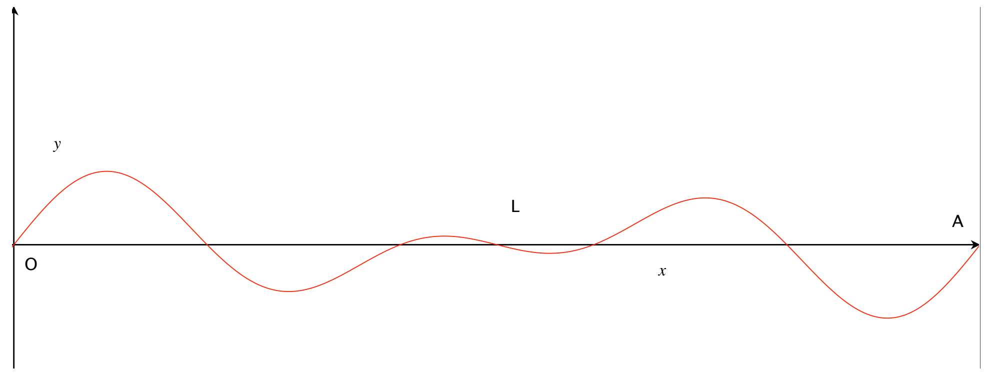
Un son est une variation périodique de la pression de l'air. Cette variation peut être perçue par l'oreille humaine et transformé en signal électrique, compréhensible par le cerveau humain, grâce à l'oreille interne (tympan, cochlée...). Dans un instrument de musique, un son est produit par une force mécanique appelée ≪ attaque ≫ sur un système mécanique vibrant. Ce dispositif vibrant est souvent relié à une ≪ caisse de résonance ≫, qui amplifie le son et le rend audible par l'auditoire. L'attaque d'un son est différente selon les instruments. Par exemple on peut recenser trois familles d'instruments à cordes : les cordes pincées (guitare, harpe, clavecin), les cordes frappées (piano, célesta) et les cordes frottées (violon, violoncelle, alto).

On va se concentrer sur un "instrument" très simple : une corde élastique, tendue entres ses deux extrémités O et A que l'on suppose immobiles. Autrement dit, on reprend le dispositif étudié par Pythagore au Vème siècle avant JC !

On note

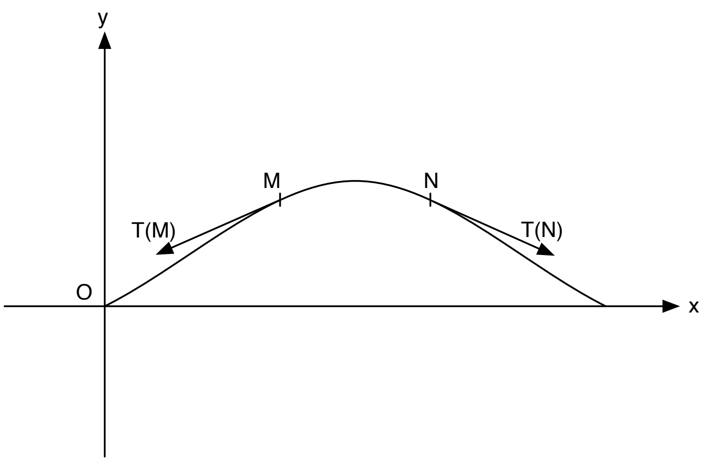
- L la longueur de la corde au repos (en cm),
- ρ la masse par unité de longueur, ou masse linéique (en g/cm),
- τ la tension de la corde liée au matériau - nylon ou acier par exemple - (en Newton).

On s'intéresse aux petites oscillations de la corde au cours du temps. On se place dans un



repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est l'une des extrémités de la corde et $(O, \vec{i})$ la direction de la corde au repos. L'axe $(O, \vec{j})$ est perpendiculaire à $(O\vec{i})$ et les mouvements de la cordes sont supposés avoir lieu dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $h(t, x)$ la hauteur de la corde à l'instant t au-dessus du point d'abscisse $x \in [0, L]$.

On considère un petit morceau de corde délimité par les points $M(x, h(t, x))$ et $N(x + \delta x, h(t, x + \delta x))$, à un instant t fixé.



Les forces extérieures qui s'exercent sur le petit morceau de corde sont sont la tension $\vec{T}(M)$ exercée par la partie gauche de la corde au point M, et la tension $\vec{T}(N)$ exercée par la partie droite de la corde au point N (on néglige les effets de la pesanteur).Ces forces sont supposées tangentes à la corde au point considéré (les physiciens disent que la corde est élastique). On note $\theta(x)$ l'angle entre le vecteur $\vec{i}$ et $\vec{T}(M)$. De même, $\theta(x+\delta x)$ est l'angle entre le $\vec{i}$ et $\vec{T}(N)$.

On projette les 2 forces sur les axes et on obtient

$$\begin{cases} \vec{T}(M) = -|\vec{T}(M)|\cos(\theta(x))\vec{\imath} - |\vec{T}(M)|\sin(\theta(x))\vec{\jmath} \\ \vec{T}(N) = |\vec{T}(N)|\cos(\theta(x+\delta x))\vec{\imath} + |\vec{T}(N)|\sin(\theta(x+\delta x))\vec{\jmath} \end{cases}$$

On fait l'hypothèse que les points de la corde ne se déplacent pas horizontalement, ce qui se traduit par le fait que leur norme est une constante : c'est la tension de la corde, que l'on a noté τ. Autrement dit

$$\begin{cases} \vec{T}(M) = -\tau\cos(\theta(x))\vec{\imath} - \tau\sin(\theta(x))\vec{\jmath} \\ \vec{T}(N) = \tau\cos(\theta(x+\delta x))\vec{\imath} + \tau\sin(\theta(x+\delta x))\vec{\jmath} \end{cases}$$

On applique maintenant laloi de Newton, qui dit que la masse du morceau de corde que multiplie la variation de vitesse, est égale à la somme des forces extérieures. En projetant cette relation sur l'axe vertical, on obtient :

$$\rho\,\delta x\,\partial_t^2 h(t,x) = -\tau\sin(\theta(x)) + \tau\sin(\theta(x+\delta x))$$

Puisque $\theta(x)$ est supposé très petit, on remplace $\sin(\theta(x))$ par $\theta(x)$. De plus $\theta(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto h(t,x)$au point d'abscisse x, donc

$$\theta(x) = \partial_x h(t,x) \text{ et } \theta(x+\delta x) = \partial_x h(t,x+\delta x),$$

d'où

$$\partial_t^2 h(t,x) = \frac{\tau}{\rho}\,\frac{\partial_x h(t,x+\delta x) - \partial_x h(t,x)}{\delta x}.$$

En faisant tendre $\delta x \to 0$, on obtient l'équation des cordes vibrantes

$$\partial_t^2 h(t,x) = \frac{\tau}{\rho}\partial_x^2 h(t,x).$$

Il est clair que le mouvement de la corde dépend de la façon dont on la frappe (ou pince, ou frotte...) à l'instant t initial $t = 0$. Disons que l'on connaît la position initiale de la corde $u(x)$, et sa vitesse initiale $v(x)$. Avec ces notations, la fonction $h(t,x)$ doit être entièrement déterminé par les conditions

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}h(t,x) = c^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}h(t,x) = 0 \\ h(t,0) = h(t,L) = 0, \text{ pour tout } t \\ h(0,x) = u(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}h(0,x) = v(x), \end{cases}$$

où l'on a noté $c = \sqrt{\tau/\rho}$.

5.1.2 En avant la musique !

L'un des objectifs de ce qui va suivre, est de démontrer que le problème des cordes vibrantes $(\mathcal{P})$ ci-dessus admet une unique solution $h(t,x)$ qui s'écrit comme superposition (d'un nombre éventuellement infini) d'ondes sinusoïdales. Dans le cas où la corde est pincée à l'instant $t=0$ (c'est-à-dire $v=0$), cette solution s'écrit

$$h(t,x)=\sum_{n\geq 1} A_k \sin\big(\frac{k\pi}{L}x\big)\cos\big(\frac{k\pi c}{L}t\big)$$

Le membre de droite de cette égalité porte le nom de décomposition de h en série de Fourier.

La note produite par la corde est donc une superposition (somme infinie) d'ondes sinusoïdales h_k de fréquence temporelle $\nu k = kc/2L$, où

$$h_k(t,x)=A_k \sin\big(\frac{k\pi}{L}x\big)\cos\big(\frac{k\pi c}{L}t\big)$$

Ces ondes sinusoïdales sont appelées k-ième harmonique de la note produite. La première, h_1 est appelée fondamentale. Le nombre A_k est l'amplitude de cette k-ième harmonique dans la note. Cette amplitude est reliée aux données initiales u et v (on rappelle qu'on traite ici le cas $v=0$, pour simplifier). Lors de la production d'une note, l'oreille humaine perçoit avant tout la fondamentale. Ce que l'on appelle hauteur de la note est la fréquence nu_1. Cependant l'oreille entend aussi quelques unes des premières harmoniques : le timbre d'un instrument est directement relié aux harmoniques qu'il peut émettre ainsi qu'à leur intensité. Le son produit par une corde a pour fréquence (fondamentale)

$$\nu_1=\frac{c}{2L}=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}.$$

On retrouve donc ainsi le fait qu'on obtient un son plus aigu en en augmentant la tension τ de la corde, ou bien en diminuant la masse linéique de la corde (par exemple en diminuant son diamètre), ou en diminuant la longueur L de la corde, ce que l'on fait sur une guitare en posant ses doigts sur le manche. Au passage, on voit qu'on obtient une note de fréquence double en divisant la longueur de la corde par 2 : l'écart entre ces deux notes est appelé octave !

Pour terminer, signalons que les physiciens définissent l'énergie de la corde vibrante comme étant le nombre

$$E=\sqrt{\sum_{k\geq 0} A_k^2}.$$

C'est aussi cette quantité que l'on appelle intensité du son produit. Les amplitudes A_k de chacune des harmoniques doivent donc tendre vers 0 assez vite quand $k\to+\infty$ pour que la série converge et que l'énergie soit finie. En particulier, comme on l'a tous expérimenté, seules les premières harmoniques sont perceptibles par l'oreille humaine.

5.2 Séries trigonométriques

5.2.1 Applications périodiques

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique de période $T \in \mathbb{R}$ (on dit aussi T-périodique) si pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$. Il est facile de voir que l'ensemble des fonctions T-périodiques est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont 2π-périodiques ; la fonction $x \mapsto e^{ix/T}$ est $(2\pi/T)$-périodique. Une fonction définie sur un intervalle de longueur T peut bien sur être identifiée à une fonction T-périodique.

On utilisera constamment la propriété élémentaire suivante.

Proposition 5.2.1 Soit f une application T-périodique. Si f est continue par morceaux sur $[0, T]$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est continue par morceaux sur $[x_0, x_0 + T]$ et l'on a

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

5.2.2 Séries trigonométriques

Définition 5.2.2 Une série de fonctions de terme général f_n est appelée série série trigonométrique lorsqu'il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels telles que $f_0(t) = a_0$ pour tout t et, pour tout $n \geq 1$ et tout t on a

$$f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

Nous utiliserons souvent la notation exponentielle pour les séries trigonométriques. Posant en effet $c_0 = a_0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad \text{et} \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

on obtient la relation

$$\sum_{n\geq 0} f_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

Réciproquement il est clair qu'une série de fonctions du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est une série trigonométrique, avec $a_0 = c_0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Le lecteur devra pourtant prendre garde à cette notation. On dira en effet que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ converge lorsque la série $a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ correspondante converge, ce qui conduit à la

Définition 5.2.3 On appelle p-ième somme partielle de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$S_p = \sum_{n=-p}^{n=p} c_n e^{int}$$

On dira que la série est convergente (simplement, normalement) lorsque la suite de fonctions (S_p) converge (simplement, normalement).

Lorsque les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, on voit immédiatement que la série trigonométrique correspondante converge normalement, la fonction somme étant alors une fonction continue et 2π-périodique.

Proposition 5.2.4 L'ensemble $\mathcal{D}$ des points où la série trigonométrique converge simplement est invariant sous l'effet de la translation $t \mapsto t + 2\pi$, et la fonction somme S est 2π-périodique. Si la série converge normalement sur un intervalle I de $\mathcal{D}$, la fonction S est continue sur I. C'est notament le cas lorsque les séries de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes.

Lorsque la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$ (donc sur $\mathbb{R}$), il existe une relation simple entre les coefficients c_n et la fonction somme de cette série.

Proposition 5.2.5 Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\ e^{int}$ une série trigonométrique normalement convergente sur $[-\pi, \pi]$ et S sa fonction somme. Alors la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ et l'on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(t) e^{-int} dt$$

Si de plus la série trigonométrique $\sum inc_n e^{int}$ des dérivées est normalement convergente, de somme S_1, la fonction S est dérivable avec $S' = S_1$.

Preuve.— La fonction somme S est continue par la théorie générale et 2π-périodique. De plus on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(t) e^{-ipt} dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t} dt$$

On utilise alors le lemme suivant dont la preuve est un **Exercice** facile.

Lemme 5.2.6 Soit k un entier relatif et $I(k) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt$. On a

$$I(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

La dérivabilité de S est directement donnée par le théorème de dérivabilité des séries de fonctions.

□

5.3 Coefficients de Fourier

Pour alléger les notations, nous travaillerons avec des fonctions 2π-périodiques. L'ensemble des définitions et résultats de ce chapitre s'applique cependant aux fonctions T-périodiques, à condition de remplacer à chaque fois les fonctions 2π-périodiques $t \mapsto \cos(nt)$, $t \mapsto \sin(nt)$ et $t \mapsto e^{int}$ respectivement par les fonctions $t \mapsto \cos(2\pi nt/T)$, $t \mapsto \sin(2\pi nt/T)$ et $t \mapsto e^{2i\pi nt/T}$ qui sont T-périodiques. On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux sur chaque période.

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{int}$ une série trigonométrique normalement convergente sur $[-\pi, \pi]$ et S sa fonction somme, on sait que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos(nx)dx \text{ pour } \ n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\sin(nx)dx \text{ pour } \ n \geq 1. \end{aligned}$$

Cela va nous conduire à la

Définition 5.3.1 Soit f une fonction continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. On appelle coefficients de Fourier exponentiels de f les nombres complexes c_n définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

Les coefficients de Fourier trigonométriques sont les nombres définis par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

et, pour $n \geq 1$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

Remarque 5.3.2 Si S est la somme d'une série trigonométrique $\sum c_n e^{int}$ normalement convergente, les coefficients de Fourier exponentiels de S sont les c_n (cf. la Proposition 5.2.5).

Exercice 5.3.3 *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$.*

Exercice 5.3.4 *Soit f une fonction de $\mathcal{E}$ et g la fonction de $\mathcal{E}$ définie par $g(t) = f(t + a)$ où a est un réel fixé. Calculer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de f.*

Voici d'abord quelques propriétés très simples de ces coefficients de Fourier.

i) Dans chacune des définitions ci-dessus, l'intervalle $[-\pi, \pi]$ peut être remplacée par n'importe quel intervalle de longueur 2π.

ii) Si f est une fonction à valeurs réelles, a_n et b_n sont réels et $\bar{c}_n = c_{-n}$ pour tout n

iii) Si f est une fonction paire, tous les b_n sont nuls. De même si f est impaire, tous les a_n sont nuls

iv) On a $a_0 = c_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ et $c_n = (a_n - ib_n)/2$, $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$

v) Les coefficients de Fourier d'une combinaison linéaire de fonctions sont les combinaisons linéaires correspondantes des coefficients de Fourier de chacune d'elles : $c_n(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\, c_n(f) + \mu\, c_n(g)$

vi)
$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)| dt \ .$$

La propriété suivante porte le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue.

> **Proposition 5.3.5** Soit f une fonction de $\mathcal{E}$. Les suites $(a_n(f))$, $(b_n(f))$, $(c_n(f))$ et $(c_{-n}(f))$ des coefficients de Fourier de f sont convergentes et ont pour limite 0.

Preuve.— Compte tenu du point (iv) précédent, il est clair qu'il suffit de prouver la proposition pour les suites (c_n) et (c_{-n}) $(n \in \mathbb{N})$. De plus puisque $\bar{c}_n(f) = c_{-n}(\bar{f})$, on voit qu'il suffit de prouver la proposition pour la suite (c_{-n}). Pour les fonctions $f = \sum_{j=0}^{N} K_j \mathbb{1}_{[x_j, x_{j+1}]}$ en escaliers, on a

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K_j e^{int} dt = \frac{1}{2in\pi} \sum_{j=0}^{N} K_j (e^{inx_{j+1}} - e^{inx_j}),$$

et donc la majoration

$$|c_{-n}| \leq \frac{1}{n\pi} \sum_{j=0}^{N} |K_j| \ .$$

Pour une fonction continue par morceaux f sur $[-\pi, +\pi]$ quelconque, la proposition découle alors du fait que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe (voir le lemme ci-dessous) une fonction ϕ constante par morceaux (fonction en escalier) telle que $||f - \phi||_\infty \leq \varepsilon$. Du coup, on a $c_n(f) = c_n(f - \phi) + c_n(\phi)$ et donc

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f - \phi)| + |c_n(\phi)| \leq \varepsilon + |c_n(\phi)|.$$

En prenant $\limsup_{n\to\pm\infty}$ à gauche et à droite on trouve

$$\limsup_{n\to\pm\infty} |c_n(f)| \le \varepsilon$$

et donc, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, $\lim c_n(f) = 0$. □

Deux fonctions distinctes peuvent-elles avoir les mêmes coefficients de Fourier ? En appliquant le résultat suivant à leur différence, on voit qu'il n'en est rien si ces fonctions diffèrent en un point où elles sont toutes deux continues :

Proposition 5.3.6 Soit f une fonction continue par morceaux périodique. S'il existe un point $c \in [-\pi, \pi]$ tel que $f(c) \neq 0$ et f soit continue en c, alors les coefficients de Fourier de f ne sont pas identiquement nuls.

Preuve.—On suppose que $f(c) = a > 0$. Puisque f est continue au point c, il existe un réel $\alpha > 0$ assez petit tel que pour tout $x \in]c-\alpha, c+\alpha[$, on ait $f(x) \ge a/2$. Supposons que tous les coefficients de Fourier de f soient nuls. Alors pour tout polynôme trigonométrique $P(t)$, positif sur $[c-\alpha, c+\alpha]$, on a

$$0 = \int_{c-\pi}^{c+\pi} f(t)P(t)dt \ge \frac{a}{2}\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} P(t)dt + \int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t)P(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)P(t)dt$$

Prenons alors $P(t) = P_n(t) = (1+\cos(t-c)-\cos(\alpha))^n$. Sur $]c-\alpha, c+\alpha[$ on a $\cos(t-c) > \cos(\alpha)$, donc $P_n(t) \ge 1$, et, pour tout n,

$$\frac{a}{2}\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} P_n(t)dt \ge a\alpha.$$

Pour $t \in [c-\pi, c+\pi] \backslash [c-\alpha, c+\alpha]$ on a par contre $(1+\cos(t-c)-\cos(\alpha)) < 1$ et donc $P_n(t) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Si la suite $(P_n)_n$ convergeait uniformément vers 0 sur cet intervalle, on pourrait passer à la limite et écrire

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} &\left(\int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t)P_n(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)P_n(t)dt\right) \\ &= \int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t)\lim_{n\to+\infty} P_n(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)\lim_{n\to+\infty} P_n(t)dt = 0\end{aligned}$$

On aboutirait à

$$0 \ge a\alpha,$$

ce qui est absurde.

Malheureusement la suite (P_n) ne converge pas uniformément sur $[c-\pi, c+\pi]\backslash[c-\alpha, c+\alpha]$. Mais c'est le cas sur $[c+\alpha+\delta, c+\pi]$, où $\delta > 0$ est aussi petit que l'on veut, ce qui conduit à la preuve suivante :

On remarque que, pour tout n, on a :

$$\begin{aligned}|\textstyle\int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)P_n(t)dt| &\le \delta \sup|f| + |\textstyle\int_{c+\alpha+\delta}^{c+\pi} f(t)P_n(t)dt| \\ &\le \delta\sup|f| + \pi\sup|f| \sup_{t\in[c+\alpha+\delta, c+\pi]} |P_n(t)| \\ &\le \delta\sup|f| + \pi\sup|f| \left(\max(\cos\alpha, 1-\cos\alpha+\cos(\alpha+\delta)\right)^n .\end{aligned}$$

Pour montrer que la limite est zéro, on choisit successivement, $\epsilon > 0$ étant donné, $\delta > 0$ de sorte que $\delta \sup |f| < \frac{\epsilon}{2}$ puis $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\pi \left(\max(\cos \alpha, 1 - \cos \alpha + \cos(\alpha + \delta)\right)^n \sup |f| < \frac{\epsilon}{2}$$

pour $n \geq N$. □

5.4 Séries de Fourier : Cas des fonctions “très” régulières

Nous venons de définir les coefficients de Fourier d'une fonction périodique f dont nous avons seulement supposé qu'elle était continue par morceaux. Nous nous intéressons maintenant à la série trigonométrique dont les coefficients sont précisément les $c_n(f)$ et que l'on appelle *série de Fourier de* f. La question naturelle est de savoir si cette série trigonométrique converge et dans ce cas si sa fonction somme est f. La réponse est très délicate dans le cas où l'on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires sur la fonction f. Par contre, et c'est l'objet de ce paragraphe, on peut voir assez facilement que c'est bien le cas pour les fonctions périodiques qui sont suffisamment régulières, c'est à dire plusieurs fois dérivables. L'ensemble des résultats qui suivent repose sur la

Proposition 5.4.1 Soit k un entier strictement positif, f une fonction 2π-périodique, $(c_n(f))$ la suite des coefficients de Fourier exponentiels de f. Si f est k fois continument dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe un réel $M > 0$ tel que pour, tout $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$, on ait

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^k}.$$

Preuve.— Supposons que f est continument dérivable. En intégrant par parties et puisque $f(2\pi) = f(0)$ on obtient, pour $n \neq 0$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi i n} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt$$

et donc

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|} |c_n(f)|.$$

Dans le cas d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k > 1$, on obtient facilement

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|^k} |c_n(f^{(k)})| \leq \frac{M}{|n|^k}.$$

□

Proposition 5.4.2 Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ avec $k \geq 2$, alors la série de Fourier de f est normalement convergente et sa somme est f.

Preuve.— Puisque l'on a $|c_n(f)| \leq M/n^2$, la série trigonométrique $\sum c_n(f)e^{int}$ est normalement convergente. On a vu que les coefficients de Fourier de la fonction somme S sont alors égaux à ceux de la fonction f. Puisque f et S sont continues, la Proposition 5.3.6 entraine l'égalité $f = S$. □

Exercice 5.4.3 *Soit f la fonction paire et 2π-périodique définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques et montrer l'égalité*

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

5.5 Théorème de convergence simple de Dirichlet

Nous abordons maintenant le problème difficile de la convergence des séries de Fourier de fonctions peu régulières. Dans ce cas la convergence uniforme n'a pas toujours lieu et nous devrons nous contenter d'un théorème de convergence simple dû à G. Dirichlet.

On dira qu'une fonction continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ est continument dérivable par morceaux (on dit aussi $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur cet intervalle s'il existe une partition de $[0, 2\pi]$ constituée d'un nombre fini d'intervalles $[a, b]$ tels que

i) f est continue sur $]a, b[$; de plus f possède une limite à droite en a et une limite à gauche en b,

ii) f est dérivable sur $]a, b[$ et f' est continue par morceaux sur cet intervalle.

Proposition 5.5.1 [Théorème de Dirichlet] Soit f une fonction 2π-périodique continument dérivable par morceaux et $x_0 \in [0, 2\pi]$. Alors la série de Fourier de f converge simplement en x_0 et sa somme est

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

où $f(x_0+)$ et $f(x_0-)$ sont les limites à droite et à gauche de f en x_0. Si de plus f est continue en x_0, sa série de Fourier converge vers $f(x_0)$.

La preuve de ce théorème utilise le

Lemme 5.5.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a :

$$\sum_{k=-n}^{n} \varepsilon^{iku} = \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]}.$$

Preuve.— On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} e^{iku} &= e^{-inu}\sum_{k=0}^{2n}(e^{iu})^k = e^{-inu}\frac{1-e^{i(2n+1)u}}{1-e^{iu}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})u}}{e^{-iu/2}}\cdot\frac{1-e^{i(2n+1)u}}{1-e^{iu}}\\ &= \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})u}-e^{i(n+\frac{1}{2})u}}{e^{-iu/2}-e^{iu/2}} = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]}.\end{aligned}$$

□

On peut maintenant démontrer le Théorème de Dirichlet (Théorème 5.5.1).

Preuve.— Soit $S_n(x)$ la $n-$ième somme partielle de la série de Fourier de f :

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

En utilisant les définition des c_k, on a

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\big[\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)}\big]dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]}{\sin[\frac{t-x}{2}]}dt,\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du Lemme 5.5.2. En posant $u = t-x$, et en utilisant la périodicité de l'intégrand, on obtient

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x+u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x+u)du.$$

On découpe l'intégrale en deux et on change de variable dans le premier morceau :

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x+u)du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x+u)du\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x-u)du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x+u)du.\end{aligned}$$

On a donc la "formule de Dirichlet" :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}\ \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}du.$$

Au passage, on note que pour $f_0 = 1$, on a $c_0(f_0) = 1$, $c_k(f_0)$ pour tout $k \neq 0$, et la formule de Dirichlet donne

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}du.$$

Notons alors $\alpha = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot$ On a

$$\begin{aligned}
S_n(x)-\alpha &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin[(n+\frac12)u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}\ \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}du - \alpha\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin[(n+\frac12)u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin[(n+\frac12)u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}\ \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \alpha\Big]du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \phi(u)\sin[(n+\frac{1}{2})u)]du.
\end{aligned}$$

Dans cette expression,

$$\phi(u) = \frac{u}{\sin[\frac{u}{2}]}\ \frac{1}{u}\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \alpha\Big]$$

est une fonction continue par morceaux sur $[0,2\pi]$ (pour cela il faut définir $\phi(0)$, et on peut par exemple prendre $\phi(0) := \lim_{u\to 0^+}\phi(u)$, qui existe grâce à l'hypothèse de dérivabilité de f). Par conséquent on peut appliquer le Lemme de Riemann-Lebesgue à ϕ, ce qui nous permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x)-\alpha = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \phi(u)\sin[(n+\frac{1}{2})u)]du = 0.$$

Cela termine la preuve du théorème de Dirichlet. □

Chapitre 6

Méthodes hilbertiennes

6.1 Convergence en moyenne quadratique

On peut comprendre le théorème de Dirichlet ainsi que la Proposition 5.4.2 comme des énoncés portant sur la possibilité d'approcher d'aussi près que possible une fonction 2π-périodique par un polynôme trigonométrique. Das un cas on a une convergence simple, dans l'autre (avec des hypothèeses plus restrictives) on a même une convergence uniforme.

Pour pouvoir considérer de fonctions moins régulières, par exemple continues par morceaux, il faut changer de façon de mesurer la distance entre les fonctions. Pour f et g deux fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques, on note

$$d_2(f,g) = (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)-g(t)|^2 dt)^{1/2}.$$

Par rapport à la distance habituelle

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)-g(x)|,$$

un des avantages de d_2 est qu'elle ne "voit pas" les éventuelles discontinuités isolés des fonctions f et g.

Le nombre $d_2(f,g)$ est appelé écart quadratique moyen entre f et g.

Proposition 6.1.1 *Si une suite de fonction (f_n) continues par morceaux et 2π-périodique converge uniformément vers une fonction f, alors cette suite converge vers f en écart quadratique moyen, c'est à dire*

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(f,f_n) = 0$$

Preuve.— L'hypothèse de convergence de la suite (f_n) s'écrit

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x)-f(x)| = 0$$

Or on a

$$d_2(f, f_n) \leq \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)|(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt)^{1/2}$$

ce qui montre la proposition. □

Exercice 6.1.2 Montrer par un exemple que la réciproque n'est pas vraie, même si on travaille dans l'espace des fonctions continues.

L'objectif principal de ce chapitre est de montrer la

Proposition 6.1.3 Soit f une fonction périodique de période 2π, de carré intégrable. Parmi tous les polynômes trigonométriques $Q(x)$ de degré inférieur à n, la n-ième somme partielle $S_n(f)$ de la série de Fourier de f est le seul pour lequel l'écart quadratique moyen $d_2(f, Q)$ atteint sa plus petite valeur, et l'on a

$$d_2(f, S_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$$

Pour cela, on va utiliser de manière essentielle le fait que l'écart d_2 provient d'un produit scalaire (presque!) sur l'espace des fonctions de carré intégrable.

6.2 Espaces préhilbertien

6.2.1 Produit scalaire

Définition 6.2.1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Un produit scalaire (hemitien) sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$: $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ telle que

i) $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est une application linéaire, pour tout $y \in E$ fixé.

ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

iii) $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$;

iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$.

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exemple 6.2.2 Sur $E = \mathbb{C}^m$, $(z, z') \mapsto \sum_j z_j\overline{z'_j}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^m$. Sur $E = \mathbb{R}^m$, $(x, x') \mapsto \sum_j x_j x'_j$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si le produit scalaire se trouve prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on parle de produit scalaire euclidien. Dans le cas contraire, on parle de produit scalaire hermitien.

Exemple 6.2.3 Sur $E = \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{C})$, l'application $(f,g) \mapsto (\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt)$ définit un produit scalaire. Notons que, si on remplace $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{C})$, par l'espace des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{C}$, ce n'est plus un produit scalaire. Si en effet une fonction f est nulle sauf en un nombre fini de points où elle est non-nulle, le produit scalaire $\langle f, f\rangle$ est nul sans que la fonction soit identiquement nulle.

On est donc conduit à modifier la notion de fonction intégrable, et à considérer que ces fonctions telles que $\langle f, f\rangle = 0$ sont "nulles", mais c'est une autre histoire...

6.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

L'inégalité suivante, appelée inégalité de Cauchy-Schwarz, joue un rôle très important dans l'analyse hilbertienne.

> **Proposition 6.2.4** Dans un espace préhilbertien on a :
>
> $$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle}\ .$$

Preuve.— Soit $x, y \in E$. On note θ l'argument du nombre complexe $\langle x, y\rangle$, de sorte que $|\langle x, y\rangle| = e^{-i\theta}\langle x, y\rangle$. D'après la propriété iv), pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle x + \lambda e^{i\theta} y\,,\, x + \lambda e^{i\theta} y\rangle \geq 0.$$

En développant, on obtient, pur tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x, x\rangle + \langle x, \lambda e^{i\theta} y\rangle + \langle \lambda e^{i\theta} y, x\rangle + \langle \lambda e^{i\theta} y, \lambda e^{i\theta} y\rangle \\
&\leq |x|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}(e^{-i\theta}\langle x, y\rangle) + \lambda^2 |y|^2 \\
&\leq |x|^2 + 2\lambda|\langle x, y\rangle| + \lambda^2|y|^2.
\end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré en λ ne change pas de signe, donc son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire

$$|\langle x, y\rangle|^2 - |x|^2\,|y|^2 \leq 0.$$

□

6.2.3 Norme associée

On peut associer une norme à un produit scalaire. Autrement dit, un espace préhilbertien peut être naturellement considéré comme un espace vectoriel normé :

> **Proposition 6.2.5** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. La fonction
>
> $$N : x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$$
>
> est une norme sur E.

Preuve.— La fonction N est bien définie sur E puisque $\langle x,x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ d'après la propriété iv). Elle est a valeur dans $\mathbb{R}^+$ par définition. On a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 &= N(x)^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + N(y)^2 \\ &\leq N(x)^2 + 2|\langle x,y\rangle| + N(y)^2 \leq N(x)^2 + 2N(x)N(y) + N(y)^2, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de Cauchy-Schwarz. On a ainsi $N(x+y)^2 \leq (N(x)+N(y))^2$, et donc l'inégalité triangulaire

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

□

On notera désormais $N(x) = |x|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Remarque 6.2.6 On peut retrouver, dans le cas d'une norme associée à un produit scalaire, le produit scalaire à partir de la norme. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il suffit en effet de remarquer l'identité :

$$|x+y|^2 - |x-y|^2 = \langle (x+y),(x+y)\rangle - \langle (x-y),(x-y)\rangle = 4\langle x,y\rangle\ ,$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)\ .$$

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il faut jouer avec $x+y$, $x-y$, $x+iy$ et $x-iy$.

Exemple 6.2.7 L'application $f \mapsto \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ définit une norme sur $C^0([a,b];\mathbb{C})$. On la note $|f|_2$, et on a pour f,g continues,

$$d_2(f,g) = |f-g|_2.$$

6.2.4 Orthogonalité

Définition 6.2.8 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ un espace préhilbertien.

- Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux lorsque $\langle x,y\rangle = 0$.
- Plus généralement une famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ de vecteurs de E est dite orthogonale lorsque $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ pour tous $i \neq j$.
- La famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ est orthonormée lorsque

$$\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j},$$

où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon ($\delta_{i,j}$ est appelé symbole de Kronecker).

Exemple 6.2.9 La famille constituée des fonctions

$$\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\cos(x), \frac{1}{\pi}\cos(2x), \dots \frac{1}{\pi}\cos(nx), \dots, \frac{1}{\pi}\sin(x), \frac{1}{\pi}\sin(2x), \dots, \frac{1}{\pi}\sin(nx), \dots$$

est orthonormée dans $\mathcal{C}^0([0,2\pi])$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

De même, la famille constitutée des fonctions e^{ikx}, $k \in \mathbb{Z}$ est orthonormée dans $\mathcal{C}^0([0,2\pi];\mathbb{C})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Lorsqu'on dispose d'une base orthonormée, l'expression du produit scalaire est très simple, puisque c'est celle que l'on connait dans $\mathbb{R}^2$:

Proposition 6.2.10 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ un espace préhilbertien de dimension n, et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de E. Si $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}.$$

Preuve.— En utilisant la linéarité et l'anti-linéarité du produit scalaire par rapport à chacune de ses variables respectives, on trouve

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{k=1}^n y_k e_k\rangle = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j\overline{y_k}\langle e_j, e_k\rangle = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j\overline{y_k}\delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}.$$

□

Proposition 6.2.11 (Théorème de Pythagore) Soit $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ une famille orthogonale. On a

$$|e_1 + e_2 + \dots + e_n|^2 = |e_1|^2 + |e_2|^2 + \dots + |e_n|^2.$$

Preuve.— Il suffit d'écrire

$$|e_1 + e_2 + \dots + e_n|^2 = \langle \sum_{j=1}^n e_j, \sum_{k=1}^n e_k\rangle = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \langle e_j, e_k\rangle = \sum_{j=1}^n |e_j|^2.$$

□

Proposition 6.2.12 Dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension finie, on peut toujours construire une base orthonormée.

Preuve.— Par définition, il existe une base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E, où n est la dimension de E. A partir de cette base, on va construire une base orthonormée par le procédé de Gram-Schmidt.

— On pose $\epsilon_1 = e_1/|e_1|$. On a donc $|\epsilon_1| = 1$.
— On pose $f_2 = e_2 - \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1$. On a $\langle f_2, \epsilon_1 \rangle = \langle e_2, \epsilon_1 \rangle - \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \langle \epsilon_1, \epsilon_1 \rangle = 0$. Posant alors $\epsilon_2 = f_2/|f_2|$, la famille $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ est orthonormée.
— On continue ainsi : à l'étape $k \leq n$, on pose

$$f_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, \epsilon_j \rangle \epsilon_j.$$

Le vecteur f_k est orthogonal à chacun des vecteurs ϵ_i déjà construits, puisque

$$\langle f_k, \epsilon_i \rangle = \langle e_k, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, \epsilon_j \rangle \langle \epsilon_j, \epsilon_i \rangle = \langle e_k, e_i \rangle - \langle f_k, \epsilon_i \rangle = 0.$$

On pose alors $\epsilon_k = f_k/|f_k|$, et on obtient une famille $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ orthonormée.

□

6.2.5 Projection orthogonale

Proposition 6.2.13 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et V un sous-espace vectoriel de E. Soit $x \in E$. Un vecteur $y \in V$ réalise le minimum de la distance de x à V, c'est-à-dire

$$|x - y| = \min_{b \in V} |x - b|,$$

si et seulement si $x - y$ est orthogonal à tous les vecteurs de V. S'il existe, un tel y est unique, et s'appelle projection orthogonale de x sur V. On le note $y = \Pi_V(x)$.

Preuve.— Supposons que $y \in V$ soit tel que $x - y$ est orthogonal à tous les vecteurs de V. Pour $b \in V$, on a

$$\begin{aligned}|x - b|^2 = |(x - y) + (y - b)|^2 &= |x - y|^2 + \langle x - y, y - b \rangle + \langle y - b, x - y \rangle + |y - b|^2 \\ &= |x - y|^2 + |y - b|^2,\end{aligned}$$

puisque $y - b \in V$. On a donc, pour tout $b \in V$, $|x - b| \geq |x - y|$, et

$$|x - y| = \min_{b \in V} |x - b|.$$

Réciproquement, si $y \in V$ est tel que

$$|x-y| = \min_{b\in V} |x-b|,$$

alors pour tout $v \in V$, et tout $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$|x-y+\alpha v|^2 \geq |x-y|^2.$$

En développant, on obtient

$$2\,\mathrm{Re}(\alpha\langle x-y, v\rangle) + \alpha^2 |v|^2 \geq 0.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a donc

$$2\alpha\,\mathrm{Re}\langle x-y, v\rangle + \alpha^2|v|^2 \geq 0,$$

ce qui entraine $\mathrm{Re}\langle x-y, v\rangle = 0$. Il suffit pour le voir de prendre $|\alpha|$ assez petit pour que le membre droite soit du signe de son premier terme.

En prenant $\alpha = i\beta$, on obtient de la même manière que $\mathrm{Im}\langle x-y, v\rangle = 0$.

Enfin supposons qu'il existe $y_1, y_2 \in V$ tels que $x-y_1$ et $x-y_2$ soient orthogonaux à tous les éléments de V. On a

$$|y_1-y_2|^2 = \langle y_1-y_2, y_1-y_2\rangle = \langle y_1-x, y_1-y_2\rangle + \langle x-y_2, y_1-y_2\rangle = 0,$$

d'où $y_1 = y_2$. □

Dans le cas où V est de dimension finie, $\Pi_v(x)$ existe toujours, et on peut en donner une expression simple.

Proposition 6.2.14 Soit V un sous-espace de dimension finie de l'espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de V. Tout $x \in E$ admet une projection orthogonale, et

$$\Pi_V(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j.$$

Preuve.— On cherche $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ tel que $x-y$ soit orthogonal à tous les éléments de V. Pour cela, il faut et il suffit que $x-y$ soit orthogonal à chacun des e_j. Or

$$\langle x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \alpha_k.$$

Donc $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$ convient, et on sait qu'un tel élément est unique. □

6.3 Application aux séries de Fourier

6.3.1 L'espace $L^2([0,2\pi])$

On note $L^2([0,2\pi])$ l'ensemble des fonctions $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ telles que $|f|^2$ est intégrable. Pour f et g dans $L^2([0,2\pi])$, on pose

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Cette quantité est bien définie puisque, pour $f,g\in L^2$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}dx|^2\leq\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\int_0^{2\pi}|g(x)|^2dx.$$

Malheureusement la quantité $\langle\cdot,\cdot\rangle$ n'est pas tout à fait un produit scalaire sur L^2 : comme on l'a déjà signalé, il est tout à fait possible pour une fonction f continue par morceaux d'avoir $f\neq 0$ et $\langle f,f\rangle=0$. Un des objectifs du cours d'intégration en de troisième année est de trouver une définition adéquate de "fonction intégrable" qui permette de lever cette difficulté. Pour l'instant, on peut remarquer que la quantité $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est vraiment un produit scalaire si l'on ne travaille qu'avec des fonctions continues.

La famille des fonctions $e_k=x\mapsto e^{ikx}$, $k\in\mathbb{Z}$ est orthonormée dans $L^2([0,2\pi])$ pour ce (pseudo-) produit scalaire :

$$\langle e_j,e_k\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(j-k)x}dx=\delta_{j,k}.$$

D'ailleurs les coefficients de Fourier (complexes) de f sont donnés par

$$c_k(f)=\langle f,e_k\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-ikx}dx.$$

6.3.2 Inégalité de Bessel

Soit $f\in L^2([0,2\pi])$, et $S_n=S_n(f)$ la n-ième somme partielle de sa série de Fourier

$$S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)e^{ikx}=\sum_{k=-n}^{n}\langle f,e_k\rangle e^{ikx}$$

Soit aussi V le sous-espace vectoriel de L^2 constitué par les polynômes trigonométriques de degré $\leq n$. La famille orthonormale $\{e_{-n},\dots,e_{-1},e_0,e_1,\dots e_n\}$ est une base de V (c'est même la définition de V). On a, pour tout $k\in\{-n,\dots,n\}$,

$$\langle S_n-f,e_k\rangle=\langle S_n,e_k\rangle-\langle f,e_k\rangle=c_k(f)-c_k(f)=0.$$

Autrement dit, S_n-f est orthogonal à tous les éléments de V : $S_n(f)$ est donc la projection orthogonale de f sur V, et l'on vient de démontrer la Proposition 6.1.3. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt.$$

On en déduit l'inégalité de Bessel :

Proposition 6.3.1 Soit f une fonction 2π-périodique de carré intégrable, et $c_k(f)$ ses coefficients de Fourier. La série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ converge, et

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

En terme des coefficients de Fourier trigonométriques de f, et puisque $c_0 = a_0$, $c_n = (a_n - ib_n)/2$ et $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$ pour $n \geq 1$, l'inégalité de Bessel s'écrit

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 + |b_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

On remarque qu'on peut déduire une version plus forte de la Proposition 5.3.5 comme corollaire de l'inégalité de Bessel : en effet, si $\sum_n |c_n|^2$, on a forcément $c_n \to 0$.

6.3.3 Identité de Parseval

En fait, l'inégalité de Bessel ci-dessus est une égalité. On va le prouver pour les fonctions 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6.3.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. Alors on a $||S_n(f) - f||_2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En particulier, notant $c_n(f)$ ses coefficients de Fourier, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Preuve.— On commence par le cas $f \in C^2$. Dans ce cas, les sommes partielles $S_n(f)$ de la série de Fourier de f convergent uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$. En particulier, on a vu que

$$||S_n(f) - f||_2 \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ceci donne la première partie de l'énoncé dans ce cas particulier.

Si f n'est pas C^2 mais seulement continue par morceaux, on fixe $\varepsilon > 0$ et on trouve une fonction constante par morceaux ϕ telle que $||\phi - f||_\infty \leq \varepsilon$. On contruit ensuite, en remplaçant les sauts de la fonction ϕ par des fonctions lisses qui passent d'une valeur à la suivante sur un intervalle très petit autour du saut, une fonction $\psi \in C^2$ telle que $||\phi - \psi||_2 \leq \varepsilon$ (attention, dans ce cas on ne peut pas obtenir $||\phi - \psi||_\infty \leq \varepsilon$). On a donc contruit une fonction $\psi \in C^2$ telle que $||f - \psi||_2 \leq 2\varepsilon$. Maintenant on utilise

$$||S_n(f) - f||_2 \leq ||S_n(\psi) - f||_2 \leq ||S_n(\psi) - \psi||_2 + ||\psi - f||_2.$$

Ici, la première inégalité vient de la propriété de minimalité de $S_n(f)$, qui minimise la distance à f parmi tous les polynômes trigonométrique de même dégré (donc fait mieux que $S_n(\psi)$). En prenant la $\limsup_n$ on obtient

$$\limsup_n ||S_n(f) - f||_2 \leq \limsup_n ||S_n(\psi) - \psi||_2 + ||\psi - f||_2 \leq 0 + 2\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on trouve $\limsup_n ||S_n(f) - f||_2 \leq 0$ et donc $\lim_n ||S_n(f) - f||_2 = 0$.

Ceci donne la première partie de l'inégalité pour f quelconque. Pour prouver l'identité de Parseval, il suffit d'utiliser

$$||f||_2 = \lim_n ||S_n(f)||_2.$$

□