

Notes du Cours  
Analyse et Convergence II  
Math203

Thierry Ramond  
Mathématiques  
Université Paris Sud  
e-mail: [thierry.ramond@math.u-psud.fr](mailto:thierry.ramond@math.u-psud.fr)

version du 6 avril 2016,  
après des très petites modifications faites par F. Santambrogio

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Suites de fonctions</b>	<b>4</b>
1.1	Quelques rappels sur les suites numériques . . . . .	4
1.1.1	Notion de limite . . . . .	4
1.1.2	Comment montrer qu'une suite numérique converge ? . . . . .	5
1.2	Notion de suite de fonctions . . . . .	5
1.3	Convergence uniforme . . . . .	7
1.3.1	Distance entre courbes . . . . .	7
1.3.2	Définition de la convergence uniforme . . . . .	9
1.4	Convergence simple . . . . .	10
1.4.1	Un exemple : la suite de fonctions $(x^n)_n$ . . . . .	10
1.4.2	Convergence simple . . . . .	11
1.5	Exemples . . . . .	12
1.5.1	Des triangles glissants . . . . .	12
1.5.2	$f_n(x) = \frac{x}{n+x}$ . . . . .	13
1.5.3	$f_n(x) = xe^{-nx}$ . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Propriétés de la limite</b>	<b>15</b>
2.1	Continuité . . . . .	15
2.2	Intégrabilité . . . . .	16
2.3	Dérivabilité . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Séries de Fonctions</b>	<b>21</b>
3.1	Quelques rappels sur les séries numériques . . . . .	21
3.2	Notion de série de fonction . . . . .	21

---

3.3	Notions de convergence . . . . .	23
3.4	Convergence normale . . . . .	24
3.5	Propriétés de la somme . . . . .	26
3.6	A propos des séries entières . . . . .	28
3.7	Un exemple . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Fonctions définies par des intégrales à paramètre</b>	<b>31</b>
4.1	Intégrales simples . . . . .	31
4.1.1	Notion de continuité uniforme . . . . .	31
4.1.2	Continuité . . . . .	32
4.1.3	Dérivation . . . . .	33
4.2	Intégrales généralisées . . . . .	35
4.2.1	Convergence uniforme . . . . .	35
4.2.2	Continuité, Dérivation . . . . .	36
4.2.3	Convergence normale . . . . .	37
4.3	Un exemple . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>41</b>
5.1	Introduction : cordes vibrantes et chaleur . . . . .	41
5.1.1	Mise en équation - cordes vibrantes . . . . .	41
5.1.2	Mise en équation - diffusion de la chaleur . . . . .	44
5.1.3	Résolution des équations et séries de Fourier . . . . .	45
5.2	Séries trigonométriques . . . . .	46
5.2.1	Applications périodiques . . . . .	46
5.2.2	Séries trigonométriques . . . . .	46
5.3	Coefficients de Fourier . . . . .	48
5.4	Séries de Fourier : Cas des fonctions “très” régulières . . . . .	51
5.5	Théorème de convergence simple de Dirichlet . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Méthodes hilbertiennes</b>	<b>55</b>
6.1	Convergence en moyenne quadratique . . . . .	55
6.2	Espaces préhilbertien . . . . .	56

---

6.2.1	Produit scalaire . . . . .	56
6.2.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz. . . . .	57
6.2.3	Norme associée . . . . .	57
6.2.4	Orthogonalité . . . . .	58
6.2.5	Projection orthogonale . . . . .	60
6.3	Application aux séries de Fourier . . . . .	62
6.3.1	L'espace $L^2([0, 2\pi])$ . . . . .	62
6.3.2	Inégalité de Bessel . . . . .	62
6.3.3	Identité de Parseval . . . . .	63

# Chapitre 1

## Suites de fonctions

### 1.1 Quelques rappels sur les suites numériques

#### 1.1.1 Notion de limite

On se rappelle qu'une suite numérique est une liste infinie de nombres, réels ou même complexes. De manière plus précise

**Définition 1.1.1** Une **suite numérique** est une fonction de  $\mathbb{N}$  dans l'ensemble des nombres réels (ou complexes), définie sur une partie infinie de  $\mathbb{N}$ . Si  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  est une suite, on note  $u_n$  le  $n$ -ième élément de la liste, c'est-à-dire le nombre  $u(n)$  image de  $n$  par  $u$ . On note aussi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou même simplement  $(u_n)$ , la suite  $u$ .

Ces "objets mathématiques" apparaissent lorsque l'on veut modéliser des phénomènes qui évoluent étape par étape, ou souvent lorsque l'on veut étudier étape par étape un phénomène qui évolue continument (c'est parfois plus facile, et parfois aussi suffisant). On peut penser par exemple

- au capital placé à un taux mensuel  $\tau$  : après  $n$  mois, le capital est  $u_n = (1 + \tau)^n u_0$  (suite géométrique de raison  $1 + \tau$  et de premier terme  $u_0$ ).
- au nombre d'individus d'une population de lapins : Fibonacci a imaginé que la population  $u_n$  au bout de  $n$  mois vérifie la relation de récurrence à deux termes  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$
- ...

L'étude mathématique d'une suite numérique consiste essentiellement à décrire son comportement asymptotique : que devient  $u_n$  quand  $n$  devient grand ? La notion essentielle est celle de limite d'une suite de nombre

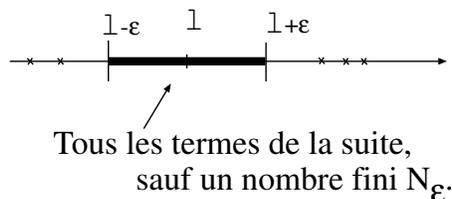


FIGURE 1.1 – Limite d'une suite

**Définition 1.1.2** On dit qu'une suite  $(u_n)$  de nombres réels a pour limite un réel  $\ell$  donné, ou **tend vers**  $\ell$ , ou encore **converge vers**  $\ell$  lorsque

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim(u_n) = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$$

### 1.1.2 Comment montrer qu'une suite numérique converge ?

On dispose d'un arsenal assez étendu pour démontrer qu'une suite converge. On peut citer pour mémoire

- les théorèmes d'opération avec les limites : si  $u_n \rightarrow \ell$  et  $v_n \rightarrow \ell'$ , alors  $u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell'$ ,  $u_n v_n \rightarrow \ell \ell'$ , ...
- le théorème des gendarmes : si  $v_n \leq u_n \leq w_n$ , et si  $v_n, w_n \rightarrow \ell$ , alors  $u_n \rightarrow \ell$ .
- le théorème sur les suites monotones : toute suite croissante et majorée est convergente.
- le critère de Cauchy (on y reviendra plus loin) : la suite  $(u_n)$  converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N_\varepsilon \implies |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

On notera que les deux derniers résultats permettent d'affirmer qu'une suite converge sans qu'il soit nécessaire de disposer de renseignement sur sa limite. Il y a plein d'autres façon de procéder, plus ou moins spécifique à un type de suite particulier. On peut par exemple penser aux suites géométriques, ou encore aux suites adjacentes ...

## 1.2 Notion de suite de fonctions

Les suites de fonctions sont essentiellement un outil interne aux mathématiques, et sont donc probablement plus difficile à appréhender que les suites de nombres. Par contre c'est un outil indispensable, par exemple pour approcher la fonction  $f$  solution d'un problème et en déduire

des propriétés de  $f$  - parfois même en déduire l'existence d'une telle solution ! Le but de ce cours est de vous les rendre familières.

**Définition 1.2.1** Soit  $I \subset \mathbb{R}$ . Une **suite de fonctions**  $(f_n)$  sur  $I$  est une liste infinie de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pour illustrer (une partie de) l'intérêt de ces objets, on va s'intéresser ici à l'équation différentielle  $f' = f$ . Tout le monde sait que les solutions de cette équation sont les fonctions  $f(x) = Ce^x$  où  $C \in \mathbb{R}$  (voir  $C \in \mathbb{C}$  si l'on s'intéresse aux solutions à valeurs complexes). Pour simplifier la discussion, on va se restreindre au problème de Cauchy

$$\begin{cases} f' = f, \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

dont la solution est la fonction  $f : x \mapsto e^x$ .

Très bien. Maintenant on se pose la question suivante : comment tracer la courbe représentative de  $f$  ?

On veut tracer la courbe représentative de  $f$ , disons  $\mathcal{C}_f$ , sur l'intervalle  $[0, 1]$  par exemple. Voici une méthode attribuée à Euler et qui porte son nom.

- Les seuls renseignements donnés par le problème sont  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$ . On peut alors penser que  $\mathcal{C}_f$  est proche, sur  $[0, 1]$  de sa tangente au point  $A_0 = (0, 1)$ , c'est à dire de la droite  $y = x + 1$ . De cette manière on obtient en particulier l'approximation  $e = f(1) \sim 2$ . Bof.

- On se dit que  $\mathcal{C}_f$  est proche de sa tangente en  $(0,1)$  mais pas sur tout l'intervalle  $[0, 1]$ . On coupe alors  $[0,1]$  en deux sous-intervalles de longueur  $1/2$ . Sur  $[0, 1/2]$ , on approche  $\mathcal{C}_f$  par sa tangente en  $A_0$ . On obtient en particulier  $f(1/2) \sim 3/2$  et  $f'(3/2) \sim 3/2$ .

Sur  $[1/2, 1]$ , on approche  $\mathcal{C}_f$  par sa tangente en  $A_1 = (1/2, f(1/2))$ . Petit problème : on ne connaît ni  $f(1/2)$  ni  $f'(1/2)$ . Qu'à cela ne tienne, on les remplace par les valeurs approchées qu'on vient d'obtenir. Sur  $[1/2, 1]$ , on approche  $\mathcal{C}_f$  par le segment d'équation  $y - 3/2 = 3/2(x - 1/2)$ .

Au total, on pense que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est proche, sur  $[0, 1]$  de la fonction affine par morceaux  $f_1$  définie par

$$f_1(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pour } x \in [0, 1/2] \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} & \text{pour } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

On a en particulier  $e = f(1) \sim f_1(1) = 9/4 = 2,25$ . Rebof.

- On recommence : on découpe l'intervalle en  $n$  morceaux, et on approche  $\mathcal{C}_f$  par la courbe représentative  $\mathcal{C}_n$  de la fonction affine par morceaux  $f_n$  construite de proche en proche.

Il reste une question. Quel sens donner à l'assertion "la courbe  $\mathcal{C}_n$  est proche de la courbe  $\mathcal{C}_f$ " ? Ou encore "la courbe  $\mathcal{C}_n$  converge vers la courbe  $\mathcal{C}_f$ " ?

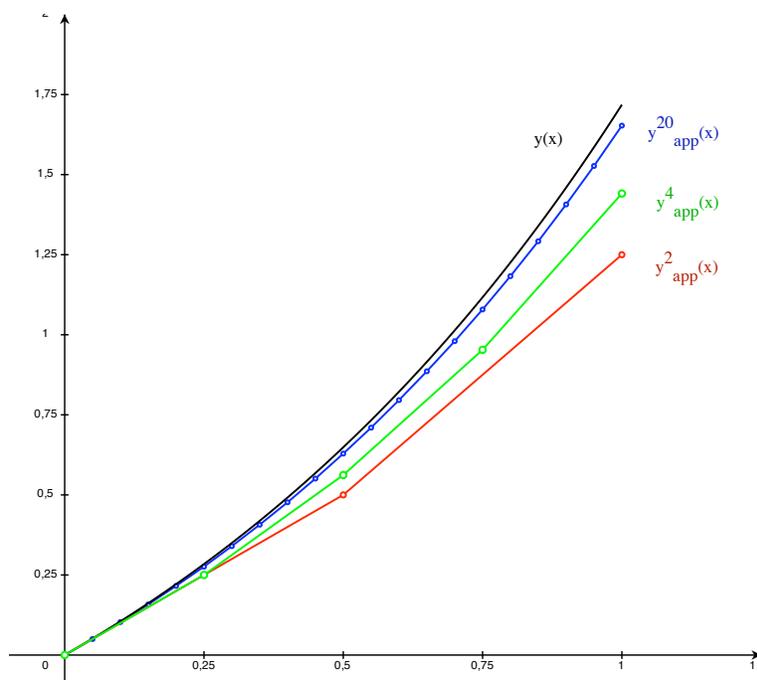


FIGURE 1.2 – Construction de la courbe représentative de l'exponentielle

### 1.3 Convergence uniforme

La notion naturelle de convergence pour une suite de fonctions  $(f_n)$  est celle que l'on a vue pour les courbes représentatives. On veut pouvoir dire que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge vers  $f$  lorsque la courbe représentative de la fonction  $f_n$  se rapproche, quand  $n$  tend vers l'infini, de celle de  $f$ . Comme dans le cas des suites numériques, la notion de convergence pour les suites de fonctions est plus précise que cette assertion un peu vague.

#### 1.3.1 Distance entre courbes

La première chose à faire est de définir une notion de distance entre les courbes représentatives de deux fonctions.

**Proposition 1.3.1** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle distance entre  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sur  $I$  la quantité

$$d_I(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$

D'un point de vue pratique, on peut se demander comment calculer cette distance : il s'agit de calculer la borne supérieure de la fonction  $|f - g|$  sur  $I$ . On verra des exemples un peu plus loin, mais on doit se souvenir du Théorème de Weierstrass :

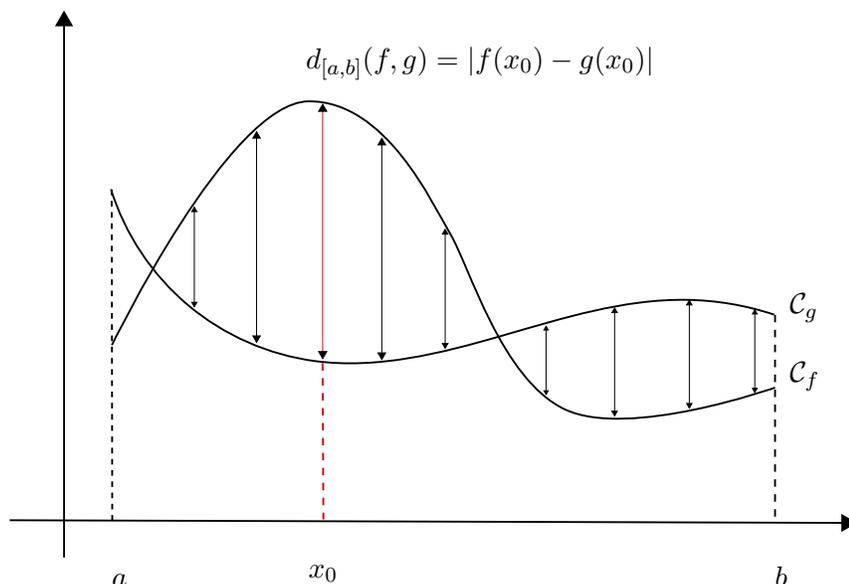


FIGURE 1.3 – Distance entre deux courbes

**Proposition 1.3.2** Si  $I = [a, b]$  est un intervalle fermé et borné, et si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$ , il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que

$$d_I(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$$

Autrement dit, dans les conditions de la proposition, cette borne supérieure est un maximum. Ce n'est pas toujours le cas :

- Pour  $I = [0, 1[$  et  $f : x \mapsto x^2$ ,  $d_I(f, 0) = \sup_{x \in [0, 1[} x^2 = 1 \neq f(x_0)$  pour tout  $x_0 \in I$ .
- Pour  $I = ]0, +\infty[$  et  $f : x \mapsto 1/x$ ,  $d_I(f, 0) = \sup_{x \in ]0, +\infty[} 1/x = +\infty$ .

Revenons au cadre de la proposition. La quantité  $d_I(f, g)$  est alors réellement une distance. Plus précisément

**Proposition 1.3.3** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle fermé  $I = [a, b]$ . Pour  $f \in E$  on note

$$|f|_\infty = d_I(f, 0).$$

L'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}^+$  qui à  $f$  associe  $|f|_\infty$  est une norme.

**Preuve.**— Tout d'abord, puisque  $f$  est continue sur  $I = [a, b]$ , il existe  $x_0 \in I$  tel que  $|f|_\infty = |f(x_0)|$ . Cela prouve en particulier que  $|f|_\infty$  est bien défini et dans  $\mathbb{R}^+$ . On vérifie les trois propriétés qui caractérisent une norme :

- i)  $|f|_\infty = 0$  si et seulement si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = 0$ , i.e.  $f$  est la fonction nulle.

ii) Pour tout  $x \in I$ , on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq |f|_\infty + |g|_\infty.$$

Autrement dit  $|f|_\infty + |g|_\infty$  est un majorant de  $|f(x) + g(x)|$  sur  $I$ . Puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants, on a

$$|f + g|_\infty \leq |f|_\infty + |g|_\infty,$$

ce qui est l'inégalité triangulaire.

iii) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Pour tout  $x \in I$ , on a  $|\lambda f(x)| \leq |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| |f|_\infty$ . Donc, en raisonnant comme ci-dessus,

$$|\lambda f|_\infty \leq |\lambda| |f|_\infty.$$

Pour  $a = 1/\lambda$  et  $g = af$ , cette inégalité donne

$$|f|_\infty = |ag|_\infty \leq |a| |g|_\infty = \frac{1}{|\lambda|} |\lambda f|_\infty.$$

On a donc bien  $|\lambda f|_\infty = |\lambda| |f|_\infty$  pour tout  $\lambda \neq 0$ . Cette égalité est bien sûr également vraie pour  $\lambda = 0$ .

□

### 1.3.2 Définition de la convergence uniforme

**Définition 1.3.4** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I \subset \mathbb{R}$ , et  $f$  une autre fonction définie sur  $I$ . On dit que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  lorsque la suite numérique  $(d_I(f_n, f))$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

$$d_I(f_n, f) = |f_n - f|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Pour montrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , il s'agit de montrer que la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$  tend vers 0. Autrement dit,  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\epsilon \implies |f_n - f|_\infty \leq \epsilon.$$

Puisque

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \iff \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

on arrive à la caractérisation suivante :

$(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$  lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\epsilon \implies \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Il est peut-être plus facile d'interpréter graphiquement cette propriété sous la forme

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\epsilon \implies \forall x \in I, f_n(x) \in [f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon].$$

## 1.4 Convergence simple

### 1.4.1 Un exemple : la suite de fonctions $(x^n)_n$

On étudie la suite de fonctions  $(f_n)$ , où  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $f_n(x) = x^n$ . On veut

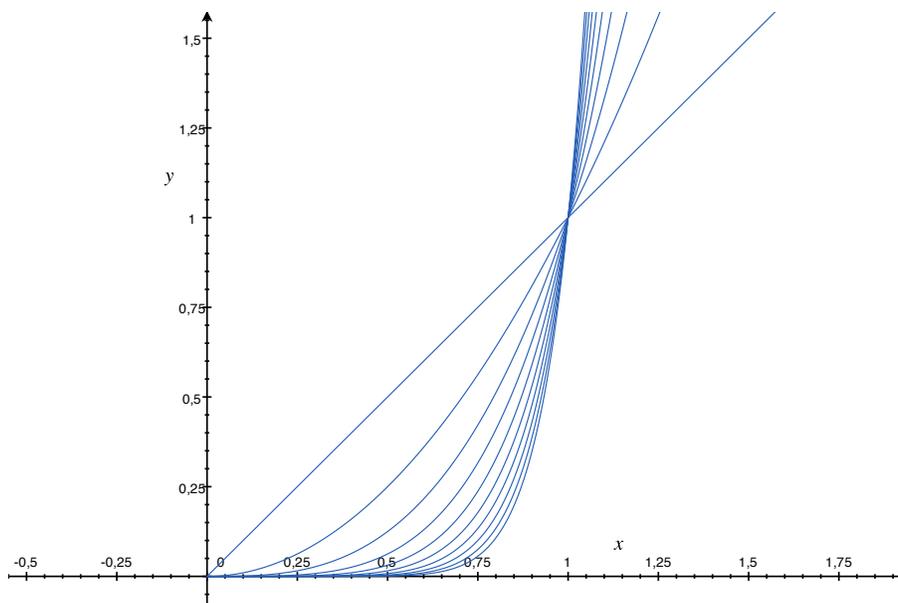


FIGURE 1.4 – Courbes représentatives des fonctions  $x \mapsto x^n$ , pour  $n \in \{1, \dots, 10\}$

savoir si la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I = [0, 1]$  vers une certaine fonction  $f$ . La première chose à faire est de trouver une fonction  $f$  qui soit un candidat plausible. Pour cela, on a tracé dans la figure ci-contre les premières courbes représentatives des fonctions de la suite  $(f_n)$ . Il semble que ces courbes se rapprochent de plus en plus de celle de la fonction nulle.

Il est donc raisonnable d'essayer de montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers la

fonction nulle  $f = 0$ . Or

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = f_n(1) = 1,$$

donc  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle : le problème est que  $f_n(1)$  ne tend pas vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . On peut d'ailleurs remarquer que si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , alors

$$\forall x \in I, f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Voilà donc un moyen de repérer une limite uniforme  $f$  possible : dans notre exemple ( $f_n(x) = x^n$ ), on a  $f_n(x) \rightarrow 0$  pour  $0 \leq x < 1$  et  $f_n(1) \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Donc si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , la fonction  $f$  est nécessairement la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Cependant, pour cette fonction  $f$ , et puisque  $f_n(1) - f(1) = 0$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1[} x^n = 1.$$

La suite  $(f_n)$  ne converge donc pas uniformément sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 1.4.1** Soit  $0 < a < 1$ . Montrer que la suite de fonctions  $(x \mapsto x^n)_n$  converge uniformément sur  $[0, a]$ . Y-a-t-il convergence uniforme sur  $[0, 1[$  ?

## 1.4.2 Convergence simple

De l'exemple précédent, on retient une définition et une condition nécessaire de convergence uniforme.

**Définition 1.4.2** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I \subset \mathbb{R}$ .

- i) On dit que la suite  $(f_n)$  converge simplement au point  $x_0$  de  $I$  lorsque la suite numérique  $(f_n(x_0))$  est convergente.
- ii) On dit que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  lorsqu'elle converge simplement en tout point  $x_0$  de  $I$ . Dans ce cas la fonction  $f$  définie sur  $I$  par

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0)$$

est appelée limite simple de la suite  $(f_n)$ .

**Proposition 1.4.3** Si la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , alors  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ .

En particulier, la première étape dans l'étude d'une suite de fonctions est toujours le calcul de son éventuelle limite simple. Celle-ci peut d'ailleurs ne pas exister : penser au cas de la suite de fonctions  $(x \mapsto x^n)_n$  sur  $]1, +\infty[$ . Résumons :

Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f_n(x) = x^n$ . La suite  $(f_n)$

- diverge sur  $]1, +\infty[$ .
- converge simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
- ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .
- converge uniformément vers  $f$  sur tout intervalle de la forme  $[0, a]$  avec  $0 < a < 1$ .

## 1.5 Exemples

### 1.5.1 Des triangles glissants

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions dont la courbe représentative est indiquée sur la Figure 1.5.

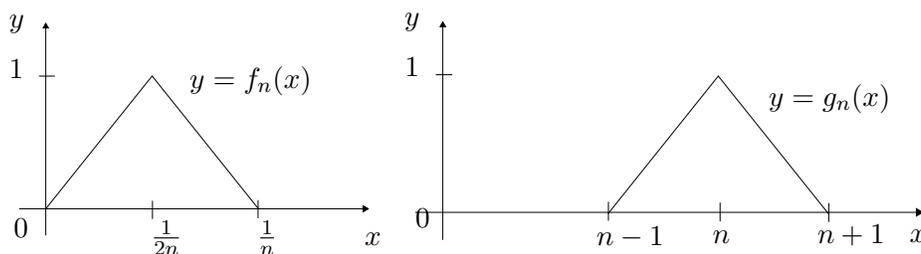


FIGURE 1.5 – Un triangle qui s'écrase sur l'axe des ordonnées, et un qui part à l'infini

— Convergence simple :

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle. En effet pour chaque  $x > 0$  fixé,  $f_n(x) = 0$  pour tout  $n > 1/x$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ , et on a aussi  $f_n(0) = 0$  pour tout  $n$ , donc  $f_n(0) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

La suite de fonctions  $(g_n)$  converge simplement elle aussi vers la fonction nulle. En effet pour chaque  $x \geq 0$  fixé,  $f_n(x) = 0$  pour tout  $n > x$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ .

— Convergence uniforme : Par contre aucune de ces deux suites ne converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$ , puisque  $|f_n|_\infty = |g_n|_\infty = 1$  pour tout  $n$ .

### 1.5.2 $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$

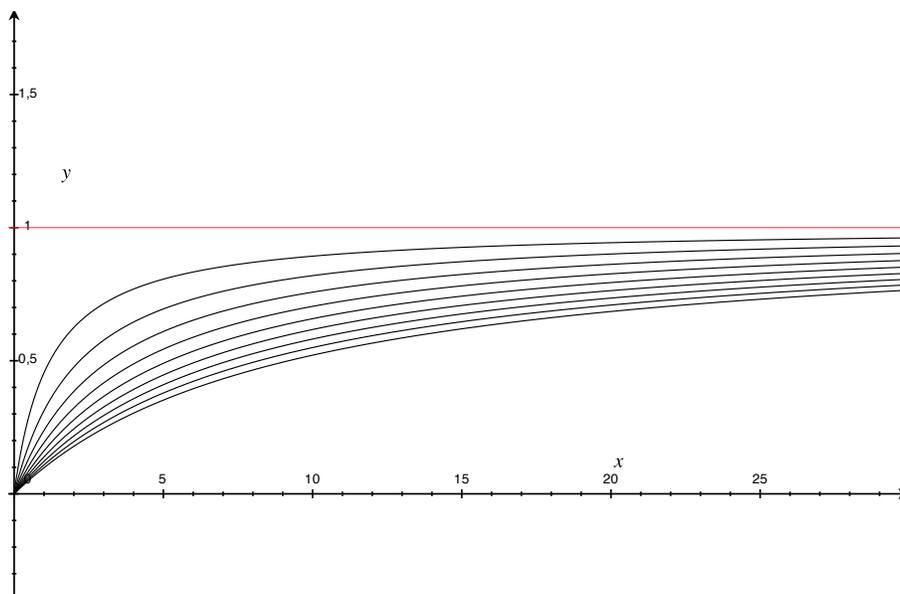


FIGURE 1.6 – Courbes représentatives des fonctions  $x \mapsto \frac{x}{x+n}$ , pour  $n \in \{1, \dots, 10\}$

Pour  $n \geq 1$ , on note  $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$ .

- Convergence simple : pour chaque  $x \in \mathbb{R}^+$  fixé,  $f_n(x) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Donc la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction nulle.
- Convergence uniforme : supposons que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$ . Sa limite est alors forcément la fonction nulle. Ainsi, pour tout  $\epsilon > 0$ , on pourrait trouver un  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que,

$$\forall n \geq N_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x}{n+x} \leq \epsilon$$

ce qui équivaut à

$$\forall n \geq N_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}^+, x(1-\epsilon) \leq n\epsilon.$$

En particulier on aurait

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x(1-\epsilon) \leq \epsilon N_\epsilon,$$

ce qui est absurde : prendre  $x = 2\epsilon N_\epsilon / (1-\epsilon)$ . Donc  $(f_n)$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}^+$ .

On remarque au passage que pour chaque  $x$  fixé, on a trouvé un  $N_\epsilon(x) = x(1-\epsilon)/\epsilon$  tel que

$$n \geq N_\epsilon(x) \rightarrow |f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Ce n'est pas une surprise, puisque l'on sait que la suite numérique  $(f_n(x))$  tend vers 0 pour chaque  $x$ . La différence entre la convergence simple et la convergence uniforme réside ici : pour la convergence simple le rang  $N_\epsilon(x)$  peut dépendre de  $x$ , alors que le rang  $N_\epsilon$  doit être le même pour tous les  $x$  dans le cas de la convergence uniforme.

**1.5.3**  $f_n(x) = xe^{-nx}$ 

- Convergence simple : Pour  $x = 0$ ,  $f_n(0) = 0$ , donc  $f_n(0) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Pour  $x > 0$  fixé,  $f_n(x) = xe^{-nx} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  (l'exponentielle l'emporte). Donc la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction nulle.
- Convergence uniforme : On veut estimer  $|f_n|_\infty = \sup_{x \geq 0} f_n(x)$ . Comme les fonctions  $f_n$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}^+$ , on va dresser leur tableau de variations. On a

$$f'_n(x) = e^{-nx}(1 - nx),$$

d'où le tableau donné dans la Figure 1.7. On a donc  $|f_n|_\infty = f_n(\frac{1}{n}) = 1/ne$ , donc

$x$	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$			
$f_n(x)$	0	$\frac{1}{ne}$	0

FIGURE 1.7 – Le tableau de variation de la fonction  $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$

$|f_n|_\infty \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction nulle.

## Chapitre 2

# Propriétés de la limite

On s'intéresse maintenant à la régularité (continuité, dérivabilité...) de la limite d'une suite de fonctions. L'exemple de la suite  $(f_n)$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = x^n$  montre que même si chacune des fonctions  $f_n$  est très régulière (ici de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ), la fonction limite peut ne même pas être continue (ici  $f(x) = 0$  pour  $x \in [0, 1[$  et  $f(1) = 1$ ). D'un point de vue un peu formel, on peut d'ailleurs noter que, toujours dans le cas de cette suite

$$0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = 1.$$

On est donc en présence d'un cas où l'on ne peut pas intervertir impunément l'ordre dans lequel on calcule deux limites successives.

Le point essentiel de ce chapitre est que ce genre de difficultés ne se présente pas lorsque la suite  $(f_n)$  converge uniformément. On précise ci-dessous ce principe trop vague pour l'instant.

### 2.1 Continuité

**Proposition 2.1.1** Soit  $I = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$  un intervalle. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies et continues sur  $I$ . Si la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $f$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**Preuve.**— Soit  $c \in I$ . On veut montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\alpha(\epsilon) > 0$  tel que

$$|x - c| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \epsilon.$$

On fixe donc  $\epsilon > 0$ . Comme la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ , il existe  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$n \geq N_\epsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

On sait aussi que  $f_{N_\epsilon}$  est continue au point  $c$ . Donc il existe  $\alpha_\epsilon > 0$  tel que

$$|x - c| \leq \alpha_\epsilon \Rightarrow |f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(c)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Du coup, si  $|x - c| \leq \alpha_\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_{N_\epsilon}(x)| + |f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(c)| + |f_{N_\epsilon}(c) - f(c)| \\ &\leq |f_{N_\epsilon} - f|_\infty + |f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(c)| + |f_{N_\epsilon} - f|_\infty \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

On peut donc prendre  $\alpha(\epsilon) = \alpha_\epsilon$ . Ce raisonnement marche pour tout  $\epsilon > 0$  : on a donc prouvé la continuité de  $f$  au point  $c$ .  $\square$

On notera bien l'importance de la convergence uniforme dans cette preuve. Le point essentiel est que  $|f(x) - f_{N_\epsilon}(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$  pour tout  $x \in I$ .

Il faut remarquer aussi que la proposition ci-dessus donne une condition suffisante de continuité pour la limite de la suite  $(f_n)$ . Par exemple la suite  $(f_n)$  définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{1 + n^2 x^2}$$

converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle, qui est évidemment continue, bien que la suite  $(f_n)$  ne converge pas uniformément :  $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{\sin 1}{2} \not\rightarrow 0$ .

On utilise en général cette proposition pour montrer la continuité d'une fonction, en l'approchant par une suite de fonctions continues qui converge uniformément. On peut aussi s'en servir pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément :

**Exemple 2.1.2** Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 + x^n}$$

- i) Montrer que  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$ .
- ii) Y a-t-il convergence uniforme sur  $\mathbb{R}^+$  ?

Pour finir, on notera que la proposition ci-dessus dit que, lorsque ses hypothèses sont satisfaites,

$$\lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x).$$

## 2.2 Intégrabilité

La limite  $f$  d'une suite  $(f_n)$  de fonctions intégrables sur  $[a, b]$  est-elle intégrable ? Dans ce cas, est-ce que l'on peut utiliser la suite  $(f_n)$  pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale de  $f$  ?

Modifions un peu notre bosse glissante. Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions affines par morceaux définie sur  $[0, 1]$  par la Figure 2.1. La suite  $(f_n)$  converge vers 0, mais l'intégrale de  $f_n$  sur

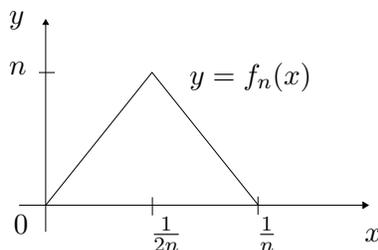


FIGURE 2.1 – Une bosse glissante de surface constante

$[0, 1]$  vaut  $1/2$  pour tout  $n$ . Pour cette suite de fonctions, on n'a donc pas le résultat espéré. Voilà cependant un cas (dont on pouvait se douter...) où la réponse à la question posée est positive.

**Proposition 2.2.1** Soit  $I = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions intégrables sur  $[a, b]$ . Si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et

$$(2.2.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Preuve.**— On laisse de côté la question de l'intégrabilité de la limite. Autre manière de dire, on prouve la proposition seulement dans le cas où les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $[a, b]$ , donc intégrables sur  $[a, b]$ . Puisque  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ , on sait que  $f$  est aussi continue sur  $[a, b]$ , donc intégrable sur  $[a, b]$ .

On a alors

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ . □

On a compris que la convergence simple ne suffit pas à assurer le résultat, alors que la convergence uniforme, elle, suffit. Encore une fois, on peut néanmoins avoir la relation (2.2.1) pour des suites  $(f_n)$  qui ne convergent pas uniformément. C'est le cas par exemple de la suite  $(x^n)$  sur  $[0, 1]$  :

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Là encore, on peut utiliser ce critère pour montrer qu'une suite ne converge pas uniformément :

**Exercice 2.2.2** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x.$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  à déterminer.

2. Calculer  $\int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$  et  $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$ . La suite  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $\mathbb{R}$  ?

## 2.3 Dérivabilité

Voici le résultat le plus difficile à appliquer. Sa démonstration est également délicate, et peut certainement être laissée pour une seconde lecture.

Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Chacune des fonctions  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . En effet  $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $]0, +\infty[$ , et la fonction  $y \mapsto \sqrt{y}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ . La suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f : x \mapsto |x|$ . On a même convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  puisque, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n} + |x|}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Passons aux dérivées. La fonction  $f$  n'est pas dérivable (en 0), et en effet, la suite  $(f'_n)$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$  puisque la suite  $(f'_n)$  est donnée par

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}},$$

et sa limite simple est 1 pour  $x > 0$ ,  $-1$  pour  $x < 0$  et 0 pour  $x = 0$ . Elle est donc discontinue, ce qui interdit la convergence uniforme. On retiendra que la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  n'est pas une condition suffisante pour la dérivabilité de la limite. C'est la convergence uniforme de la suite des dérivées  $(f'_n)$  qui marche :

**Proposition 2.3.1** Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur  $I$ . Si

- i) les fonctions  $f_n$  sont dérivables sur  $I$ ,
  - ii) la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ ,
  - iii) et la suite  $(f'_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $\phi$ ,
- alors  $f$  est dérivable sur  $I$ , et  $f' = \phi$ .

Encore une fois, ce résultat peut être vu comme un théorème d'interversion de limite. Sous les conditions de la proposition, on a

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} f_n(x),$$

et il faut se souvenir que  $\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  par exemple.

**Preuve.**— (sous l'hypothèse additionnelle  $f_n \in C^1$ )

Soit  $x_0, x \in I$  deux points arbitraires. En utilisant  $f_n \in C^1$  et le théorème fondamentale du calcul, on peut écrire

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

L'hypothèse de convergence uniforme  $f'_n \rightarrow \phi$ , avec la propriété des convergence des intégrales montrée juste avant, permet de dire

$$\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_{x_0}^x \phi(t) dt.$$

Si on rajoute la convergence simple de  $f_n$  vers  $f$ , on trouve

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \phi(t) dt.$$

Cela prouve que  $f$  est la primitive de  $\phi$ . Comme  $\phi$  est continue (parce que limite uniforme des fonctions  $f'_n$ , qui sont continues),  $f$  est  $C^1$  et  $f' = \phi$ .  $\square$

**Preuve.**— Soit  $c \in I$ . On veut montrer que  $f$  est dérivable au point  $c$ , de dérivée  $\phi(c)$ . Autrement dit, on veut montrer que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \phi(c).$$

Soit alors  $g_n$  la fonction définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} & \text{pour } x \neq c, \\ f'_n(c) & \text{pour } x = c. \end{cases}$$

La fonction  $g_n$  est continue sur  $I$  et la suite  $(g_n)$  converge simplement sur  $I$  vers la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} & \text{pour } x \neq c, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(c) = \phi(c) & \text{pour } x = c. \end{cases}$$

Il s'agit donc de montrer que la fonction  $g$  est continue au point  $c$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $(g_n)$  converge uniformément vers  $g$  sur  $I$ . On va utiliser le critère de Cauchy uniforme :

**Lemme 2.3.2** Pour qu'une suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$ , il faut et il suffit que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N_\epsilon \Rightarrow |f_p - f_q|_\infty \leq \epsilon.$$

On admet ce lemme, et on l'applique pour terminer la preuve de la proposition. Soit  $\epsilon > 0$ . Puisque la suite  $(f'_n)$  converge uniformément sur  $I$ , il existe  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$p, q \geq N_\epsilon \Rightarrow |f'_p - f'_q|_\infty \leq \epsilon$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction  $f_p - f_q$ , on a, pour  $p, q \geq N_\epsilon$ ,

$$\forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x) - (f_p(c) - f_q(c))| \leq |f'_p - f'_q|_\infty |x - c| \leq \epsilon |x - c|$$

En divisant les deux membres de l'inégalité par  $|x - c|$ , et après réorganisation du membre de gauche, on obtient

$$\forall x \in I \setminus \{c\}, |g_p(x) - g_q(x)| \leq \epsilon.$$

Comme les fonctions  $g_n$  sont continues, cette inégalité reste vraie pour  $x = c$ . Autrement dit

$$p, q \geq N_\epsilon \Rightarrow |g_p - g_q|_\infty \leq \epsilon.$$

Donc la suite  $(g_n)$  vérifie le critère de Cauchy uniforme, et converge uniformément.  $\square$

# Chapitre 3

## Séries de Fonctions

### 3.1 Quelques rappels sur les séries numériques

Les séries numériques doivent être vues comme des suites numériques particulières : si  $(u_n)$  est une suite numérique, la série de terme général  $u_n$  est la suite  $(S_n)$  définie par

$$S_n = \sum_{p=0}^n u_p.$$

On dit que la série converge lorsque la suite  $(S_n)$  converge. Dans ce cas, la limite est appelée somme de la série, et on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n u_p.$$

On écrit aussi - de manière un peu abusive, mais c'est parfois pratique - que la quantité  $\sum u_n$  est la série de terme général  $u_n$ , et que le nombre  $S_n$  est la  $n$ -ième somme partielle de la série.

Puisqu'il s'agit de suites particulières, les techniques vues pour étudier la convergence des suites s'appliquent à l'étude de la convergence des séries. Il existe bien sûr des techniques spécifiques, et l'on peut résumer l'étude d'une série numérique par l'algorithme de la Figure 3.1.

On peut aussi être amené à utiliser le critère de Cauchy pour la suite  $(S_n)$ . Du fait de la nature particulière de cette suite, il prend la forme suivante : la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } q \geq p \geq N_\epsilon \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^q u_n \right| \leq \epsilon.$$

### 3.2 Notion de série de fonction

Les séries de fonctions sont aussi un outil interne aux mathématiques. Comme pour les séries numériques, on doit garder à l'esprit qu'il s'agit d'un type particulier de suite de fonctions.

- 0.** si  $u_n \not\rightarrow 0$ , la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge.
- 1.** essayer de rechercher une formule explicite pour les sommes partielles  $S_n$ , et d'étudier la suite  $(S_n)$ .
- 2.** si  $u_n \geq 0$  pour tout  $n$ , essayer d'utiliser l'un des critères suivant :
- comparaison avec une autre série.
  - D'Alembert.
  - Cauchy.
  - Riemann.
  - ...
- 2 bis.** si  $u_n \leq 0$  pour tout  $n$ , étudier la série de terme général  $-u_n$ .
- 3.** si  $u_n$  n'est pas de signe constant, essayer
- d'étudier la série  $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ . Si elle converge,  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.
  - d'utiliser le "critère spécial" pour les séries alternées,
  - ...

FIGURE 3.1 – Etude d'une série numérique

Reprenons par exemple notre équation différentielle préférée, ou plutôt le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f' = f, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Avec la méthode d'Euler, il est probablement assez pénible de trouver l'expression explicite de  $f_n(x)$  pour un  $x$  donné, autrement dit de donner une valeur approchée de  $f(x)$ . Voici une autre façon de faire (c'est la méthode de Picard). Une fonction  $f \in \mathcal{C}^1$  est solution du problème de Cauchy ci-dessus si et seulement si

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0) = 1 + \int_0^x f(t)dt.$$

On n'a rien gagné semble-t-il : la fonction inconnue  $f$  se trouve des deux côtés de l'égalité. L'idée supplémentaire est de définir une suite de fonctions  $(S_n)$  par récurrence, en posant  $S_0 : x \mapsto 1$  et

$$S_{n+1} : x \mapsto 1 + \int_0^x S_{n-1}(t)dt.$$

Si la suite  $(S_n)$  converge uniformément vers une fonction  $S$ , on doit avoir, pour chaque  $x$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \int_0^x S_{n-1}(t)dt\right) = 1 + \int_0^x \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1}(t)dt = 1 + \int_0^x S(t)dt.$$

Autrement dit si la suite  $(S_n)$  converge, la limite de la suite  $(S_n)$  est la solution du problème :  $S(x) = e^x$ .

On peut calculer les fonctions  $S_n$  de proche en proche :

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x, \\ S_2(x) &= 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \\ &\vdots \\ S_n(x) &= \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!}. \end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction  $x \mapsto e^x$  apparaît comme la somme de la série de fonctions de terme général  $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ .

**Définition 3.2.1** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . La série de fonctions de terme général  $f_n$  est la suite de fonction  $(S_n)$ , où les  $S_n$  sont définies sur  $I$  par

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^n f_p(x).$$

On dit aussi que la fonction  $S_n$  est la  $n$ -ième somme partielle de la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$ .

### 3.3 Notions de convergence

Les deux notions de convergence vues pour les suites de fonctions sont bien sûr valables pour les séries de fonctions.

**Définition 3.3.1** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur l'intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . On dit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement/uniformément sur  $I$  lorsque la suite  $(S_n)$  des sommes partielles converge simplement/uniformément.

Le cas échéant, la fonction limite  $S$  de la suite  $(S_n)$  est appelée somme de la série, et on note, pour  $x \in I$ ,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

On étudie par exemple la convergence de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

- On commence par la convergence simple. Soit  $x \in I$ . On doit étudier la série numérique de terme général  $u_n = \frac{x^n}{n!}$ , et on suit l'algorithme de la Figure 3.1. On peut par exemple appliquer le critère de D'Alembert pour la série de terme général  $|u_n|$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Puisque cette limite est strictement inférieure à 1, la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge. Donc la

série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

- Passons à la convergence uniforme. Il s'agit d'étudier la suite de nombres

$$|S - S_n|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{p \geq n+1} \frac{x^p}{p!} \right|,$$

ce qui ne semble pas très facile! On dispose heureusement d'un critère souvent commode.

### 3.4 Convergence normale

**Définition 3.4.1** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur l'intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . On dit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$  lorsqu'il existe une suite  $(a_n)$  de nombres réels positifs tels que

- i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n|_\infty \leq a_n$ ,
- ii) la série numérique  $\sum_{n \geq 0} a_n$  converge.

De manière équivalente, on peut dire que la série converge normalement si la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$  converge (parce que les meilleurs  $a_n$  qu'on peut prendre sont donnés exactement par  $a_n = \|f_n\|_\infty$ ).

**Proposition 3.4.2** Si la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur  $I$ , alors elle converge uniformément sur  $I$ .

**Preuve.**— On va montrer que la suite de fonctions  $(S_n)$  des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme (cf. le Lemme 2.3.2). Soit  $(a_n)$  une suite de réels qui possède les

propriétés (i) et (ii) de la Définition 3.4.1. Soit  $\epsilon > 0$ . Puisque la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  converge, c'est une série de Cauchy : il existe  $N_\epsilon > 0$  tel que

$$q \geq p \geq N_\epsilon \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=p+1}^q a_n = \left| \sum_{n=0}^q a_n - \sum_{n=0}^p a_n \right| \leq \epsilon.$$

Or pour tout  $x \in I$ ,

$$|S_q(x) - S_p(x)| \leq \sum_{n=p+1}^q |f_n(x)| \leq \sum_{n=p+1}^q a_n,$$

Donc

$$q \geq p \geq N_\epsilon \Rightarrow |S_q - S_p|_\infty \leq \epsilon.$$

□

**Exercice 3.4.3** Montrer que la série de fonctions de terme général  $f_n(x) = x^n e^{-nx}$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}^+$ . On pourra montrer que  $f_n(x) \leq e^{-n}$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Revenons à l'exemple de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ . Il est clair qu'on ne peut pas trouver de suite  $(a_n)$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq a_n,$$

puisque  $\frac{x^n}{n!} \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Donc la série ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}$ . Cependant pour  $x \in [-A, A]$ , avec  $A > 0$  fixé, on a

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{A^n}{n!}.$$

Or  $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$  converge, comme on l'a vu en prouvant la convergence simple de la série. Donc

la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  converge normalement sur  $[-A, A]$ , et ce pour tout  $A > 0$ . Ainsi cette série de fonctions converge uniformément sur tout compact (intervalle fermé et borné) de  $\mathbb{R}$ . En résumé :

Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ . La série de fonctions de terme général  $f_n$

- converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .
- ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}$ .
- converge uniformément (et normalement) sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .

Il reste une question : la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  converge-t-elle uniformément sur  $\mathbb{R}$ ? La réponse est négative : si c'était le cas, la suite des restes  $R_n(x) = \sum_{p \geq n+1} f_p(x)$  convergerait uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle. Mais alors, puisque

$$|f_{n+1}|_\infty = |R_n - R_{n-1}|_\infty \leq |R_n|_\infty + |R_{n-1}|_\infty,$$

chacune des fonctions  $f_n$  serait bornée sur  $\mathbb{R}$ . Ce n'est évidemment pas le cas.

Il est également possible d'interpréter cela par le critère de Cauchy. Si une série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément, alors on sait que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N$  tel que  $n, m \geq N \Rightarrow \|\sum_{p=n+1}^m f_p\|_\infty < \varepsilon$ . En prenant  $m = n + 1$  on obtient "pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N$  tel que  $n \geq N \Rightarrow \|f_{n+1}\|_\infty < \varepsilon$ ", ce qui est la définition de  $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$  ou, autrement dit, du fait que le terme général de la série converge uniformément vers la fonction nulle.

Une condition nécessaire pour que la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge uniformément est que la suite des fonctions  $f_n$  converge uniformément vers la fonction nulle.

### 3.5 Propriétés de la somme

Il s'agit juste de transposer les énoncés vus pour les suites de fonctions au cas particulier des séries de fonctions.

**Proposition 3.5.1** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle  $I$ . Si la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors la fonction somme  $S$  est continue sur  $I$ .

**Preuve.**— Cela découle directement de l'application de la Proposition 2.1.1 à la suite de fonctions  $(S_n)$  des sommes partielles, puisque la continuité des  $f_n$  entraîne celle des sommes (finies !)  $S_n = \sum_{p=0}^n f_p$ . □

Quand on applique cette proposition, il faut garder à l'esprit que la continuité est une notion locale : on parle de continuité sur l'intervalle  $I$  pour dire que la fonction est continue en chaque point de  $I$ . Autrement dit, si la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur chaque compact de  $I$ , la fonction somme sera continue en chaque  $x_0 \in I$ . En effet, on peut appliquer la proposition sur  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  pourvu que  $\alpha > 0$  soit suffisamment petit pour que ce compact soit inclus dans  $I$ . Autrement dit

Pour que la fonction somme d'une série de fonctions soit continue sur un intervalle  $I$ , il suffit que la série converge uniformément sur tout compact de  $I$ .

En particulier, on peut affirmer que la fonction  $x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , bien que l'on ne sache pas si elle converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 3.5.2** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle  $I = [a, b]$ . Si la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  vers sa somme  $S$ , alors

- la série numérique de terme général  $\int_a^b f_n(x) dx$  converge,

— la fonction  $S$  est intégrable sur  $I$ , et

$$\int_a^b \sum_{n \geq 0} f_n(x) dx = \sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n(x) dx.$$

**Preuve.**— Il suffit là encore de remarquer que les sommes partielles  $S_n = \sum_{p=0}^n f_p$  sont intégrables sur  $[a, b]$  lorsque les  $f_n$  le sont, et d'appliquer la Proposition 2.2.1.  $\square$

**Proposition 3.5.3** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions dérivables sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . Si

i) la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$  vers sa somme  $S$ ,

ii) la série des dérivées  $\sum_{n \geq 0} f'_n$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $\varphi$ ,

alors la fonction  $S$  est dérivable sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$ ,  $S'(x) = \varphi(x)$ .

Autrement dit, lorsque les conditions de la propositions sont satisfaites, on a

$$\frac{d}{dx} \sum_{n \geq 0} f_n(x) = S'(x) = \varphi(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

La dérivabilité aussi est une notion locale. On pourra se convaincre facilement que

Si la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$  vers sa somme  $S$ , il suffit que la série des dérivées converge uniformément sur tout compact de  $I$  pour que  $S$  soit dérivable et que  $S'(x) = \sum_{n \geq 0} f'_n(x)$  pour tout  $x \in I$ .

**Exercice 3.5.4** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  la suite de fonctions définies sur  $I = ]-1, 1[$  par  $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ .

— La série de terme général  $f_n$  converge simplement sur  $I$ . En effet, pour  $x \in ]-1, 1[$  fixé, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = |x| \frac{n}{n+1} \rightarrow |x| < 1.$$

— Pour tout  $A < 1$ , la série de terme général  $f'_n(x) = x^n$  converge normalement sur  $[-A, A]$ . En effet, pour  $x \in [-A, A]$ ,  $|f'_n(x)| \leq A^n$  et la série  $\sum_{n \geq 0} A^n$  converge vers  $\frac{1}{1-A}$ . Donc la fonction somme  $S$  vérifie

$$S'(x) = \sum_{n \geq 0} f'_n(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On obtient en particulier, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^1 S'(x) dx = -\ln(1-x).$$

### 3.6 A propos des séries entières

Le lecteur averti aura remarqué que la plupart des exemples de séries de fonctions qu'on a étudiés jusque là sont d'un type particulier.

**Définition 3.6.1** On dit que la série de fonction de terme général  $f_n$  est une série entière lorsque pour tout  $n \geq 0$ ,  $f_n(x) = a_n x^n$ , où  $a_n \in \mathbb{C}$ .

La convergence de ce genre de séries de fonctions est pour l'essentiel élucidé par la

**Proposition 3.6.2** Il existe  $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , unique, tel que  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  converge simplement sur  $] -R, R[$  et diverge sur  $[-R, R]^c$ . De plus, lorsque  $R > 0$ , la série converge normalement sur tout compact  $[-A, A] \subset ] -R, R[$  (c'est-à-dire lorsque  $A < R$ ). Lorsque la suite  $|a_n|^{1/n}$  admet une limite  $\ell$  pour  $n \rightarrow \infty$ , la valeur de  $R$  est donnée par  $1/\ell$  (avec la convention  $1/0 = +\infty$  et  $1/\infty = 0$ ).

Ce "nombre"  $R$  porte le nom de rayon de convergence de la série entière. On va voir une démonstration partielle de la proposition ci-dessus.

**Preuve.**— Supposons qu'il existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \ell$  et prenons  $R = 1/\ell$ . Pour  $x$  tel quel  $|x| > R$  on veut prouver que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  diverge. On utilise  $\ell|x| > 1$ , ce qui implique qu'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que  $(\ell - \epsilon)|x| > 1$ . Or, si la série convergeait, on devrait avoir  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n||x|^n = 0$ , mais, pour  $n$  à partir d'un certain rang,  $|a_n||x|^n \geq [(\ell - \epsilon)|x]|^n \rightarrow +\infty$ , ce qui donne une contradiction.

Pour prouver la convergence simple pour  $|x| < R$ , il suffit de prouver la convergence normale sur  $[-A, A] \subset ] -R, R[$  (en effet, il suffira de prendre  $A = |x|$  pour obtenir la convergence simple au point  $x$ ). Estimons la norme  $\|f_n\|_\infty$  sur  $[-A, A]$ , où  $f_n(x) = a_n x^n$ . Il faut calculer  $\sup\{|a_n||x|^n : x \in [-A, A]\} = |a_n|A^n$ . En utilisant  $|a_n|^{1/n} \leq (\ell + \epsilon)$  et  $(\ell + \epsilon)A < 1$  (qui vient de  $A < R$ ) on peut comparer la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n|A^n$  à la série  $\sum_{n \geq 0} [(\ell + \epsilon)A]^n$ , qui est géométrique et convergente. Donc, la série des fonctions  $f_n$  converge normalement.  $\square$

La formule pour calculer le rayon de convergence peut être étendue au cas où  $|a_n|^{1/n}$  n'a pas de limite, mais cela demande à utiliser la notion de  $\limsup$ .

**Définition 3.6.3** Étant donnée une suite  $b_n$  de nombres réels on dit que  $\ell_+$  est la  $\limsup$  de  $b_n$ , et on écrit  $\ell_+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$  si pour tout  $\ell' > \ell_+$  on a  $b_n \leq \ell'$  à partir d'un certain rang ( $\forall \ell' > \ell \exists N$  tel que  $\forall n \geq N$  on a  $b_n \leq \ell'$ ) et en plus il existe une sous-suite  $b_{n_k}$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = \ell_+$ .

De manière équivalente on peut définir

$$\ell_+ := \inf\{\ell' : \exists N \text{ tel que } \forall n \geq N \text{ on a } b_n \leq \ell'\}$$

ou encore

$$\ell_+ := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, \quad \text{où } c_n := \sup\{b_k : k \geq n\}.$$

On remarque en passant que si  $b_n \rightarrow \ell$  alors  $\ell$  est aussi la limsup de  $b_n$ .

Le résultat concernant le rayon de convergence peut donc être prouvé dans le cas plus général où la limite de  $|a_n|^{1/n}$  pourrait ne pas exister. Considérons

$$R = \frac{1}{\ell_+}, \quad \text{où } \ell_+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

**Preuve.**— (à éviter dans une première lecture)

Reprenons la preuve de tout à l'heure. Pour  $|x| > R$  on a encore  $\ell_+ |x| > 1$  et  $(\ell_+ - \epsilon)|x| > 1$ . En utilisant la définition de limsup, il existe une sous-suite  $|a_{n_k}|^{1/n_k}$  telle que  $|a_{n_k}|^{1/n_k} \rightarrow \ell_+$ , et donc  $|a_{n_k}|^{1/n_k} > \ell_+ - \epsilon$  à partir d'un certain rang. Par conséquence,  $|a_{n_k}| |x|^{n_k} \rightarrow \infty$ , ce qui interdit la convergence de la série.

Pour prouver la convergence normale sur  $[-A, A]$  avec  $A < R$ , la méthode est la même que dans le cas où  $\ell_+$  est une limite. En effet, on a juste besoin d'utiliser  $(\ell_+ + \epsilon)A < 1$  et  $|b_n|^{1/n} \leq \ell_+ + \epsilon$  à partir d'un certain rang.  $\square$

Le résultat suivant est très important.

**Proposition 3.6.4** Le rayon de convergence d'une série entière est égal au rayon de convergence de sa série des dérivées.

En particulier, par récurrence, en appliquant le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, on obtient que la fonction somme d'une série entière est  $C^\infty$  sur  $] -R, R[$ , et que sa dérivée d'ordre  $k$  est la somme des dérivées d'ordre  $k$  de son terme général.

### 3.7 Un exemple

**Exercice 3.7.1** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{n^x}.$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers une fonction  $f$  à déterminer.
2. Calculer  $f'_n(x)$ . Montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
3. Soit  $x > 0$  fixé. Déterminer la limite de  $n^2 f_n(x)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . En déduire que la série de terme général  $f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$ .

4. Donner  $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)|$ . Montrer que la série de terme général  $f_n$  ne peut pas être normalement convergente sur  $\mathbb{R}^+$ .

5. Montrer que la fonction  $S(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

6. Quid de la continuité en  $x = 0$  ?

### Corrigé

1. On note tout d'abord que  $f_n(x) = xe^{-x(n+\ln n)}$ . On a  $f_n(0) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ , et pour  $x > 0$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Donc  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction 0 sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. On calcule  $f'_n(x) = e^{-x(n+\ln n)}(1 - (n + \ln n)x)$ . La fonction  $f_n$  est donc croissante sur  $[0, 1/(n + \ln n)]$  et décroissante sur  $[1/(n + \ln n), +\infty[$ . La fonction  $f_n$  admet un maximum en  $x_n = 1/(n + \ln n)$ , et la valeur de ce maximum est  $d_n = f_n(x_n) = \frac{1}{e(n + \ln n)}$ . Puisque  $d_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$  vers la fonction nulle.

3. Soit  $x > 0$  fixé. On a  $n^2 f_n(x) = n^2 x e^{-x(n+\ln n)} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  par croissance comparée. Donc la suite  $(n^2 f_n(x))$  est bornée : il existe  $C > 0$  tel que

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{C}{n^2}.$$

Puisque la série numérique de terme général  $\frac{1}{n^2}$  converge, la série de terme général  $f_n(x)$  converge aussi. Pour  $x = 0$  on a  $f_n(x) = 0$ . Au total, la série de terme général  $f_n(x)$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .

4. On a calculé à la question 2  $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = d_n = \frac{1}{e(n + \ln n)}$ . Supposons que la suite  $(a_n)$  vérifie  $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| \leq a_n$ . On aurait nécessairement

$$a_n \geq d_n \geq \frac{1}{2en},$$

donc la série de terme général  $a_n$  serait divergente. La série de terme général  $f_n$  ne peut pas être normalement convergente.

5. On va montrer que la série de terme général  $f_n$  est normalement convergente sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  pour  $a > 0$ , ce qui donnera le résultat. Soit donc  $a > 0$ . Puisque  $x_n = 1/(n + \ln n)$  tend vers 0, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on a  $x_n < a$ . La fonction  $f_n$  étant alors décroissante sur  $[a, +\infty[$ , on a

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a) = ae^{-a(n+\ln n)} \leq ae^{-an}.$$

Or la série de terme général  $ae^{-an}$  est convergente, ce qui prouve la convergence normale de la série de terme général  $f_n$  sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

6. En  $x = 0$ , notre série vaut 0. Or, pour  $x = 1/N$ , on peut dire  $S(x) := \sum_{n \geq 0} f_n(x) \geq \sum_{n=1}^N f_n(x)$ . Pour  $n \leq N$  et  $x = 1/N$  on a  $e^{-nx} \geq e^{-1}$  et  $n^x \leq N^{1/N}$ . Du coup,  $S(1/N) \geq N \times 1/N \times e^{-1}/N^{1/N}$ . Puisque  $N^{1/N} \rightarrow 0$ , on ne peut pas avoir  $S(1/N) \rightarrow 0$ . La fonction somme  $S$  n'est donc pas continue.

# Chapitre 4

## Fonctions définies par des intégrales à paramètre

### 4.1 Intégrales simples

On s'intéresse ici aux fonctions  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par une expression du type

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt,$$

où  $[a, b]$  est un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . Notre objectif est d'établir des conditions suffisantes sur la fonction deux variables  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  pour que la fonction  $F$  soit bien définie, continue, dérivable ou même encore plus régulière. D'un point de vue formel, on peut penser qu'on a remplacé la somme sur les entiers  $n$  des séries de fonctions  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  par une "somme" sur tous les  $t \in [a, b]$ .

#### 4.1.1 Notion de continuité uniforme

Dans les démonstrations qui vont suivre, le premier rôle est joué par la notion de continuité uniforme. On rappelle d'abord qu'une fonction  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  lorsqu'elle est continue en chaque point  $x$  de  $I$  c'est-à-dire,

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon, x) > 0 \text{ tel que } |y - x| \leq \alpha(\epsilon, x) \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| \leq \epsilon.$$

Comme le laisse entrevoir la notation utilisée, le nombre  $\alpha = \alpha(\epsilon, x)$  dépend de  $\epsilon$  et de  $x$ . Lorsqu'on peut choisir un  $\alpha = \alpha(\epsilon)$  qui convient pour tous les  $x$  de  $I$ , on dit que la fonction  $\phi$  est uniformément continue sur  $I$ .

**Définition 4.1.1** Soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle. On dit que  $\phi$  est uniformément continue sur  $I$  lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in I, |y - x| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| \leq \epsilon.$$

Bien sûr, si une fonction est uniformément continue sur  $I$ , elle est continue sur  $I$ . La réciproque est fautive : voici un exemple de fonction continue qui n'est pas uniformément continue : soit  $f : x \mapsto x^2$ . Supposons que  $f$  soit uniformément continue sur  $\mathbb{R}^+$ . Pour  $\epsilon = 1$  en particulier, il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, |x - y| \leq \alpha \implies |x^2 - y^2| \leq 1.$$

Soit alors  $y \in \mathbb{R}^+$  quelconque et  $x = y + \alpha$ . On a bien  $|x - y| \leq \alpha$ , mais

$$|x^2 - y^2| = (x + y)|x - y| = \alpha(2y + \alpha),$$

et il est absurde de dire que  $\alpha(2y + \alpha) \leq 1$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^+$ .

Ces définitions s'étendent au cas des fonctions de plusieurs variables. Par exemple si  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction des variables  $(t, x) \in I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est

— continue sur  $I \times J$  lorsque

$$\forall (t, x) \in I \times J, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon, t, x) > 0 \text{ tel que} \\ |(s, y) - (t, x)| \leq \alpha(\epsilon, t, x) \implies |f(s, y) - f(t, x)| \leq \epsilon.$$

— uniformément continue sur  $I \times J$  lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon) > 0 \text{ tel que} \\ \forall (t, x) \in I \times J, |(s, y) - (t, x)| \leq \alpha(\epsilon) \implies |f(s, y) - f(t, x)| \leq \epsilon.$$

Dans l'exemple de la fonction  $f : x \rightarrow x^2$ , il est essentiel que l'on se soit posé la question de la continuité uniforme sur une partie non-bornée de  $\mathbb{R}$ . On a en effet le résultat suivant

**Proposition 4.1.2** Soit  $I \times J \subset \mathbb{R}^2$ , et  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  est uniformément continue sur tout fermé borné  $[a, b] \times [c, d] \subset I \times J$ .

**Preuve.**— On suppose par l'absurde que cela ne soit pas vrai. On a alors l'existence d'un  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $\alpha > 0$  il y a deux paires  $(t, x), (s, y)$  avec  $|(t, x) - (s, y)| < \alpha$  et  $|f(t, x) - f(s, y)| \geq \epsilon$ . En prenant  $\alpha = 1/n$ , on a donc quatre suites  $t_n, x_n, s_n, y_n$ . Ces suites sont toutes bornées, on peut donc extraire des sous-suites convergentes. Il faut les extraire dans l'ordre : d'abord une sous-suite  $t_{n_k} \rightarrow t_0$ , puis une sous-suite  $x_{n_{k_p}} \rightarrow x_0$  (extraite à partir des indices précédemment sélectionnés pour la sous-suite  $t_{n_k}$ ). . . de cette manière on obtient quatre sous-sous-sous-sous-suites (qu'on appellera simplement  $t_{n_k}, x_{n_k}, s_{n_k}, y_{n_k}$  par simplicité) telles que  $t_{n_k} \rightarrow t_0, x_{n_k} \rightarrow x_0, s_{n_k} \rightarrow s_0, y_{n_k} \rightarrow y_0$  et

$$|(t_{n_k}, x_{n_k}) - (s_{n_k}, y_{n_k})| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(t_{n_k}, x_{n_k}) - f(s_{n_k}, y_{n_k})| \geq \epsilon.$$

En passant à la limite dans la première inégalité on trouve  $(t_0, x_0) = (s_0, y_0)$  et dans la deuxième  $|f(t_0, x_0) - f(s_0, y_0)| \geq \epsilon$ , ce qui est absurde.  $\square$

### 4.1.2 Continuité

Grâce à cette continuité uniforme automatique, on a facilement la

**Proposition 4.1.3** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, et  $f : (x, t) \in I \times [a, b] \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors la fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt,$$

est continue sur  $I$ .

**Preuve.**— Tout d’abord la fonction  $F$  est bien définie sur  $I$  puisque, pour chaque  $x \in I$  fixé, la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue, donc intégrable sur  $[a, b]$ . Soit alors  $x_0 \in I$ . On veut montrer que  $F$  est continue en  $x_0$ .

- On suppose tout d’abord que  $I = [c, d]$  est fermé et borné. Soit  $\epsilon > 0$ . Puisque  $f$  est continue sur  $I \times [a, b]$ , elle y est uniformément continue, donc il existe  $\alpha(\epsilon) > 0$  tel que

$$\forall (x, t) \in I \times [a, b], |x - x_0| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |f(x, t) - f(x_0, t)| \leq \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Ainsi, pour  $x \in I$  tel que  $|x - x_0| \leq \alpha(\epsilon)$ , on a

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)| dt \leq \epsilon,$$

ce qui montre que  $F$  est continue au point  $x_0$ .

- Si  $I$  est fermé mais pas borné, on prend  $[c, d] = I \cap [x_0 - 1, x_0 + 1]$  et ce qui précède montre que  $F$  est continue en  $x_0$ . Si  $I$  est ouvert on prend  $[c, d] = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  pour  $\delta > 0$  suffisamment petit.  $\square$

**Exemple 4.1.4** Soit  $F(x) = \int_0^1 \sin(tx) dt$ . Puisque  $(x, t) \mapsto \sin(tx)$  est continue sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , la fonction  $F$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . D’ailleurs on peut calculer directement

$$F(x) = \left[ -\frac{\cos(tx)}{x} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos x}{x},$$

ce qui permet de retrouver que cette fonction est continue en  $x = 0$ .

### 4.1.3 Dérivation

On donne maintenant une condition suffisante pour que la fonction

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

soit dérivable sur  $I$ . Bien entendu, on espère que, en supposant que la fonction  $f$  soit dérivable par rapport à la variable  $x$ , la dérivée de  $F$  soit donnée par l’intégrale de la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$ , autrement dit que l’on puisse échanger dérivation et intégrale.

**Proposition 4.1.5** Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $[a, b]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si la fonction  $f$  admet une dérivée partielle  $\partial_x f$  continue sur  $I \times [a, b]$ , alors la fonction  $F$  est dérivable sur  $I$  et

$$F'(x) = \int_a^b \partial_x f(x, t) dt.$$

**Preuve.**— Soit  $x_0 \in I$ . On veut montrer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \partial_x f(x, t) dt.$$

Or

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \partial_x f(x_0, t) dt &= \int_a^b f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \partial_x f(x_0, t) dt \\ &= \int_a^b g(x, t) - g(x_0, t) dt, \end{aligned}$$

où  $g(x, t) = f(x, t) - (x - x_0) \partial_x f(x_0, t)$ . On remarque que

$$\partial_x g(x, t) = \partial_x f(x, t) - \partial_x f(x_0, t).$$

Soit  $[c, d] \subset I$  un intervalle compact contenant  $x_0$ . Comme  $\partial_x f$  est continue par rapport à  $(x, t)$ ,  $\partial_x f$  est uniformément continue par rapport à  $(x, t)$  dans  $[c, d] \times [a, b]$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\alpha(\epsilon) > 0$  tel que

$$\forall t \in [a, b], \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |\partial_x g(x, t)| = |\partial_x f(x, t) - \partial_x f(x_0, t)| \leq \epsilon$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a alors

$$\forall t \in [a, b], \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |g(x, t) - g(x_0, t)| \leq \epsilon |x - x_0|.$$

Finalement on obtient

$$|F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \partial_x f(x_0, t) dt| \leq \epsilon(b - a)|x - x_0|,$$

ce qui entraîne la proposition en faisant tendre  $x \rightarrow x_0$ . □

**Exemple 4.1.6** Soit  $G$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$G(x) = \int_0^1 t \cos(tx) dt.$$

La fonction  $g : (x, t) \mapsto t \cos(tx)$  est continue sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , donc  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On peut remarquer que

$$\partial_x (\sin(tx)) = g(t, x),$$

donc, notant  $F(x) = \int_0^1 \sin(tx) dt$ , on a

$$G(x) = \int_0^1 t \cos(tx) dt = F'(x) = \frac{x \sin x + \cos x - 1}{x^2}.$$

## 4.2 Intégrales généralisées

On considère maintenant des fonctions définies par des intégrales généralisées, de la forme

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt,$$

même si les résultats de ce paragraphe s'appliquent en fait mutatis mutandis à toutes les sortes d'intégrales généralisées. Dans ce cas, le théorème précédent, concernant la continuité de  $F$ , ne s'applique plus (l'intervalle d'intégration n'est pas compact). Pour montrer la continuité de  $F$  en  $x_0$ , on est amené à estimer

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^{+\infty} f(x, t) - f(x_0, t) dt$$

On peut penser à découper cette intégrale en deux parties

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^A f(x, t) - f(x_0, t) dt + \int_A^{+\infty} f(x, t) - f(x_0, t) dt,$$

et on saura traiter la première à l'aide de la Proposition 4.1.3, en supposant que  $f$  est continue par rapport à  $(x, t)$ . Pour traiter la seconde, on a besoin d'une notion supplémentaire.

### 4.2.1 Convergence uniforme

**Définition 4.2.1** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert. Soit aussi  $f$  une fonction continue sur  $I \times [0, +\infty[$  telle que, pour chaque  $x \in I$ , l'intégrale  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$  converge. On dit que cette intégrale est uniformément convergente sur  $I$  lorsque,

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon > 0 \text{ tel que } A \geq A_\epsilon \Rightarrow \left| \int_A^{+\infty} f(x, t) dt \right| \leq \epsilon \text{ pour tout } x \in I.$$

En fait cette définition est à rapprocher de ce que l'on a vu pour les séries de fonctions : la série de fonction  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément lorsque la suite de ses restes  $R_p = \sum_{n \geq p} f_n$  converge uniformément vers 0. Le lien entre ces deux notions est encore plus fort :

**Proposition 4.2.2** Soit  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$  une intégrale uniformément convergente sur l'intervalle  $I$ . Si  $(u_n)$  est une suite de  $[0, +\infty[$  qui tend vers  $+\infty$ , alors la suite  $(F_n)$  de fonctions définies sur  $I$  par

$$F_n : x \mapsto \int_0^{u_n} f(x, t) dt$$

converge uniformément sur  $I$  vers  $F$ .

**Preuve.**— Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $A_\epsilon > 0$  tel que

$$A \geq A_\epsilon \Rightarrow \left| \int_A^{+\infty} f(x, t) dt \right| \leq \epsilon \text{ pour tout } x \in I.$$

Puisque  $u_n \rightarrow +\infty$ , il existe  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N_\epsilon \Rightarrow u_n \geq A_\epsilon$ . Du coup, pour  $n \geq N_\epsilon$ , on a

$$\forall x \in I, |F(x) - F_n(x)| \leq \left| \int_{u_n}^{+\infty} f(x, t) dt \right| \leq \epsilon,$$

ce qui montre que  $|F - F_n|_{I, \infty} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . □

### 4.2.2 Continuité, Dérivation

Si les fonctions  $F_n$  définies ci-dessus sont continues sur  $I$ , et si l'intégrale  $F(x)$  est uniformément convergente sur  $I$ , le théorème de continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues montre que  $F$  est continue sur  $I$ . On a donc obtenu la

**Proposition 4.2.3** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert. Soit  $f : I \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

soit uniformément convergente sur  $I$ . Alors la fonction  $F$  est continue sur  $I$ .

**Preuve.**— Il suffit de considérer les fonctions  $F_n(x) := \int_0^n f(x, t) dt$  et de remarquer qu'elles sont continues et qu'elles convergent uniformément vers  $F$ . □

On a aussi un résultat de ce genre pour la dérivation :

**Proposition 4.2.4** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert. Soit  $f : I \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si

- i)  $f$  admet une dérivée partielle  $\partial_x f(x, t)$  continue sur  $I \times [0, +\infty[$ ,
- ii) Pour tout  $x \in I$ , l'intégrale  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$  est convergente,
- iii) L'intégrale

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x, t) dt$$

est uniformément convergente sur  $I$ ,

alors  $F$  est dérivable sur  $I$ , et  $F'(x) = \phi(x)$ , c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^{+\infty} f(x, t) dt \right) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x, t) dt$$

**Preuve.**— Il suffit à nouveau de considérer les fonctions  $F_n(x) := \int_0^n f(x, t)dt$ . Grâce aux hypothèses, elles sont  $C^1$  et leur dérivée est donnée par  $F'_n(x) := \int_0^n \partial_x f(x, t)dt$ . Or, on a bien  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  (convergence simple, grâce à *ii*) et  $F'_n(x) \rightarrow \phi(x) := \int_0^{+\infty} \partial_x f(x, t)dt$  uniformément (hypothèses *iii*). Donc  $F$  est  $C^1$  et  $F' = \phi$ .  $\square$

Il faut faire le parallèle entre ce résultat et la proposition 3.5.3 concernant la dérivabilité d'une série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  : formellement, le point (i) correspond à la dérivabilité des fonctions  $f_n$ , le point (ii) à la convergence simple de la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$ , et le point (iii) à la convergence uniforme de la série des dérivées  $\sum_{n \geq 0} f'_n$ .

### 4.2.3 Convergence normale

Il est la plupart du temps difficile d'établir directement la convergence uniforme d'une intégrale généralisée à paramètre. Comme pour les séries de fonctions, on va introduire une notion de convergence plus facile à vérifier, et qui entraîne la convergence uniforme.

**Définition 4.2.5** Soit  $f : I \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On dit que l'intégrale

$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t)dt$  converge normalement sur  $I$  lorsqu'il existe une fonction  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

- i) L'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} g(t)dt$  converge.
- ii) Pour tout  $(x, t) \in I \times [0, +\infty[$ ,  $|f(x, t)| \leq g(t)$ .

Là encore, le parallèle avec la notion de convergence normale des séries de fonctions est flagrant : la fonction  $g$  joue ici le rôle que jouait la suite  $(a_n)$  dans la définition 3.4.1. On se réfère souvent aux conditions (i) et (ii) en disant que la fonction  $f(x, t)$  est dominée par une fonction intégrable  $g$  indépendante de  $x$ . On pourrait re-exprimer cette condition en demandant

$$\int_0^{+\infty} \|f(\cdot, t)\|_\infty dt < +\infty,$$

c'est-à-dire en prenant la norme du sup de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$ , et en intégrant par rapport à  $t$ . Si on n'écrit pas souvent cette condition de convergence normale comme ça, c'est pour éviter les ambiguïtés dérivant du fait de prendre la norme d'une fonction de deux variables qu'on a d'ailleurs envie d'intégrer par rapport à l'une des deux, mais en la considérant temporairement comme une fonction de l'autre...

En passant par un critère de Cauchy uniforme pour les intégrales généralisées, tout à fait similaire à celui vu pour les séries de fonctions, on peut démontrer que

**Proposition 4.2.6** Soit  $f : I \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si l'intégrale  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t)dt$  converge normalement sur  $I$ , alors elle converge uniformément sur  $I$ .

On obtient alors des critères de continuité et de dérivabilité pour les intégrales généralisées à paramètres qui sont ceux qu'il faut retenir

**Proposition 4.2.7** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert, et  $f : I \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. S'il existe  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

i) L'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} g(t)dt$  converge.

ii) Pour tout  $(x, t) \in I \times [0, +\infty[$ ,  $|f(x, t)| \leq g(t)$ .

alors la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t)dt$$

est continue sur  $I$ .

**Proposition 4.2.8** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert. Soit  $f : I \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si

i)  $f$  admet une dérivée partielle  $\partial_x f(x, t)$  continue sur  $I \times [0, +\infty[$ ,

ii) Pour tout  $x \in I$ , l'intégrale  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t)dt$  est convergente,

iii) Il existe  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

(a) L'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} g(t)dt$  converge.

(b) Pour tout  $(x, t) \in I \times [0, +\infty[$ ,  $|\partial_x f(x, t)| \leq g(t)$ .

alors  $F$  est dérivable sur  $I$  et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x, t)dt$$

### 4.3 Un exemple

Soit  $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, t) = \frac{\cos(tx)}{t^2 + 1}.$$

1. Montrer que la fonction  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t)dt$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x \cos(u)}{u^2 + x^2} du.$$

3. Montrer que  $F$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(indication : poser  $\phi(x, u) = \frac{x \cos(u)}{u^2 + x^2}$ , et majorer  $|\phi(x, u)|$ ,  $|\partial_x \phi(x, u)|$ , et  $|\partial_x^2 \phi(x, u)|$  sur des intervalles  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ )

4. Montrer que, pour tout  $x > 0$ , on a  $F''(x) = F(x)$ .

5. En déduire une expression simple de  $F(x)$ , pour tout réel  $x$ .

### Corrigé

1. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos(tx)}{t^2 + 1} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt < +\infty,$$

donc l'intégrale généralisée  $F(x)$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On voit aussi que  $F$  est une fonction bornée. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ , et pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ , on a la domination

$$|f(x, t)| \leq g(t) := \frac{1}{1 + t^2},$$

avec  $\int_0^{+\infty} g(t) dt < +\infty$ . Donc la fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. On change de variable en posant  $u = tx$ . On remarque au passage que  $F$  est paire, ce qui justifie de restreindre l'étude à  $x > 0$ .

3. Posons  $\phi(x, u) = \frac{x \cos(u)}{u^2 + x^2}$ . Soient  $0 < a < b$  quelconques. Pour tout  $(x, u) \in [a, b] \times ]0, +\infty[$ , on majore

$$|\phi(x, u)| \leq \frac{b}{a^2 + u^2} := g_0(u),$$

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| = \left| \frac{\cos(u)}{u^2 + x^2} - 2 \frac{x^2 \cos(u)}{(u^2 + x^2)^2} \right| = \left| -\frac{\cos(u)(-u^2 + x^2)}{(u^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{b^2 + u^2}{(a^2 + u^2)^2} := g_1(u),$$

et

$$\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right| = \left| -6 \frac{\cos(u)x}{(u^2 + x^2)^2} + 8 \frac{x^3 \cos(u)}{(u^2 + x^2)^3} \right| = \left| 2 \frac{\cos(u)x(-3u^2 + x^2)}{(u^2 + x^2)^3} \right| \leq \frac{2b(b^2 + 3u^2)}{(a^2 + u^2)^3} := g_2(u).$$

Comme  $g_0, g_1$  et  $g_2$  sont intégrables sur  $]0, +\infty[$ , on conclut successivement que  $F$  est continue, dérivable,  $\mathcal{C}^1$ , puis deux fois dérivable et enfin  $\mathcal{C}^2$  sur tout intervalle  $]a, b[ \subset ]0, +\infty[$ , donc sur  $]0, +\infty[$ . Par parité, elle est aussi  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -\infty, 0[$ .

4. On intègre par parties deux fois : pour  $x > 0$ , on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{x \cos(u)}{u^2 + x^2} du = \left[ \frac{x \sin u}{x^2 + u^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2xu}{(x^2 + u^2)^2} \sin(u) du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2xu}{(x^2 + u^2)^2} \sin(u) du \\ &= \left[ -\frac{2xu}{(x^2 + u^2)^2} \cos u \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2x(x^2 - 3u^2)}{(x^2 + u^2)^3} \cos u du \\ &= F''(x). \end{aligned}$$

5. Puisque  $F$  satisfait sur  $]0, +\infty[$  l'équation différentielle  $y'' - y = 0$ , on a  $F(x) = Ae^x + Be^{-x}$  pour tout  $x > 0$ . On sait que  $F(x)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ , donc nécessairement  $A = 0$ . On sait aussi que  $F$  est continue en 0 et paire, et que

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc, finalement,  $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ . Ceci montre, d'ailleurs, que  $F$  n'est pas  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

# Chapitre 5

## Séries de Fourier

### 5.1 Introduction : cordes vibrantes et chaleur

*Attention : la section 5.1 est une introduction qui donne les motivations et les applications des séries de Fourier, mais n'est pas le corps principal de la théorie.*

Même si elles portent le nom de Joseph Fourier, qui a développé leur théorie autour des années 1820 pour l'étude de la propagation de la chaleur, les séries de Fourier doivent beaucoup à l'étude des cordes vibrantes, due à D'Alembert, Euler et Bernoulli au milieu du XVIIIème siècle. On va s'appuyer sur la description de ces deux modèles physiques pour présenter la théorie des séries de Fourier.

#### 5.1.1 Mise en équation - cordes vibrantes

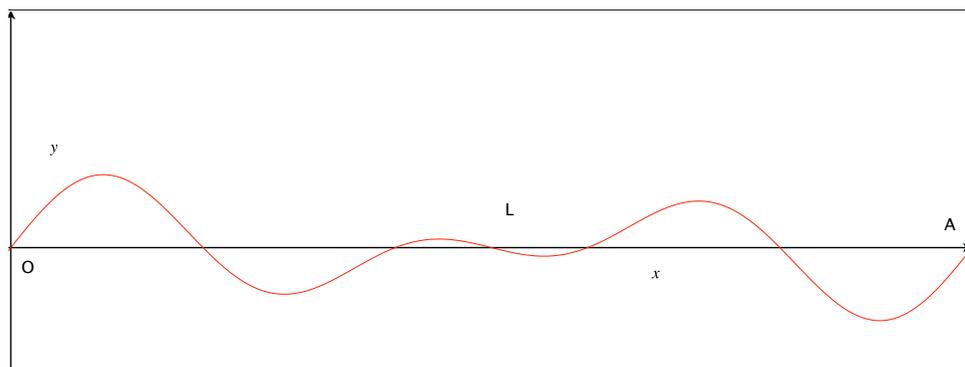
Un son est une variation périodique de la pression de l'air. Cette variation peut être perçue par l'oreille humaine et transformé en signal électrique, compréhensible par le cerveau humain, grâce à l'oreille interne (tympan, cochlée...). Dans un instrument de musique, un son est produit par une force mécanique appelée « attaque » sur un système mécanique vibrant. Ce dispositif vibrant est souvent relié à une « caisse de résonance », qui amplifie le son et le rend audible par l'auditoire. L'attaque d'un son est différente selon les instruments. Par exemple on peut recenser trois familles d'instruments à cordes : les cordes pincées (guitare, harpe, clavecin), les cordes frappées (piano, célesta) et les cordes frottées (violon, violoncelle, alto).

On va se concentrer sur un "instrument" très simple : une corde élastique, tendue entre ses deux extrémités  $O$  et  $A$  que l'on suppose immobiles. Autrement dit, on reprend le dispositif étudié par Pythagore au Vème siècle avant JC !

On note

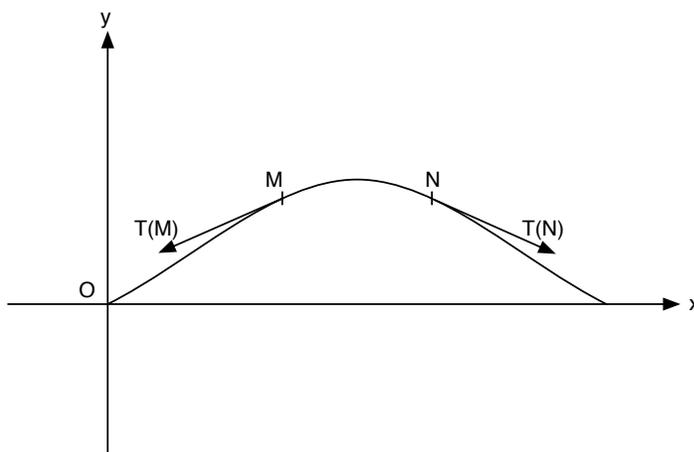
- $L$  la longueur de la corde au repos (en cm),
- $\rho$  la masse par unité de longueur, ou masse linéique (en g/cm),
- $\tau$  la tension de la corde liée au matériau - nylon ou acier par exemple - (en Newton).

On s'intéresse aux petites oscillations de la corde au cours du temps. On se place dans un



repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où  $O$  est l'une des extrémités de la corde et  $(O, \vec{i})$  la direction de la corde au repos. L'axe  $(O, \vec{j})$  est perpendiculaire à  $(O, \vec{i})$  et les mouvements de la corde sont supposés avoir lieu dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On note  $h(t, x)$  la hauteur de la corde à l'instant  $t$  au-dessus du point d'abscisse  $x \in [0, L]$ .

On considère un petit morceau de corde délimité par les points  $M(x, h(t, x))$  et  $N(x + \delta x, h(t, x + \delta x))$ , à un instant  $t$  fixé.



Les forces extérieures qui s'exercent sur le petit morceau de corde sont la tension  $\vec{T}(M)$  exercée par la partie gauche de la corde au point  $M$ , et la tension  $\vec{T}(N)$  exercée par la partie droite de la corde au point  $N$  (on néglige les effets de la pesanteur). Ces forces sont supposées tangentes à la corde au point considéré (les physiciens disent que la corde est élastique). On note  $\theta(x)$  l'angle entre le vecteur  $\vec{i}$  et  $\vec{T}(M)$ . De même,  $\theta(x + \delta x)$  est l'angle entre le  $\vec{i}$  et  $\vec{T}(N)$ .

On projette les 2 forces sur les axes et on obtient

$$\begin{cases} \vec{T}(M) = -|\vec{T}(M)| \cos(\theta(x))\vec{i} - |\vec{T}(M)| \sin(\theta(x))\vec{j} \\ \vec{T}(N) = |\vec{T}(N)| \cos(\theta(x + \delta x))\vec{i} + |\vec{T}(N)| \sin(\theta(x + \delta x))\vec{j} \end{cases}$$

On fait l'hypothèse que les points de la corde ne se déplacent pas horizontalement, ce qui se traduit par le fait que leur norme est une constante : c'est la tension de la corde, que l'on a noté  $\tau$ . Autrement dit

$$\begin{cases} |\vec{T}(M)| = \tau \\ |\vec{T}(N)| = \tau \end{cases}$$

On applique maintenant la loi de Newton, qui dit que la masse du morceau de corde que multiplie la variation de vitesse, est égale à la somme des forces extérieures. En projetant cette relation sur l'axe vertical, on obtient :

$$\rho \delta x \partial_t^2 h(t, x) = -\tau \sin(\theta(x)) + \tau \sin(\theta(x + \delta x))$$

Puisque  $\theta(x)$  est supposé très petit, on remplace  $\sin(\theta(x))$  par  $\theta(x)$ . De plus  $\theta(x)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto h(t, x)$  au point d'abscisse  $x$ , donc

$$\theta(x) = \partial_x h(t, x) \text{ et } \theta(x + \delta x) = \partial_x h(t, x + \delta x),$$

d'où

$$\partial_t^2 h(t, x) = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial_x h(t, x + \delta x) - \partial_x h(t, x)}{\delta x}.$$

En faisant tendre  $\delta x \rightarrow 0$ , on obtient l'équation des cordes vibrantes

$$\partial_t^2 h(t, x) = \frac{\tau}{\rho} \partial_x^2 h(t, x).$$

Il est clair que le mouvement de la corde dépend de la façon dont on la frappe (ou pince, ou frotte...) à l'instant initial  $t = 0$ . Disons que l'on connaît la position initiale de la corde  $u(x)$ , et sa vitesse initiale  $v(x)$ . Avec ces notations, la fonction  $h(t, x)$  doit être entièrement déterminé par les conditions

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h(t, x) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} h(t, x) = 0 \\ h(t, 0) = h(t, L) = 0, \text{ pour tout } t \\ h(0, x) = u(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} h(0, x) = v(x), \end{cases}$$

où l'on a noté  $c = \sqrt{\tau/\rho}$ .

### 5.1.2 Mise en équation - diffusion de la chaleur

Nous avons vu à la fin de la sous-section précédente que le mouvement des cordes vibrantes est régi par une équation différentielle (dite *aux dérivées partielles*, parce qu'elle fait apparaître tant les dérivées par rapport à  $t$  que par rapport à  $x$ ), qui traduit le fait que les dérivées secondes en temps doivent être proportionnelles aux dérivées secondes en espace.

Nous allons étudier brièvement un autre phénomène, celui de la diffusion de la chaleur dans un domaine (une pièce, un système plus complexe...). Par simplicité, on supposera que la variable spatiale  $x$  est unidimensionnelle : on va décrire l'évolution d'une quantité  $u(t, x)$  représentant la température au temps  $t$  au point  $x \in \mathbb{R}$ .

L'idée de base est la suivante : un point  $x$  contourné par des points où la température est plus élevée se rechauffe, et en un point contourné par des points plus froids la température va baisser. Quid des points où la température instantanée est plus chaude d'un côté et plus froide de l'autre ? tout dépend du côté qui l'emporte... cela signifie que ce qui est important est l'écart entre la moyenne de température autour de  $x$  et celle en  $x$ .

Pour faire simple, on va décrire le modèle comme suit. À l'instant  $t$ , la température a un certain profil  $u(t, x)$ . En un point  $x$ , la température va commencer à varier (à la hausse ou à la baisse) avec une dérivée temporelle instantanée (une vitesse de variation) qui lui permettrait d'attendre en un temps  $\tau$  une température cible  $U(t, x)$  qui dépend, comme on le disait tout à l'heure, de l'écart entre la moyenne autour de  $x$  et la valeur de  $u$  en  $x$ . Ceci signifie

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{U(t, x) - u(t, x)}{\tau}.$$

On suppose que la température cible est la moyenne de  $u(t, \cdot)$  sur un intervalle  $[x - R, x + R]$ , c'est-à-dire

$$U(t, x) = \frac{1}{2R} \int_{x-R}^{x+R} u(t, y) dy.$$

Le point  $x$  ne percevant que les points  $y$  "très près" de  $x$ , on va supposer  $R$  très petit et faire un DL à l'ordre 2 en espace : on écrit

$$u(t, y) = u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} u(t, x)(y - x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \frac{(y - x)^2}{2} + o((y - x)^2).$$

En intégrant, et en ignorant le terme de reste, on obtient

$$U(t, x) = u(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \frac{R^2}{6},$$

ce qui nous donne l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \frac{R^2}{6\tau}.$$

En ignorant d'où vient la constante  $R^2/6\tau$ , qu'on appellera  $\sigma$ , on obtient l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)$$

pour une constante  $\sigma > 0$ . Ce qu'il faut retenir est que la dérivée (cette fois-ci première, pas seconde) en temps est proportionnelle à la dérivée seconde spatiale.

### 5.1.3 Résolution des équations et séries de Fourier

Nous avons maintenant deux équations qui nous intéressent, celle de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x)$$

et celle des cordes vibrantes (appelée aussi *équation des ondes*)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}h(t, x) = k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}h(t, x).$$

Comment les résoudre ? Tout d'abord, dans quelles situations faut-il s'attendre à une solution unique ? L'idée est que, comme dans le cas des équations ordinaires, il faut donner un nombre de données initiales (concernant le comportement pour  $t = 0$ ) égal à l'ordre de l'équation (considérée comme une équation différentielle en  $t$ ... ceci parce qu'on considère comme donnée initiale celle en  $t = 0$ , et pas  $x = 0$ ).

Prenons donc l'équation de la chaleur avec une donnée initiale  $u(0, x) = u_0(x)$ . Dans le cas où, par hasard, on a  $u_0(x) = A \sin(nx)$  il est facile de deviner une solution : on la cherche de la forme  $u(t, x) = c(t) \sin(nx)$  et on voit qu'elle résout l'équation de la chaleur si et seulement si  $c'(t) = -\sigma n^2 c(t)$ , ce qui nous donne  $c(t) = c(0)e^{-\sigma n^2 t}$ . Ensuite, il suffit de prendre  $c(0) = A$  pour adapter cette solution à la donnée initiale ! Un calcul similaire nous donne la solution dans le cas où  $u_0(x) = A \cos(nx)$ .

Pour l'équation des ondes, supposons

$$h(0, x) = A \sin(nx) \text{ et } \frac{\partial}{\partial t}h(0, x) = A' \sin(nx).$$

Dans ce cas on cherche encore une solution du type  $h(t, x) = c(t) \sin(nx)$  et on trouve qu'il faut imposer

$$c''(t) = -k^2 n^2 c(t), \quad c(0) = A, \quad c'(0) = A',$$

ce qui donne  $c(t) = A \cos(knt) + A' \sin(knt)$ .

Mais, comment faire si les données initiales ne sont pas de forme sinusoïdale ? heureusement ces équations sont linéaires, donc on est capables de trouver la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) \\ u(0, x) = \sum_n A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx) \end{cases}$$

simplement en sommant les solutions correspondantes. On obtient dans ce cas

$$u(t, x) = \sum_n e^{-\sigma n^2 t} (A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx)).$$

Pour l'équation des ondes, on trouve une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}h(t, x) = k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}h(t, x) \\ h(0, x) = \sum_n A_n \sin(nx) + B_n \cos(nx) \\ \frac{\partial}{\partial t}h(0, x) = \sum_n A'_n \sin(nx) + B'_n \cos(nx) \end{cases}$$

en prenant

$$h(t, x) = \sum_n (A_n \cos(knt) + A'_n \sin(knt)) \sin(nx) + (B_n \cos(knt) + B'_n \sin(knt)) \cos(nx).$$

Dans les sommes ci-dessous, on n'a pas été précis sur le nombre de termes. Évidemment tout marche bien si on a des sommes finies. Mais toutes les données initiales  $u(0, x), h(0, x) \dots$  ne sont pas des sommes finies d'expressions sinusoidales!! On aurait envie d'écrire aussi des séries, et on se pose la question de quelles fonctions s'écrivent comme une somme infinie de fonctions sinusoidales, et dans quel sens (dès qu'on a une somme infinie, on a une limite : s'agit-il d'une convergence simple? uniforme?). Les séries de Fourier servent exactement à répondre à cette question!

## 5.2 Séries trigonométriques

### 5.2.1 Applications périodiques

On dit qu'une application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est périodique de période  $T \in \mathbb{R}$  (on dit aussi  $T$ -périodique) si pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $f(x+T) = f(x)$ . Il est facile de voir que l'ensemble des fonctions  $T$ -périodiques est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Les fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto \cos x$  sont  $2\pi$ -périodiques; la fonction  $x \mapsto e^{ix/T}$  est  $(2\pi/T)$ -périodique. Une fonction définie sur un intervalle de longueur  $T$  peut bien sur être identifiée à une fonction  $T$ -périodique.

On utilisera constamment la propriété élémentaire suivante.

**Proposition 5.2.1** Soit  $f$  une application  $T$ -périodique. Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[0, T]$ , alors pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  est continue par morceaux sur  $[x_0, x_0 + T]$  et l'on a

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

### 5.2.2 Séries trigonométriques

**Définition 5.2.2** Une série de fonctions de terme général  $f_n$  est appelée série trigonométrique lorsqu'il existe deux suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  de nombres réels telles que  $f_0(t) = a_0$  pour tout  $t$ , pour tout  $n \geq 1$  et tout  $t$  on a

$$f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

Nous utiliserons souvent la notation exponentielle pour les séries trigonométriques. Posant en effet  $c_0 = a_0$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

on obtient la relation

$$\sum_{n \geq 0} f_n(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

Réciproquement il est clair qu'une série de fonctions du type  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$  est une série trigonométrique, avec  $a_0 = c_0$  et pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = c_n + c_{-n}$ ,  $b_n = i(c_n - c_{-n})$ . Le lecteur devra pourtant prendre garde à cette notation. On dira en effet que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$  converge lorsque la série  $a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$  correspondante converge, ce qui conduit à la

**Définition 5.2.3** On appelle  $p$ -ième somme partielle de la série trigonométrique  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$S_p = \sum_{n=-p}^{n=p} c_n e^{int}$$

On dira que la série est convergente (simplement, normalement) lorsque la suite de fonctions  $(S_p)$  converge (simplement, normalement).

Lorsque les séries  $\sum |a_n|$  et  $\sum |b_n|$  convergent, on voit immédiatement que la série trigonométrique correspondante converge normalement, la fonction somme étant alors une fonction continue et  $2\pi$ -périodique.

**Proposition 5.2.4** L'ensemble  $\mathcal{D}$  des points où la série trigonométrique converge simplement est invariant sous l'effet de la translation  $t \mapsto t + 2\pi$ , et la fonction somme  $S$  est  $2\pi$ -périodique. Si la série converge normalement sur un intervalle  $I$  de  $\mathcal{D}$ , la fonction  $S$  est continue sur  $I$ . C'est notamment le cas lorsque les séries de termes généraux  $a_n$  et  $b_n$  sont absolument convergentes.

Lorsque la série trigonométrique  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$  est normalement convergente sur  $[0, 2\pi]$  (donc sur  $\mathbb{R}$ ), il existe une relation simple entre les coefficients  $c_n$  et la fonction somme de cette série.

**Proposition 5.2.5** Soit  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$  une série trigonométrique normalement convergente sur  $[-\pi, \pi]$  et  $S$  sa fonction somme. Alors la fonction  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et l'on a, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(t) e^{-int} dt$$

Si de plus la série trigonométrique  $\sum inc_n e^{int}$  des dérivées est normalement convergente, de somme  $S_1$ , la fonction  $S$  est dérivable avec  $S' = S_1$ .

**Preuve.**— La fonction somme  $S$  est continue par la théorie générale et  $2\pi$ -périodique. De plus on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-ipt} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t} dt$$

On utilise alors le lemme suivant dont la preuve est un **Exercice** facile.

**Lemme 5.2.6** Soit  $k$  un entier relatif et  $I(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt$ . On a

$$I(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

La dérivabilité de  $S$  est directement donnée par le théorème de dérivabilité des séries de fonctions. □

### 5.3 Coefficients de Fourier

Pour alléger les notations, nous travaillerons avec des fonctions  $2\pi$ -périodiques. L'ensemble des définitions et résultats de ce chapitre s'applique cependant aux fonctions  $T$ -périodiques, à condition de remplacer à chaque fois les fonctions  $2\pi$ -périodiques  $t \mapsto \cos(nt)$ ,  $t \mapsto \sin(nt)$  et  $t \mapsto e^{int}$  respectivement par les fonctions  $t \mapsto \cos(2\pi nt/T)$ ,  $t \mapsto \sin(2\pi nt/T)$  et  $t \mapsto e^{2i\pi nt/T}$  qui sont  $T$ -périodiques. On note  $\mathcal{E}$  l'espace des fonctions  $2\pi$ -périodiques et continues par morceaux sur chaque période.

Si  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$  une série trigonométrique normalement convergente sur  $[-\pi, \pi]$  et  $S$  sa fonction somme, on sait que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \cos(nx) dx \text{ pour } n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \sin(nx) dx \text{ pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

Cela va nous conduire à la

**Définition 5.3.1** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[-\pi, \pi]$ . On appelle coefficients de Fourier exponentiels de  $f$  les nombres complexes  $c_n$  définis pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Les coefficients de Fourier trigonométriques sont les nombres définis par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

et, pour  $n \geq 1$ ,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

**Remarque 5.3.2** Si  $S$  est la somme d'une série trigonométrique  $\sum c_n e^{int}$  normalement convergente, les coefficients de Fourier exponentiels de  $S$  sont les  $c_n$  (cf. la Proposition 5.2.5).

**Exercice 5.3.3** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  définie sur  $[0, 2\pi[$  par  $f(x) = x^2$ .

**Exercice 5.3.4** Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{E}$  et  $g$  la fonction de  $\mathcal{E}$  définie par  $g(t) = f(t + a)$  où  $a$  est un réel fixé. Calculer les coefficients de Fourier de  $g$  en fonction de ceux de  $f$ .

Voici d'abord quelques propriétés très simples de ces coefficients de Fourier.

- i) Dans chacune des définitions ci-dessus, l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  peut être remplacée par n'importe quel intervalle de longueur  $2\pi$ .
- ii) Si  $f$  est une fonction à valeurs réelles,  $a_n$  et  $b_n$  sont réels et  $\bar{c}_n = c_{-n}$  pour tout  $n$
- iii) Si  $f$  est une fonction paire, tous les  $b_n$  sont nuls. De même si  $f$  est impaire, tous les  $a_n$  sont nuls
- iv) On a  $a_0 = c_0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les relations  $a_n = c_n + c_{-n}$ ,  $b_n = i(c_n - c_{-n})$  et  $c_n = (a_n - ib_n)/2$ ,  $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$
- v) Les coefficients de Fourier d'une combinaison linéaire de fonctions sont les combinaisons linéaires correspondantes des coefficients de Fourier de chacune d'elles :  $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$
- vi)

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)| dt.$$

La propriété suivante porte le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue.

**Proposition 5.3.5** Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{E}$ . Les suites  $(a_n(f))$ ,  $(b_n(f))$ ,  $(c_n(f))$  et  $(c_{-n}(f))$  des coefficients de Fourier de  $f$  sont convergentes et ont pour limite 0.

**Preuve.**— Compte tenu du point (iv) précédent, il est clair qu'il suffit de prouver la proposition pour les suites  $(c_n)$  et  $(c_{-n})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). De plus puisque  $\bar{c}_n(f) = c_{-n}(f)$ , on voit qu'il

suffit de prouver la proposition pour la suite  $(c_{-n})$ . Pour les fonctions  $f = \sum_{j=0}^N K_j \mathbb{1}_{[x_j, x_{j+1}]}$  en escaliers, on a

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} K_j e^{int} dt = \frac{1}{2in\pi} \sum_{j=0}^N K_j (e^{inx_{j+1}} - e^{inx_j}),$$

et donc la majoration

$$|c_{-n}| \leq \frac{1}{n\pi} \sum_{j=0}^N |K_j|.$$

Pour une fonction continue par morceaux  $f$  sur  $[-\pi, +\pi]$  quelconque, la proposition découle alors du fait que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe (voir le lemme ci-dessous) une fonction  $\phi$  constante par morceaux (fonction en escalier) telle que  $\|f - \phi\|_\infty \leq \varepsilon$ . Du coup, on a  $c_n(f) = c_n(f - \phi) + c_n(\phi)$  et donc

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f - \phi)| + |c_n(\phi)| \leq \varepsilon + |c_n(\phi)|.$$

En prenant  $\limsup_{n \rightarrow \pm\infty}$  à gauche et à droite on trouve

$$\limsup_{n \rightarrow \pm\infty} |c_n(f)| \leq \varepsilon$$

et donc,  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire,  $\lim c_n(f) = 0$ . □

Deux fonctions distinctes peuvent-elles avoir les mêmes coefficients de Fourier ? En appliquant le résultat suivant à leur différence, on voit qu'il n'en est rien si ces fonctions diffèrent en un point où elles sont toutes deux continues :

**Proposition 5.3.6** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux périodique. S'il existe un point  $c \in [-\pi, \pi]$  tel que  $f(c) \neq 0$  et  $f$  soit continue en  $c$ , alors les coefficients de Fourier de  $f$  ne sont pas identiquement nuls.

**Preuve.**—On suppose que  $f(c) = a > 0$ . Puisque  $f$  est continue au point  $c$ , il existe un réel  $\alpha > 0$  assez petit (en particulier, on suppose aussi  $\alpha < \pi/2$ ) tel que pour tout  $x \in ]c - \alpha, c + \alpha[$ , on ait  $f(x) \geq a/2$ . Supposons que tous les coefficients de Fourier de  $f$  soient nuls. Alors pour tout polynôme trigonométrique  $P(t)$  positif sur  $[c - \alpha, c + \alpha]$  on a

$$0 = \int_{c-\pi}^{c+\pi} f(t)P(t)dt \geq \frac{a}{2} \int_{c-\alpha/2}^{c+\alpha/2} P(t)dt + \int_I f(t)P(t)dt + \int_J f(t)P(t)dt,$$

où  $I = [c - \alpha, c - \alpha/2] \cup [c + \alpha/2, c + \alpha]$  et  $J = [c - \pi, c - \alpha] \cup [c + \alpha, c + \pi]$ . En utilisant  $f, P \geq 0$  sur  $I$  on écrit

$$0 \geq \frac{a}{2} \int_{c-\alpha/2}^{c+\alpha/2} P(t)dt + \int_J f(t)P(t)dt.$$

Prenons alors  $P(t) = P_n(t) = (1 + \cos(t - c) - \cos(\alpha/2))^n$ . Pour  $t \in ]c - \alpha/2, c + \alpha/2[$  on a  $\cos(t - c) > \cos(\alpha/2)$ , donc  $P_n(t) \geq 1$ . Pour  $t \in ]c - \alpha, c + \alpha[$  nous avons  $\cos(t - c) > 0$  (car

$\alpha < \pi/2$ ), donc  $1 + \cos(t - c) - \cos(\alpha/2) \geq 1 - \cos(\alpha/2) \geq 0$ , ce qui confirme que  $P_n(t)$  est positif sur  $[c - \alpha, c + \alpha]$ . Enfin, pour  $t \in J$  on a par contre

$$-1 < -\cos(\alpha/2) < (1 + \cos(t - c) - \cos(\alpha/2)) < 1 + \cos(\alpha) - \cos(\alpha/2) < 1.$$

Par simplicité, on écrit  $\theta = \max\{1 + \cos(\alpha) - \cos(\alpha/2), \cos(\alpha/2)\} < 1$ . On a donc  $|P_n(t)| \leq \theta^n$ . On en déduit que la suite  $(P_n)_n$  converge uniformément vers 0 sur  $J$ , ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t)P_n(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)P_n(t)dt \right) \\ = \int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(t)dt = 0 \end{aligned}$$

On aboutit à

$$0 \geq a\alpha,$$

ce qui est absurde. □

## 5.4 Séries de Fourier : Cas des fonctions “très” régulières

Nous venons de définir les coefficients de Fourier d'une fonction périodique  $f$  dont nous avons seulement supposé qu'elle était continue par morceaux. Nous nous intéressons maintenant à la série trigonométrique dont les coefficients sont précisément les  $c_n(f)$  et que l'on appelle *série de Fourier de  $f$* . La question naturelle est de savoir si cette série trigonométrique converge et dans ce cas si sa fonction somme est  $f$ . La réponse est très délicate dans le cas où l'on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires sur la fonction  $f$ . Par contre, et c'est l'objet de ce paragraphe, on peut voir assez facilement que c'est bien le cas pour les fonctions périodiques qui sont suffisamment régulières, c'est à dire plusieurs fois dérivables. L'ensemble des résultats qui suivent repose sur la

**Proposition 5.4.1** Soit  $k$  un entier strictement positif,  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique,  $(c_n(f))$  la suite des coefficients de Fourier exponentiels de  $f$ . Si  $f$  est  $k$  fois continument dérivable sur  $\mathbb{R}$ , alors il existe un réel  $M > 0$  tel que pour, tout  $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$ , on ait

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^k}.$$

**Preuve.**— Supposons que  $f$  est continument dérivable. En intégrant par parties et puisque  $f(2\pi) = f(0)$  on obtient, pour  $n \neq 0$ ,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int} dt$$

et donc

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|} |c_n(f')|.$$

Dans le cas d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $k > 1$ , on obtient facilement

$$|c_n(f)| = \frac{1}{|n|^k} |c_n(f^{(k)})| \leq \frac{M}{|n|^k}.$$

□

**Proposition 5.4.2** Si  $f$  est une fonction  $2\pi$ -périodique de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $k \geq 2$ , alors la série de Fourier de  $f$  est normalement convergente et sa somme est  $f$ .

**Preuve.**— Puisque l'on a  $|c_n(f)| \leq M/n^2$ , la série trigonométrique  $\sum c_n(f)e^{int}$  est normalement convergente. On a vu que les coefficients de Fourier de la fonction somme  $S$  sont alors égaux à ceux de la fonction  $f$ . Puisque  $f$  et  $S$  sont continues, la Proposition 5.3.6 entraîne l'égalité  $f = S$ . □

## 5.5 Théorème de convergence simple de Dirichlet

Nous abordons maintenant le problème difficile de la convergence des séries de Fourier de fonctions peu régulières. Dans ce cas la convergence uniforme n'a pas toujours lieu et nous devons nous contenter d'un théorème de convergence simple dû à G. Dirichlet.

On dira qu'une fonction continue par morceaux sur  $[0, 2\pi]$  est continument dérivable par morceaux (on dit aussi  $\mathcal{C}^1$  par morceaux) sur cet intervalle s'il existe une partition de  $[0, 2\pi]$  constituée d'un nombre fini d'intervalles  $[a, b]$  tels que

- i)  $f$  est continue sur  $]a, b[$ ; de plus  $f$  possède une limite à droite en  $a$  et une limite à gauche en  $b$ ,
- ii)  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$  et  $f'$  est continue par morceaux sur cet intervalle.

**Proposition 5.5.1** [Théorème de Dirichlet] Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique continument dérivable par morceaux et  $x_0 \in [0, 2\pi]$ . Alors la série de Fourier de  $f$  converge simplement en  $x_0$  et sa somme est

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

où  $f(x_0+)$  et  $f(x_0-)$  sont les limites à droite et à gauche de  $f$  en  $x_0$ . Si de plus  $f$  est continue en  $x_0$ , sa série de Fourier converge vers  $f(x_0)$ .

La preuve de ce théorème utilise le

**Lemme 5.5.2** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et tout  $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  on a :

$$\sum_{k=-n}^n e^{iku} = \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]}.$$

**Preuve.**— On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{iku} &= e^{-inu} \sum_{k=0}^{2n} (e^{iu})^k = e^{-inu} \frac{1 - e^{i(2n+1)u}}{1 - e^{iu}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})u}}{e^{-iu/2}} \cdot \frac{1 - e^{i(2n+1)u}}{1 - e^{iu}} \\ &= \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})u} - e^{i(n+\frac{1}{2})u}}{e^{-iu/2} - e^{iu/2}} = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} . \end{aligned}$$

□

On peut maintenant démontrer le Théorème de Dirichlet (Théorème 5.5.1).

**Preuve.**— Soit  $S_n(x)$  la  $n$ -ième somme partielle de la série de Fourier de  $f$  :

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} .$$

En utilisant les définitions des  $c_k$ , on a

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \sum_{k=-n}^n e^{ik(t-x)} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]}{\sin[\frac{t-x}{2}]} dt , \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du Lemme 5.5.2. En posant  $u = t-x$ , et en utilisant la périodicité de l'intégrand, on obtient

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x+u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x+u) du .$$

On découpe l'intégrale en deux et on change de variable dans le premier morceau :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x+u) du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x+u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x-u) du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} f(x+u) du . \end{aligned}$$

On a donc la "formule de Dirichlet" :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} du .$$

Au passage, on note que pour  $f_0 = 1$ , on a  $c_0(f_0) = 1$ ,  $c_k(f_0)$  pour tout  $k \neq 0$ , et la formule de Dirichlet donne

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} du .$$

Notons alors  $\alpha = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ . On a

$$\begin{aligned} S_n(x) - \alpha &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} du - \alpha \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]} \left[ \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - \alpha \right] du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \phi(u) \sin[(n + \frac{1}{2})u] du. \end{aligned}$$

Dans cette expression,

$$\phi(u) = \frac{u}{\sin[\frac{u}{2}]} \frac{1}{u} \left[ \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - \alpha \right]$$

est une fonction continue par morceaux sur  $[0, 2\pi]$  (pour cela il faut définir  $\phi(0)$ , et on peut par exemple prendre  $\phi(0) := \lim_{u \rightarrow 0^+} \phi(u)$ , qui existe grâce à l'hypothèse de dérivabilité de  $f$ ). Par conséquent on peut appliquer le Lemme de Riemann-Lebesgue à  $\phi$ , ce qui nous permet d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) - \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \phi(u) \sin[(n + \frac{1}{2})u] du = 0.$$

Cela termine la preuve du Théorème de Dirichlet. □

**Exercice 5.5.3** Soit  $f$  la fonction paire et  $2\pi$ -périodique définie par  $f(x) = x(\pi - x)$  sur  $[0, \pi]$ . Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques et montrer l'égalité

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

*Indication* : vous devriez trouver  $c_n = 2/n^2$  pour  $n \neq 0$  pair,  $c_0 = \pi^2/6$  et  $c_n = 0$  pour  $n$  impair. Appliquer ensuite le Théorème de Dirichlet au calcul de  $f(0)$ .

# Chapitre 6

## Méthodes hilbertiennes

### 6.1 Convergence en moyenne quadratique

On peut comprendre le théorème de Dirichlet ainsi que la Proposition 5.4.2 comme des énoncés portant sur la possibilité d'approcher d'aussi près que possible une fonction  $2\pi$ -périodique par un polynôme trigonométrique. Dans un cas on a une convergence simple, dans l'autre (avec des hypothèses plus restrictives) on a même une convergence uniforme.

Pour pouvoir considérer de fonctions moins régulières, par exemple continues par morceaux, il faut changer de façon de mesurer la distance entre les fonctions. Pour  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux et  $2\pi$ -périodiques, on note

$$d_2(f, g) := \|f - g\|_2 := \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Par rapport à la distance habituelle

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - g(x)|,$$

un des avantages de  $d_2$  est qu'elle ne "voit pas" les éventuelles discontinuités isolées des fonctions  $f$  et  $g$ .

Le nombre  $d_2(f, g)$  est appelé écart quadratique moyen entre  $f$  et  $g$ .

**Proposition 6.1.1** *Si une suite de fonction  $(f_n)$  continues par morceaux et  $2\pi$ -périodique converge uniformément vers une fonction  $f$ , alors cette suite converge vers  $f$  en écart quadratique moyen, c'est à dire*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_2(f, f_n) = 0$$

**Preuve.**— L'hypothèse de convergence de la suite  $(f_n)$  s'écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Or on a

$$d_2(f, f_n) \leq \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f_n(x) - f(x)| \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \right)^{1/2}$$

ce qui montre la proposition.  $\square$

**Exercice 6.1.2** Montrer par un exemple que la réciproque n'est pas vraie, même si on travaille dans l'espace des fonctions continues.

L'objectif principal de ce chapitre est de montrer la

**Proposition 6.1.3** Soit  $f$  une fonction périodique de période  $2\pi$ , de carré intégrable. Parmi tous les polynômes trigonométriques  $Q(x)$  de degré inférieur à  $n$ , la  $n$ -ième somme partielle  $S_n(f)$  de la série de Fourier de  $f$  est le seul pour lequel l'écart quadratique moyen  $d_2(f, Q)$  atteint sa plus petite valeur, et l'on a

$$d_2(f, S_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2.$$

De plus, on a  $d_2(f, S_n)$  et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2.$$

Pour cela, on va utiliser de manière essentielle le fait que l'écart  $d_2$  provient d'un produit scalaire (presque!) sur l'espace des fonctions de carré intégrable.

## 6.2 Espaces préhilbertien

### 6.2.1 Produit scalaire

**Définition 6.2.1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Un produit scalaire (hermitien) sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{C}$  :  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  telle que

- i)  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  est une application linéaire, pour tout  $y \in E$  fixé.
- ii)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;
- iii)  $\langle x, x \rangle = 0$  si et seulement si  $x = 0$ ;
- iv)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ .

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

**Exemple 6.2.2** Sur  $E = \mathbb{C}^m$ ,  $(z, z') \mapsto \sum_j z_j \overline{z'_j}$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{C}^m$ . Sur  $E = \mathbb{R}^m$ ,  $(x, x') \mapsto \sum_j x_j x'_j$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Si le produit scalaire se trouve prendre ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on parle de produit scalaire euclidien. Dans le cas contraire, on parle de produit scalaire hermitien.

**Exemple 6.2.3** Sur  $E = C^0([a, b]; \mathbb{C})$ , l'application  $(f, g) \mapsto (\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt)$  définit un produit scalaire. Notons que, si on remplace  $C^0([a, b]; \mathbb{C})$ , par l'espace des fonctions continues par morceaux sur  $\mathbb{C}$ , ce n'est plus un produit scalaire. Si en effet une fonction  $f$  est nulle sauf en un nombre fini de points où elle est non-nulle, le produit scalaire  $\langle f, f \rangle$  est nul sans que la fonction soit identiquement nulle.

On est donc conduit à modifier la notion de fonction intégrable, et à considérer que ces fonctions telles que  $\langle f, f \rangle = 0$  sont "nulles", mais c'est une autre histoire. . .

## 6.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

L'inégalité suivante, appelée inégalité de Cauchy-Schwarz, joue un rôle très important dans l'analyse hilbertienne.

**Proposition 6.2.4** Dans un espace préhilbertien on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} .$$

**Preuve.**— Soit  $x, y \in E$ . On note  $\theta$  l'argument du nombre complexe  $\langle x, y \rangle$ , de sorte que  $|\langle x, y \rangle| = e^{-i\theta} \langle x, y \rangle$ . D'après la propriété iv), pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\langle x + \lambda e^{i\theta} y, x + \lambda e^{i\theta} y \rangle \geq 0.$$

En développant, on obtient, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x \rangle + \langle x, \lambda e^{i\theta} y \rangle + \langle \lambda e^{i\theta} y, x \rangle + \langle \lambda e^{i\theta} y, \lambda e^{i\theta} y \rangle \\ &\leq |x|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \langle x, y \rangle) + \lambda^2 |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2\lambda |\langle x, y \rangle| + \lambda^2 |y|^2. \end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré en  $\lambda$  ne change pas de signe, donc son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire

$$|\langle x, y \rangle|^2 - |x|^2 |y|^2 \leq 0.$$

□

## 6.2.3 Norme associée

On peut associer une norme à un produit scalaire. Autrement dit, un espace préhilbertien peut être naturellement considéré comme un espace vectoriel normé :

**Proposition 6.2.5** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. La fonction

$$N : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur  $E$ .

**Preuve.**— La fonction  $N$  est bien définie sur  $E$  puisque  $\langle x, x \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in E$  d'après la propriété iv). Elle est à valeur dans  $\mathbb{R}^+$  par définition. On a  $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , et

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 &= N(x)^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + N(y)^2 \\ &\leq N(x)^2 + 2|\langle x, y \rangle| + N(y)^2 \leq N(x)^2 + 2N(x)N(y) + N(y)^2, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de Cauchy-Schwarz. On a ainsi  $N(x+y)^2 \leq (N(x) + N(y))^2$ , et donc l'inégalité triangulaire

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

□

On notera désormais  $N(x) = |x|$  la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Remarque 6.2.6** On peut retrouver, dans le cas d'une norme associée à un produit scalaire, le produit scalaire à partir de la norme. Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , il suffit en effet de remarquer l'identité :

$$|x+y|^2 - |x-y|^2 = \langle (x+y), (x+y) \rangle - \langle (x-y), (x-y) \rangle = 4\langle x, y \rangle,$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (|x+y|^2 - |x-y|^2).$$

Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , il faut jouer avec  $x+y$ ,  $x-y$ ,  $x+iy$  et  $x-iy$ .

**Exemple 6.2.7** L'application  $f \mapsto \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$  définit une norme sur  $C^0([a, b]; \mathbb{C})$ . On la note  $|f|_2$ , et on a pour  $f, g$  continues,

$$d_2(f, g) = |f - g|_2.$$

## 6.2.4 Orthogonalité

**Définition 6.2.8** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien.

- Deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont dits orthogonaux lorsque  $\langle x, y \rangle = 0$ .
- Plus généralement une famille  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  de vecteurs de  $E$  est dite orthogonale lorsque  $\langle x_i, x_j \rangle = 0$  pour tous  $i \neq j$ .
- La famille  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  est orthonormée lorsque

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j},$$

où  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon ( $\delta_{i,j}$  est appelé symbole de Kronecker).

**Exemple 6.2.9** La famille constituée des fonctions

$$\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi} \cos(x), \frac{1}{\pi} \cos(2x), \dots, \frac{1}{\pi} \cos(nx), \dots, \frac{1}{\pi} \sin(x), \frac{1}{\pi} \sin(2x), \dots, \frac{1}{\pi} \sin(nx), \dots$$

est orthonormée dans  $\mathcal{C}^0([0, 2\pi])$  muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

De même, la famille constituée des fonctions  $e^{ikx}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est orthonormée dans  $\mathcal{C}^0([0, 2\pi]; \mathbb{C})$  muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Lorsqu'on dispose d'une base orthonormée, l'expression du produit scalaire est très simple, puisque c'est celle que l'on connaît dans  $\mathbb{R}^2$  :

**Proposition 6.2.10** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien de dimension  $n$ , et  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base orthonormée de  $E$ . Si  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$  et  $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ , alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}.$$

**Preuve.**— En utilisant la linéarité et l'anti-linéarité du produit scalaire par rapport à chacune de ses variables respectives, on trouve

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{k=1}^n y_k e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j \overline{y_k} \langle e_j, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j \overline{y_k} \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}.$$

□

**Proposition 6.2.11 (Théorème de Pythagore)** Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une famille orthogonale. On a

$$|e_1 + e_2 + \dots + e_n|^2 = |e_1|^2 + |e_2|^2 + \dots + |e_n|^2.$$

**Preuve.**— Il suffit d'écrire

$$|e_1 + e_2 + \dots + e_n|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^n e_j, \sum_{k=1}^n e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle e_j, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n |e_j|^2.$$

□

**Proposition 6.2.12** Dans un espace préhilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimension finie, on peut toujours construire une base orthonormée.

**Preuve.**— Par définition, il existe une base  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  de  $E$ , où  $n$  est la dimension de  $E$ . A partir de cette base, on va construire une base orthonormée par le procédé de Gram-Schmidt.

- On pose  $\epsilon_1 = e_1/|e_1|$ . On a donc  $|\epsilon_1| = 1$ .
- On pose  $f_2 = e_2 - \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1$ . On a  $\langle f_2, \epsilon_1 \rangle = \langle e_2, \epsilon_1 \rangle - \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \langle \epsilon_1, \epsilon_1 \rangle = 0$ . Posant alors  $\epsilon_2 = f_2/|f_2|$ , la famille  $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  est orthonormée.
- On continue ainsi : à l'étape  $k \leq n$ , on pose

$$f_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, \epsilon_j \rangle \epsilon_j.$$

Le vecteur  $f_k$  est orthogonal à chacun des vecteurs  $\epsilon_i$  déjà construits, puisque

$$\langle f_k, \epsilon_i \rangle = \langle e_k, \epsilon_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, \epsilon_j \rangle \langle \epsilon_j, \epsilon_i \rangle = \langle e_k, \epsilon_i \rangle - \langle f_k, \epsilon_i \rangle = 0.$$

On pose alors  $\epsilon_k = f_k/|f_k|$ , et on obtient une famille  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$  orthonormée. □

### 6.2.5 Projection orthogonale

**Proposition 6.2.13** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien, et  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soit  $x \in E$ . Un vecteur  $y \in V$  réalise le minimum de la distance de  $x$  à  $V$ , c'est-à-dire

$$|x - y| = \min_{b \in V} |x - b|,$$

si et seulement si  $x - y$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $V$ . S'il existe, un tel  $y$  est unique, et s'appelle projection orthogonale de  $x$  sur  $V$ . On le note  $y = \Pi_V(x)$ .

**Preuve.**— Supposons que  $y \in V$  soit tel que  $x - y$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $V$ . Pour  $b \in V$ , on a

$$\begin{aligned} |x - b|^2 &= |(x - y) + (y - b)|^2 = |x - y|^2 + \langle x - y, y - b \rangle + \langle y - b, x - y \rangle + |y - b|^2 \\ &= |x - y|^2 + |y - b|^2, \end{aligned}$$

puisque  $y - b \in V$ . On a donc, pour tout  $b \in V$ ,  $|x - b| \geq |x - y|$ , et

$$|x - y| = \min_{b \in V} |x - b|.$$

Réciproquement, si  $y \in V$  est tel que

$$|x - y| = \min_{b \in V} |x - b|,$$

alors pour tout  $v \in V$ , et tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,

$$|x - y + \alpha v|^2 \geq |x - y|^2.$$

En développant, on obtient

$$2 \operatorname{Re}(\alpha \langle x - y, v \rangle) + \alpha^2 |v|^2 \geq 0.$$

Comme cela est vrai pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on peut également l'écrire pour  $t\alpha$  ( $t > 0$ ) et diviser par  $t$ , en obtenant

$$2 \operatorname{Re}(\langle x - y, v \rangle) + t\alpha |v|^2 \geq 0.$$

En prenant la limite  $t \rightarrow 0$  on obtient

$$2 \operatorname{Re}(\langle x - y, v \rangle) \geq 0.$$

En utilisant  $\alpha \in \mathbb{R}$  et puis  $-\alpha$ , on obtient  $\operatorname{Re} \langle x - y, v \rangle = 0$ . En prenant  $\alpha = i\beta$ , on obtient de la même manière que  $\operatorname{Im} \langle x - y, v \rangle = 0$ .

Enfin supposons qu'il existe  $y_1, y_2 \in V$  tels que  $x - y_1$  et  $x - y_2$  soient orthogonaux à tous les éléments de  $V$ . On a

$$|y_1 - y_2|^2 = \langle y_1 - y_2, y_1 - y_2 \rangle = \langle y_1 - x, y_1 - y_2 \rangle + \langle x - y_2, y_1 - y_2 \rangle = 0,$$

d'où  $y_1 = y_2$ . □

Dans le cas où  $V$  est de dimension finie,  $\Pi_V(x)$  existe toujours, et on peut en donner une expression simple.

**Proposition 6.2.14** Soit  $V$  un sous-espace de dimension finie de l'espace préhilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , et  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $V$ . Tout  $x \in E$  admet une projection orthogonale, et

$$\Pi_V(x) = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j.$$

**Preuve.**— On cherche  $y = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$  tel que  $x - y$  soit orthogonal à tous les éléments de  $V$ .

Pour cela, il faut et il suffit que  $x - y$  soit orthogonal à chacun des  $e_j$ . Or

$$\langle x - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \alpha_k.$$

Donc  $y = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$  convient, et on sait qu'un tel élément est unique. □

## 6.3 Application aux séries de Fourier

### 6.3.1 L'espace $L^2([0, 2\pi])$

On note  $L^2([0, 2\pi])$  l'ensemble des fonctions  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $|f|^2$  est intégrable. Pour  $f$  et  $g$  dans  $L^2([0, 2\pi])$ , on pose

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Cette quantité est bien définie puisque, pour  $f, g \in L^2$ , on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx.$$

Malheureusement la quantité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  n'est pas tout à fait un produit scalaire sur  $L^2$  : comme on l'a déjà signalé, il est tout à fait possible pour une fonction  $f$  continue par morceaux d'avoir  $f \neq 0$  et  $\langle f, f \rangle = 0$ . Un des objectifs du cours d'intégration de troisième année est de trouver une définition adéquate de "fonction intégrable" qui permette de lever cette difficulté. Pour l'instant, on peut remarquer que la quantité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est vraiment un produit scalaire si l'on ne travaille qu'avec des fonctions continues.

La famille des fonctions  $e_k = x \mapsto e^{ikx}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est orthonormée dans  $L^2([0, 2\pi])$  pour ce (pseudo-) produit scalaire :

$$\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)x} dx = \delta_{j,k}.$$

D'ailleurs les coefficients de Fourier (complexes) de  $f$  sont donnés par

$$c_k(f) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

### 6.3.2 Inégalité de Bessel

Soit  $f \in L^2([0, 2\pi])$ , et  $S_n = S_n(f)$  la  $n$ -ième somme partielle de sa série de Fourier

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle e^{ikx}$$

Soit aussi  $V$  le sous-espace vectoriel de  $L^2$  constitué par les polynômes trigonométriques de degré  $\leq n$ . La famille orthonormale  $\{e_{-n}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $V$  (c'est même la définition de  $V$ ). On a, pour tout  $k \in \{-n, \dots, n\}$ ,

$$\langle S_n - f, e_k \rangle = \langle S_n, e_k \rangle - \langle f, e_k \rangle = c_k(f) - c_k(f) = 0.$$

Autrement dit,  $S_n - f$  est orthogonal à tous les éléments de  $V$  :  $S_n(f)$  est donc la projection orthogonale de  $f$  sur  $V$ , et l'on vient de démontrer la Proposition 6.1.3. En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

On en déduit l'inégalité de Bessel :

**Proposition 6.3.1** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique de carré intégrable, et  $c_k(f)$  ses coefficients de Fourier. La série  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$  converge, et

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

En terme des coefficients de Fourier trigonométriques de  $f$ , et puisque  $c_0 = a_0$ ,  $c_n = (a_n - ib_n)/2$  et  $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$  pour  $n \geq 1$ , l'inégalité de Bessel s'écrit

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

On remarque qu'on peut déduire une version plus forte de la Proposition 5.3.5 comme corollaire de l'inégalité de Bessel : en effet, si  $\sum_n |c_n|^2 < \infty$ , on a forcément  $c_n \rightarrow 0$ .

### 6.3.3 Identité de Parseval

En fait, l'inégalité de Bessel ci-dessus est une égalité.

**Proposition 6.3.2** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique et continue par morceaux. Alors on a  $\|S_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . En particulier, notant  $c_n(f)$  ses coefficients de Fourier, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

**Preuve.**— On commence par le cas  $f \in C^2$ . Dans ce cas, les sommes partielles  $S_n(f)$  de la série de Fourier de  $f$  convergent uniformément vers  $f$  sur  $[0, 2\pi]$ . En particulier, on a vu que

$$\|S_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Ceci donne la première partie de l'énoncé dans ce cas particulier.

Si  $f$  n'est pas  $C^2$  mais seulement continue par morceaux, on fixe  $\varepsilon > 0$  et on trouve une fonction constante par morceaux  $\phi$  telle que  $\|\phi - f\|_\infty \leq \varepsilon$ . On construit ensuite, en remplaçant les sauts de la fonction  $\phi$  par des fonctions lisses qui passent d'une valeur à la suivante sur un intervalle très petit autour du saut, une fonction  $\psi \in C^2$  telle que  $\|\phi - \psi\|_2 \leq \varepsilon$  (attention, dans ce cas on ne peut pas obtenir  $\|\phi - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$ ). On a donc construit une fonction  $\psi \in C^2$  telle que  $\|f - \psi\|_2 \leq 2\varepsilon$ . Maintenant on utilise

$$\|S_n(f) - f\|_2 \leq \|S_n(\psi) - f\|_2 \leq \|S_n(\psi) - \psi\|_2 + \|\psi - f\|_2.$$

Ici, la première inégalité vient de la propriété de minimalité de  $S_n(f)$ , qui minimise la distance à  $f$  parmi tous les polynômes trigonométrique de même degré (donc fait mieux que  $S_n(\psi)$ ). En prenant la  $\limsup_n$  on obtient

$$\limsup_n \|S_n(f) - f\|_2 \leq \limsup_n \|S_n(\psi) - \psi\|_2 + \|\psi - f\|_2 \leq 0 + 2\varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, on trouve  $\limsup_n \|S_n(f) - f\|_2 \leq 0$  et donc  $\lim_n \|S_n(f) - f\|_2 = 0$ .

Ceci donne la première partie de l'inégalité pour  $f$  quelconque. Pour prouver l'identité de Parseval, il suffit d'utiliser

$$\|f\|_2 = \lim_n \|S_n(f)\|_2.$$

□

**Exercice 6.3.3** Calculer la somme

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$$

*Indication* : utilisez la même fonction  $f$  de l'exercice 5.5.3 et appliquez l'identité de Parseval.