Notes du Cours
Analyse et Convergence II
Math203

Thierry Ramond
Mathématiques
Université Paris Sud
e-mail: thierry.ramond@math.u-psud.fr

version du 6 février 2015,
après des très petites modifications faites par F. Santambrogio

Table des matières

Chapitre 1

Suites de fonctions

1.1 Quelques rappels sur les suites numériques

1.1.1 Notion de limite

On se rappelle qu'une suite numérique est une liste infinie de nombres, réels ou même complexes. De manière plus précise

> **Définition 1.1.1** Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des nombres réels (ou complexes), définie sur une partie infinie de $\mathbb{N}$. Si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une suite, on note u_n le n-ième élément de la liste, c'est-à-dire le nombre $u(n)$ image de n par u. On note aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou même simplement (u_n), la suite u.

Ces "objets mathématiques" apparaissent lorsque l'on veut modéliser des phénomènes qui évoluent étape par étape, ou souvent lorsque l'on veut étudier étape par étape un phénomène qui évolue continument (c'est parfois plus facile, et parfois aussi suffisant). On peut penser par exemple

— au capital placé à un taux mensuel τ : après n mois, le capital est $u_n = (1+\tau)^n u_0$ (suite géométrique de raison $1+\tau$ et de premier terme u_0.

— au nombre d'individus d'une population de lapins : Fibonacci a imaginé que la population u_n au bout de n mois vérifie la relation de récurrence à deux termes $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

— ...

L'étude mathématique d'une suite numérique consiste essentiellement à décrire son comportement asymptotique : que devient u_n quand n devient grand ? La notion essentielle est celle de limite d'une suite de nombre

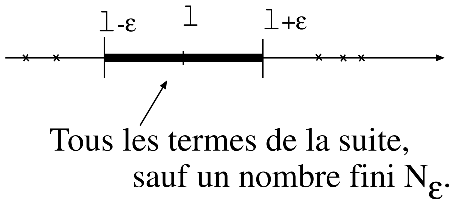

FIGURE 1.1 – Limite d'une suite

Définition 1.1.2 On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels a pour limite un réel ℓ donné, ou **tend vers** ℓ, ou encore **converge vers** ℓ lorsque

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \quad n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim(u_n) = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

1.1.2 Comment montrer qu'une suite numérique converge ?

On dispose d'un arsenal assez étendu pour démontrer qu'une suite converge. On peut citer pour mémoire

- les théorèmes d'opération avec les limites : si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, alors $u_n + v_n \to \ell + \ell'$, $u_n v_n \to \ell\ell'$,...
- le théorème des gendarmes : si $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si $v_n, w_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.
- le théorème sur les suites monotones : toute suite croissante et majorée est convergente.
- le critère de Cauchy (on y reviendra plus loin) : la suite (u_n) converge si et seulement si
$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N_\epsilon \Longrightarrow |u_p - u_q| \leq \epsilon.$$

On notera que les deux derniers résultats permettent d'affirmer qu'une suite converge sans qu'il soit nécessaire de disposer de renseignement sur sa limite. Il y a plein d'autres façon de procéder, plus ou moins spécifique à un type de suite particulier. On peut par exemple penser aux suites géométriques, ou encore aux suites adjacentes ...

1.2 Notion de suite de fonctions

Les suites de fonctions sont essentiellement un outil interne aux mathématiques, et sont donc probablement plus difficile à appréhender que les suites de nombres. Par contre c'est un outil indispensable, par exemple pour approcher la fonction f solution d'un problème et en déduire des propriétés de f - parfois même en déduire l'existence d'une telle solution ! Le but de ce cours est de vous les rendre familières.

Définition 1.2.1 Soit $I \subset \mathbb{R}$. Une **suite de fonctions** (f_n) sur I est une liste infinie de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Pour illustrer (une partie de) l'intérêt de ces objets, on va s'intéresser ici à l'équation différentielle $f' = f$. Tout le monde sait que les solutions de cette équation sont les fonctions $f(x) = Ce^x$ où $C \in \mathbb{R}$ (voir $C \in \mathbb{C}$ si l'on s'intéresse aux solutions à valeurs complexes). Pour simplifier la discussion, on va se restreindre au problème de Cauchy

$$\begin{cases} f' = f, \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

dont la solution est la fonction $f : x \mapsto e^x$.

Très bien. Maintenant on se pose la question suivante : comment tracer la courbe représentative de f ?

On veut tracer la courbe représentative de f, disons $\mathcal{C}_f$, sur l'intervalle $[0, 1]$ par exemple. Voici une méthode attribuée à Euler et qui porte son nom.

- Les seuls renseignements donnés par le problème sont $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On peut alors penser que $\mathcal{C}_f$ est proche, sur $[0, 1]$ de sa tangente au point $A_0 = (0, 1)$, c'est à dire de la droite $y = x + 1$. De cette manière on obtient en particulier l'approximation $e = f(1) \sim 2$. Bof.

- On se dit que $\mathcal{C}_f$ est proche de sa tangente en (0,1) mais pas sur tout l'intervalle $[0, 1]$. On coupe alors [0,1] en deux sous-intervalles de longueur $1/2$. Sur $[0, 1/2]$, on approche $\mathcal{C}_f$ par sa tangente en A_0. On obtient en particulier $f(1/2) \sim 3/2$ et $f'(3/2) \sim 3/2$.

Sur $[1/2, 1]$, on approche $\mathcal{C}_f$ par sa tangente en $A_1 = (1/2, f(1/2))$. Petit problème : on ne connait ni $f(1/2)$ ni $f'(1/2)$. Qu'à cela ne tienne, on les remplace par les valeurs approchées qu'on vient d'obtenir. Sur $[1/2, 1]$, on approche $\mathcal{C}_f$ par le segment d'équation $y - 3/2 = 3/2(x - 1/2)$.

Au total, on pense que la courbe $\mathcal{C}_f$ est proche, sur $[0, 1]$ de la fonction affine par morceaux f_1 définie par

$$f_1(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pour } x \in [0, 1/2] \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} & \text{pour } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

On a en particulier $e = f(1) \sim f_1(1) = 9/4 = 2,25$. Rebof.

- On recommence : on découpe l'intervalle en n morceaux, et on approche $\mathcal{C}_f$ par la courbe représentative $\mathcal{C}_n$ de la fonction affine par morceaux f_n construite de proche en proche.

Il reste une question. Quel sens donner à l'assertion "la courbe $\mathcal{C}_n$ est proche de la courbe $\mathcal{C}_f$" ? Ou encore "la courbe $\mathcal{C}_n$ converge vers la courbe $\mathcal{C}_f$" ?

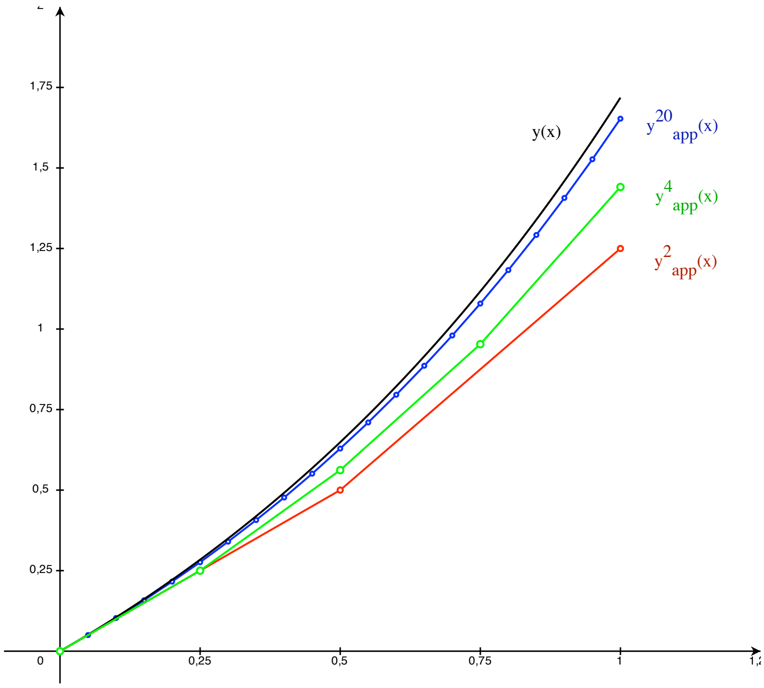

FIGURE 1.2 – Construction de la courbe représentative de l'exponentielle

1.3 Convergence uniforme

La notion naturelle de convergence pour une suite de fonctions (f_n) est celle que l'on a vue pour les courbes représentatives. On veut pouvoir dire que la suite de fonctions (f_n) converge vers f lorsque la courbe représentative de la fonction f_n se rapproche, quand n tend vers l'infini, de celle de f. Comme dans le cas des suites numériques, la notion de convergence pour les suites de fonctions est plus précise que cette assertion un peu vague.

1.3.1 Distance entre courbes

La première chose à faire est de définir une notion de distance entre les courbes représentatives de deux fonctions.

Proposition 1.3.1 Soient f et g deux fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle distance entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur I la quantité

$$d_I(f,g) = \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|.$$

D'un point de vue pratique, on peut se demander comment calculer cette distance : il s'agit de calculer la borne supérieure de la fonction $|f - g|$ sur I. On verra des exemples un peu plus loin, mais on doit se souvenir du Théorème de Weierstrass :

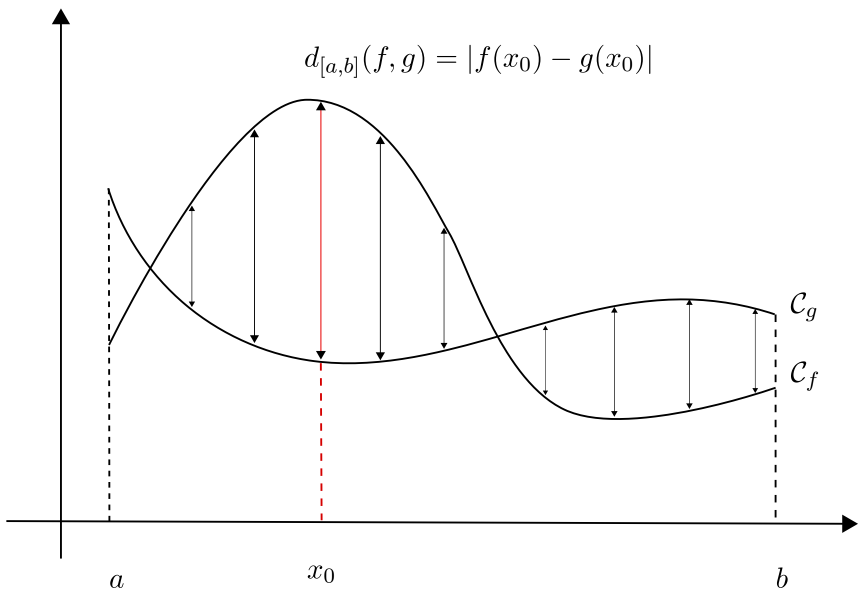

FIGURE 1.3 – Distance entre deux courbes

Proposition 1.3.2 Si $I = [a,b]$ est un intervalle fermé et borné, et si f et g sont continues sur I, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que

$$d_I(f,g) = |f(x_0) - g(x_0)|$$

Autrement dit, dans les conditions de la proposition, cette borne supérieure est un maximum. Ce n'est pas toujours le cas :

— Pour $I = [0,1[$ et $f : x \mapsto x^2$, $d_I(f,0) = \sup_{x \in [0,1[} x^2 = 1 \neq f(x_0)$ pour tout $x_0 \in I$.

— Pour $I =]0,+\infty[$ et $f : x \mapsto 1/x$, $d_I(f,0) = \sup_{x \in]0,+\infty[} 1/x = +\infty$.

Revenons au cadre de la proposition. La quantité $d_I(f,g)$ est alors réellement une distance. Plus précisément

Proposition 1.3.3 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle fermé $I = [a,b]$. Pour $f \in E$ on note

$$\|f\|_\infty = d_I(f,0).$$

L'application de E dans $\mathbb{R}^+$ qui à f associe $\|f\|_\infty$ est une norme.

Preuve.— Tout d'abord, puisque f est continue sur $I = [a,b]$, il existe $x_0 \in I$ tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$. Cela prouve en particulier que $\|f\|_\infty$ est bien défini et dans $\mathbb{R}^+$. On vérifie les trois propriétés qui caractérisent une norme :

i) $\|f\|_\infty = 0$ si et seulement si pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$, i.e. f est la fonction nulle.

ii) Pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Autrement dit $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $|f(x) + g(x)|$ sur I. Puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants, on a

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

ce qui est l'inégalité triangulaire.

iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in I$, on a $|\lambda f(x)| \leq |\lambda| \, |f(x)| \leq |\lambda| \, \|f\|_\infty$. Donc, en raisonnant comme ci-dessus,

$$\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \, \|f\|_\infty.$$

Pour $a = 1/\lambda$ et $g = af$, cette inégalité donne

$$\|f\|_\infty = \|ag\|_\infty \leq |a| \, \|g\|_\infty = \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty.$$

On a donc bien $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$ pour tout $\lambda \neq 0$. Cette égalité est bien sûr également vraie pour $\lambda = 0$.

□

1.3.2 Définition de la convergence uniforme

Définition 1.3.4 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$, et f une autre fonction définie sur I. On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I lorsque la suite numérique $(d_I(f_n, f))$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

$$d_I(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Pour montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I, il s'agit de montrer que la suite numérique (u_n) définie par $u_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0. Autrement dit, (f_n) converge uniformément vers f sur I lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon.$$

Puisque

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \Longleftrightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

on arrive à la caractérisation suivante :

(f_n) converge uniformément vers f sur I lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Il est peut-être plus facile d'interpréter graphiquement cette propriété sous la forme

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \forall x \in I, f_n(x) \in [f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon].$$

1.4 Convergence simple

1.4.1 Un exemple : la suite de fonctions $(x^n)_n$

On étudie la suite de fonctions (f_n), où $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = x^n$. On veut

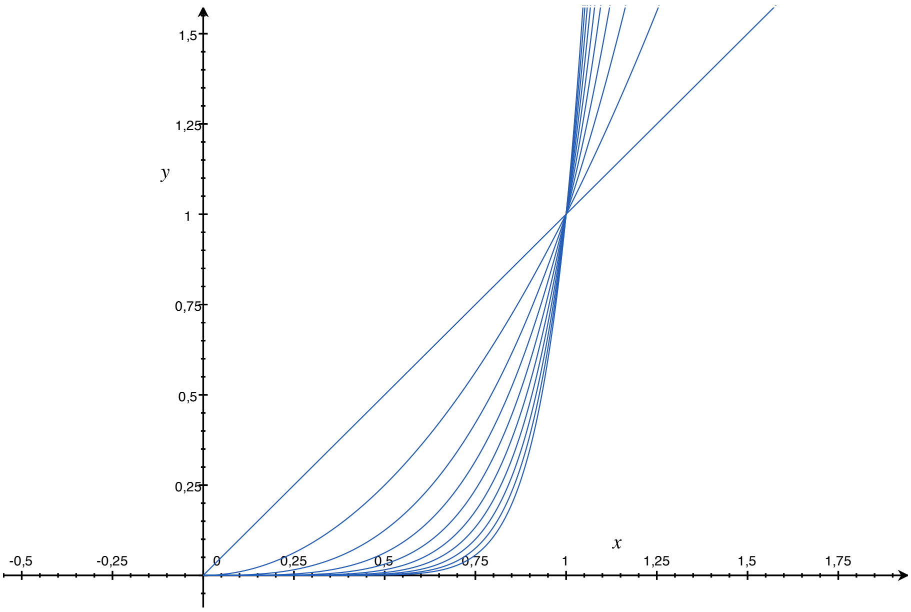

FIGURE 1.4 – Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^n$, pour $n \in \{1, \dots, 10\}$

savoir si la suite (f_n) converge uniformément sur $I = [0,1]$ vers une certaine fonction f. La première chose à faire est de trouver une fonction f qui soit un candidat plausible. Pour cela, on a tracé dans la figure ci-contre les premières courbes représentatives des fonctions de la suite (f_n). Il semble que ces courbes se rapprochent de plus en plus de celle de la fonction nulle.

Il est donc raisonnable d'essayer de montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle $f = 0$. Or

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = f_n(1) = 1,$$

donc (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle : le problème est que $f_n(1)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. On peut d'ailleurs remarquer que si (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors

$$\forall x \in I, \ f_n(x) \to f(x).$$

Voilà donc un moyen de repérer une limite uniforme f possible : dans notre exemple ($f_n(x) = x^n$), on a $f_n(x) \to 0$ pour $0 \leq x < 1$ et $f_n(1) \to 1$ quand $n \to +\infty$. Donc si (f_n) converge uniformément vers f, la fonction f est nécessairement la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Cependant, pour cette fonction f, et puisque $f_n(1) - f(1) = 0$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \sup_{x \in [0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1[} x^n = 1.$$

La suite (f_n) ne converge donc pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 1.4.1 Soit $0 < a < 1$. Montrer que la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_n$ converge uniformément sur $[0, a]$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1[$?

1.4.2 Convergence simple

De l'exemple précédent, on retient une définition et une condition nécessaire de convergence uniforme.

Définition 1.4.2 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$.

i) On dit que la suite (f_n) converge simplement au point x_0 de I lorsque la suite numérique $(f_n(x_0))$ est convergente.

ii) On dit que la suite (f_n) converge simplement sur I lorsqu'elle converge simplement en tout point x_0 de I. Dans ce cas la fonction f définie sur I par

$$f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x_0)$$

est appelée limite simple de la suite (f_n).

Proposition 1.4.3 Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors (f_n) converge simplement vers f sur I.

En particulier, la première étape dans l'étude d'une suite de fonctions est toujours le calcul de son éventuelle limite simple. Celle-ci peut d'ailleurs ne pas exister : penser au cas de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_n$ sur $]1, +\infty[$. Résumons :

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n$. La suite (f_n)
- — diverge sur $]1, +\infty[$.
- — converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
- — ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.
- — converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $0 < a < 1$.

1.5 Exemples

1.5.1 Des triangles glissants

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ les fonctions dont la courbe représentative est indiquée sur la Figure 1.5.

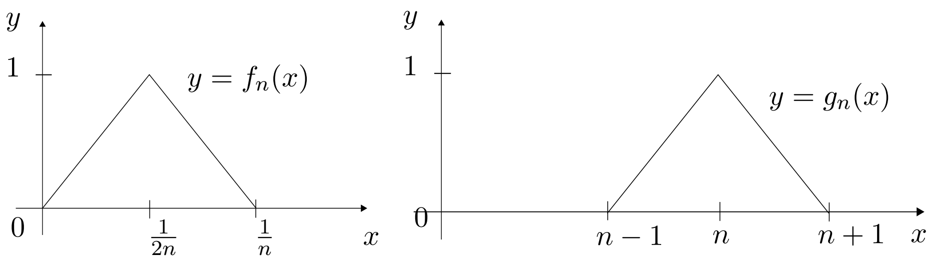

FIGURE 1.5 – Un triangle qui s'écrase sur l'axe des ordonnées, et un qui part à l'infini

- — Convergence simple :
  La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. En effet pour chaque $x > 0$ fixé, $f_n(x) = 0$ pour tout $n > 1/x$, donc $\lim f_n(x)_{n \to +\infty} = 0$, et on a aussi $f_n(0) = 0$ pour tout n, donc $f_n(0) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
  La suite de fonctions (g_n) converge simplement elle aussi vers la fonction nulle. En effet pour chaque $x \geq 0$ fixé, $f_n(x) = 0$ pour tout $n > x$, donc $\lim f_n(x)_{n \to +\infty} = 0$.
- — Convergence uniforme : Par contre aucune de ces deux suites ne converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, puisque $\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty = 1$ pour tout n.

1.5.2 $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$

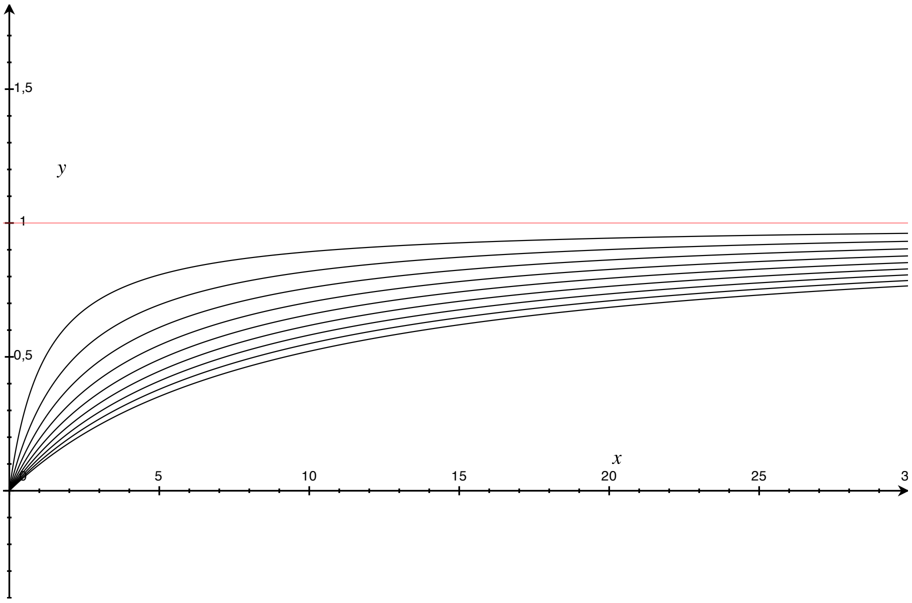

FIGURE 1.6 – Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \frac{x}{x+n}$, pour $n \in \{1, \ldots, 10\}$

Pour $n \geq 1$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$.

— Convergence simple : pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

— Convergence uniforme : supposons que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Sa limite est alors forcément la fonction nulle. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, on pourrait trouver un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\forall n \geq N_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x}{n+x} \leq \epsilon$$

ce qui équivaut à

$$\forall n \geq N_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}^+, x(1-\epsilon) \leq n\epsilon.$$

En particulier on aurait

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x(1-\epsilon) \leq \epsilon N_\epsilon,$$

ce qui est absurde : prendre $x = 2\epsilon N_\epsilon/(1-\epsilon)$. Donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

On remarque au passage que pour chaque x fixé, on a trouvé un $N_\epsilon(x) = x(1-\epsilon)/\epsilon$ tel que

$$n \geq N_\epsilon(x) \to |f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Ce n'est pas une surprise, puisque l'on sait que la suite numérique $(f_n(x))$ tend vers 0 pour chaque x. La différence entre la convergence simple et la convergence uniforme réside ici : pour la convergence simple le rang $N_\epsilon(x)$ peut dépendre de x, alors que le rang N_ϵ doit être le même pour tous les x dans le cas de la convergence uniforme.

1.5.3 $f_n(x) = xe^{-nx}$

— Convergence simple : Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$, donc $f_n(0) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour $x > 0$ fixé, $f_n(x) = xe^{-nx} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (l'exponentielle l'emporte). Donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

— Convergence uniforme : On veut estimer $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \geq 0} f_n(x)$. Comme les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$, on va dresser leur tableau de variations. On a

$$f_n'(x) = e^{-nx}(1 - nx),$$

d'où le tableau donné dans la Figure 1.7. On a donc $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{1}{n}) = 1/ne$, donc

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$					
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$	0

FIGURE 1.7 – Le tableau de variation de la fonction $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$

$\|f_n\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, et la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

Chapitre 2

Propriétés de la limite

On s'intéresse maintenant à la régularité (continuité, dérivabilité...) de la limite d'une suite de fonctions. L'exemple de la suite (f_n) définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$ montre que même si chacune des fonctions f_n est très régulière (ici de classe $\mathcal{C}^\infty$), la fonction limite peut ne même pas être continue (ici $f(x) = 0$ pour $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$). D'un point de vue un peu formel, on peut d'ailleurs noter que, toujours dans le cas de cette suite

$$0 = \lim_{x \to 1^-} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \neq \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to 1^-} f_n(x) = 1.$$

On est donc en présence d'un cas où l'on ne peut pas intervertir impunément l'ordre dans lequel on calcule deux limites successives.

Le point essentiel de ce chapitre est que ce genre de difficultés ne se présente pas lorsque la suite (f_n) converge uniformément. On précise ci-dessous ce principe trop vague pour l'instant.

2.1 Continuité

Proposition 2.1.1 Soit $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur I. Si la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f, alors f est continue sur I.

Preuve.— Soit $c \in I$. On veut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que

$$|x - c| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \epsilon.$$

On fixe donc $\epsilon > 0$. Comme la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_\epsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

On sait aussi que f_{N_ϵ} est continue au point c. Donc il existe $\alpha_\epsilon > 0$ tel que

$$|x - c| \leq \alpha_\epsilon \Rightarrow |f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(c)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Du coup, si $|x-c| \leq \alpha_\epsilon$,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(c)| &\leq |f(x)-f_{N_\epsilon}(x)| + |f_{N_\epsilon}(x)-f_{N_\epsilon}(c)| + |f_{N_\epsilon}(c)-f(c)| \\ &\leq \|f_{N_\epsilon}-f\|_\infty + |f_{N_\epsilon}(x)-f_{N_\epsilon}(c)| + \|f_{N_\epsilon}-f\|_\infty \\ &\leq \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

On peut donc prendre $\alpha(\epsilon) = \alpha_\epsilon$. Ce raisonnement marche pour tout $\epsilon > 0$: on a donc prouvé la continuité de f au point c. □

On notera bien l'importance de la convergence uniforme dans cette preuve. Le point essentiel est que $|f(x)-f_{N_\epsilon}(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $x \in I$.

Il faut remarquer aussi que la proposition ci-dessus donne une condition suffisante de continuité pour la limite de la suite (f_n). Par exemple la suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+n^2x^2}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, qui est évidemment continue, bien que la suite (f_n) ne converge pas uniformément : $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{\sin 1}{2} \not\to 0$.

On utilise en général cette proposition pour montrer la continuité d'une fonction, en l'approchant par une suite de fonctions continues qui converge uniformément. On peut aussi s'en servir pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément :

Exemple 2.1.2 Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n}$$

i) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

ii) Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

Pour finir, on notera que la proposition ci-dessus dit que, lorsque ses hypothèses sont satisfaites,

$$\boxed{\lim_{x\to c}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to c} f_n(x).}$$

2.2 Intégrabilité

La limite f d'une suite (f_n) de fonctions intégrables sur $[a,b]$ est-elle intégrable ? Dans ce cas, est-ce que l'on peut utiliser la suite (f_n) pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale de f ?

Modifions un peu notre bosse glissante. Soit (f_n) la suite de fonctions affines par morceaux définie sur $[0,1]$ par la Figure 2.1. La suite (f_n) converge vers 0, mais l'intégrale de f_n sur

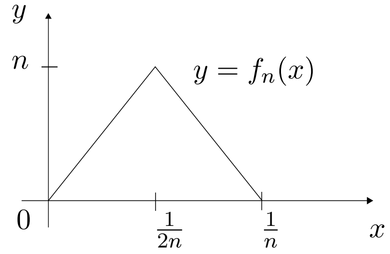

FIGURE 2.1 – Une bosse glissante de surface constante

$[0, 1]$ vaut $1/2$ pour tout n. Pour cette suite de fonctions, on n'a donc pas le résultat espéré. Voilà cependant un cas (dont on pouvait se douter...) où la réponse à la question posée est positive.

Proposition 2.2.1 Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$. Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.2.1}$$

Preuve.— On laisse de côté la question de l'intégrabilité de la limite. Autre manière de dire, on prouve la proposition seulement dans le cas où les fonctions f_n sont continues sur $[a, b]$, donc intégrables sur $[a, b]$. Puisque (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, on sait que f est aussi continue sur $[a, b]$, donc intégrable sur $[a, b]$.

On a alors

$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq (b - a)\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

quand $n \to +\infty$. □

On a compris que la convergence simple ne suffit pas à assurer le résultat, alors que la convergence uniforme, elle, suffit. Encore une fois, on peut néanmoins avoir la relation (2.2.1) pour des suites (f_n) qui ne convergent pas uniformément. C'est le cas par exemple de la suite (x^n) sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Là encore, on peut utiliser ce critère pour montrer qu'une suite ne converge pas uniformément :

Exercice 2.2.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)dx$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

2.3 Dérivabilité

Voici le résultat le plus difficile à appliquer. Sa démonstration est également délicate, et peut certainement être laissée pour une seconde lecture.

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Chacune des fonctions f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En effet $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$, et la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. La suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto |x|$. On a même convergence uniforme de la suite (f_n) puisque, quand $n \to +\infty$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Passons aux dérivées. La fonction f n'est pas dérivable (en 0), et en effet, la suite (f_n') ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque la suite (f_n') est donnée par

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}},$$

et sa limite simple est 1 pour $x > 0$, -1 pour $x < 0$ et 0 pour $x = 0$. Elle est donc discontinue, ce qui interdit la convergence uniforme. On retiendra que la convergence uniforme de la suite (f_n) n'est pas une condition suffisante pour la dérivabilité de la limite. C'est la convergence uniforme de la suite des dérivées (f_n') qui marche :

Proposition 2.3.1 Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions définies sur I. Si

i) les fonctions f_n sont dérivables sur I,

ii) la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f,

iii) et la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction ϕ,

alors f est dérivable sur I, et $f' = \phi$.

Encore une fois, ce résultat peut être vu comme un théorème d'interversion de limite. Sous les conditions de la proposition, on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f_n(x),}$$

et il faut se souvenir que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ par exemple.

Preuve.— (sous l'hypothèse additionnelle $f_n \in C^1$**)**

Soit $x_0, x \in I$ deux points arbitraires. En utilisant $f_n \in C^1$ et le théorème fondamentale du calcul, on peut écrire

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt.$$

L'hypothèse de convergence uniforme $f_n' \to \phi$, avec la propriété des convergence des intégrales montrée juste avant, permet de dire

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \to \int_{x_0}^{x} \phi(t)dt.$$

Si on rajoute la convergence simple de f_n vers f, on trouve

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \phi(t)dt.$$

Cela prouve que f est la primitive de ϕ. Comme ϕ est continue (parce que limite uniforme des fonctions f_n', qui sont continues), f est C^1 et $f' = \phi$. □

Preuve.— Soit $c \in I$. On veut montrer que f est dérivable au point c, de dérivée $\phi(c)$. Autrement dit, on veut montrer que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \phi(c).$$

Soit alors g_n la fonction définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \text{ pour } \ x \neq c, \\ f_n'(c) \text{ pour } \ x = c. \end{cases}$$

La fonction g_n est continue sur I et la suite (g_n) converge simplement sur I vers la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ pour } \ x \neq c, \\ \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(c) = \phi(c) \text{ pour } \ x = c. \end{cases}$$

Il s'agit donc de montrer que la fonction g est continue au point c. Pour cela, il suffit de montrer que (g_n) converge uniformément vers g sur I. On va utiliser le critère de Cauchy uniforme :

> **Lemme 2.3.2** Pour qu'une suite (f_n) converge uniformément sur I, il faut et il suffit que
>
> $$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N_\epsilon \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \leq \epsilon.$$

On admet ce lemme, et on l'applique pour terminer la preuve de la proposition. Soit $\epsilon > 0$. Puisque la suite (f_n') converge uniformément sur I, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$p, q \geq N_\epsilon \Rightarrow \|f_p' - f_q'\|_\infty \leq \epsilon$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f_p - f_q$, on a, pour $p, q \geq N_\epsilon$,

$$\forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x) - (f_p(c) - f_q(c))| \leq \|f'_p - f'_q\|_\infty |x - c| \leq \epsilon |x - c|$$

En divisant les deux membres de l'inégalité par $|x - c|$, et après réorganisation du membre de gauche, on obtient

$$\forall x \in I \setminus \{c\}, |g_p(x) - g_q(x)| \leq \epsilon.$$

Comme les fonctions g_n sont continues, cette inégalité reste vraie pour $x = c$. Autrement dit

$$p, q \geq N_\epsilon \Rightarrow \|g_p - g_q\|_\infty \leq \epsilon.$$

Donc la suite (g_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, et converge uniformément. $\square$