# Calcul Différentiel et Analyse Complexe

–

# Épreuve Terminale, 20 mai 2020

**Durée : 3h ; calculettes, notes personnelles et textes sont autorisés (de toute manière on ne pourrait rien vérifier) ; seulement, ne vous faites pas aider par d'autres humains.**

**Exercice 1** (6 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x,y) = (x^2 + y^2, y^2 - x^2).$$

a) Justifier que $f$ est une fonction $C^\infty$ et écrire sa matrice Jacobienne.

b) Prouver que $f$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}^2$ mais elle l'est si restreinte à $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y > 0\}$.

c) Prouver que $f$ est localement un difféomorphisme autour de chaque point de $\Omega$.

d) Prouver que $f$ est un difféomorphisme de $\Omega$ sur son image et déterminer son image.

e) Si on identifie maintenant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ en identifiant $(x,y)$ au complexe $x + iy$, en quels points de $\mathbb{C}$ la fonction $f$ admet-elle une dérivée complexe ?

f) Trouver toutes les fonctions holomorphes $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$.

g) Peut-on trouver une fonction holomorphe $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{Re}(h) = \mathrm{Re}(f)$. ?

**Corrigé :**

a) Chaque composante de $f$ est polynomiale, donc $C^\infty$. La matrice Jacobienne de $f$ vaut

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2x & 2y \end{pmatrix}.$$

b) La fonction $f$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}^2$ parce que $f(\pm x, \pm y) = f(x,y)$. Toutefois, si on regarde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y > 0\}$ elle devient surjective parce que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \\ y^2 - x^2 = \tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 \end{cases}$$

implique $x^2 = \tilde{x}^2$ et $y^2 = \tilde{y}^2$, ce qui entraine $x = \tilde{x}$ et $y = \tilde{y}$ lorsqu'on se limite à $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} > 0$.

c) Pour prouver que $f$ est localement un difféomorphisme autour de chaque point de $\Omega$ il suffit de vérifier que l'on a $\det(Jf(x,y)) \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \Omega$. Comme on a $\det(Jf(x,y)) = 4xy + 4xy = 8xy$ et $x, y \neq 0$, le déterminant ne s'annule pas.

d) La fonction $f$ est un difféomorphisme local qui, de plus, est injectif sur $\Omega$ ; elle est donc un difféomorphisme global grâce au théorème d'inversion globale. Son image est $\Omega_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a > b, a + b > 0\}$. En effet, il est clair que si on a $f(x,y) = (a,b)$ alors $a > b$ (car $a - b = 2x^2 > 0$) et $a + b > 0$ (car $a + b = 2y^2 > 0$), donc $f(\Omega) \subset \Omega_1$. De plus, pour tout $(a,b) \in \Omega_1$ on peut résoudre

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ y^2 - x^2 = a \end{cases}$$

puisque la solution est donnée par

$$x = \sqrt{\frac{a-b}{2}}. y = \sqrt{\frac{a+b}{2}},$$

les racines étant bien définies car on a $a - b, a + b > 0$. L'ouvert $\Omega_1$ est constitué de tous les points du plan dont l'angle avec la direction positive de l'axe des abcisses est inférieur à 45°.

e) Pour que $f$ admette une dérivée complexe il faut et il suffit que dans la Jacobienne les éléments sur la diagonale soit égaux et ceux en déhors soient opposés. Dans ce cas, la condition est $x = y$. La fonction admet donc une dérivé complexe sur la diagona.

f) Si une fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$ alors on peut appliquer les conditions de Cauchy-Riemann. On a dans ce cas

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(g)}{\partial x}(x+iy) = 2y, \quad \frac{\partial \mathrm{Re}(g)}{\partial y}(x+iy) = 2x.$$

La première condition nous donne, en prenant la primitive par rapport à $x$ pour $y$ fixé, $\mathrm{Re}(g)(x+iy) = 2xy + c(y)$. La deuxième condition nous donne ensuite $c'(y) = 0$. Toute fonction $g$ avec $\mathrm{Re}(g(x+iy)) = 2xy + c$ convient. On aurait donc $g(x+iy) = -i(x+iy)^2 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

g) Il n'y a par contre pas de fonction holomorphe $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{Re}(h) = \mathrm{Re}(f)$ puisque $\mathrm{Re}(f)$ n'est pas harmonique (on a $\Delta \mathrm{Re}(f) = 4$).

**Exercice 2** (6 points)**.** Considérer la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(\theta) := (\sin(3\theta)\cos(\theta), \sin(3\theta)\sin(\theta)).$$

a) Prouver que cette fonction est périodique de période $\pi$.

b) On la considère maintenant comme une courbe définie sur $[0, \pi]$. Faire un schéma indicatif de l'allure de cette courbe, et écrire ses dérivées première et seconde.

c) S'agit-il d'une courbe parametrée par longueur ?

d) Prouver que la valeur maximale de sa courbure est 10.

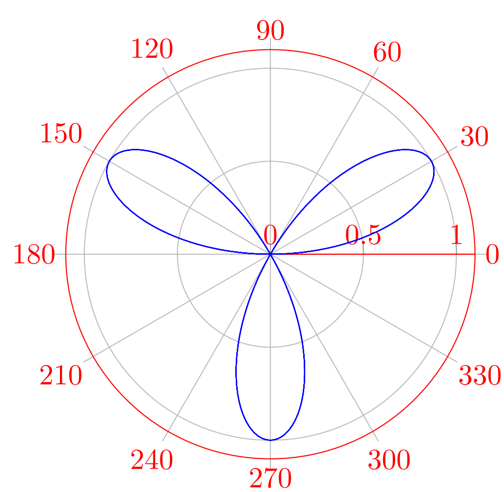
e) Soit $L(\gamma)$ la longueur de cette courbe. Prouver que l'on a $6 \leq L(\gamma) \leq 3\pi$.

f) On considère maintenant cette courbe comme un chemin dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Trouver l'indice par rapport à cette courbe des points $z_0 = -i/2$ et $z_1 = 2$.

**Corrigé :**

a) En remplaçant $\theta$ par $\theta + \pi$ les signes du sinus, du cosinus, mais aussi de $\sin(3\theta)$ changet, et chaque composante demeure donc inchangée. On a bien donc $\gamma(\theta) = \gamma(\theta + \pi)$.

b) Cette courbe est la même qui apparaissait dans l'examen blanc :




Si on note $e(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $v(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ on remarque qu'on a $e'(\theta) = v(\theta)$, $v'(\theta) = -e(\theta)$. On peut donc calculer

$$\gamma(\theta) = \sin(3\theta)e(\theta), \quad \gamma'(\theta) = \sin(3\theta)v(\theta) + 3\cos(3\theta)e(\theta)$$

et

$$\gamma''(\theta) = -\sin(3\theta)e(\theta)+3\cos(3\theta)v(\theta)+3\cos(3\theta)v(\theta)-9\sin(3\theta)e(\theta) = 6\cos(3\theta)v(\theta)-10\sin(3\theta)e(\theta).$$

c) En utilisant le fait que $(e(\theta), v(\theta))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ (on a $|e(\theta)| = |v(\theta)| = 1$ et $e(\theta) \cdot v(\theta) = 0$) on peut calculer

$$|\gamma'(\theta)| = \sqrt{\sin^2(3\theta) + 9\cos^2(3\theta)} = \sqrt{1 + 8\cos^2(3\theta)}.$$

Cete quantité n'étant pas constamment égale à 1, la courbe n'est pas paramétrée par longueur.

d) Pour calculer la courbure on utilise la formule

$$\kappa(\theta) = \frac{|\gamma'(\theta) \wedge \gamma''(\theta)|}{|\gamma'(\theta)|^3} = \frac{10\sin^2(3\theta) + 18\cos^2(3\theta)}{(1+8\cos^2(3\theta))^{3/2}} = \frac{10+8a}{(1+8a)^{3/2}},$$

où $a := \cos^2(3\theta)$ et le produit vectoriel a été calculé en utilisant la base orthonormée $(e(\theta), v(\theta))$. On doit chercher la valeur maximale de cette fraction pour $a \in [0,1]$. Or, pour $a = 0$ on a bien $\kappa = 10$. De plus on a

$$\frac{10+8a}{(1+8a)^{3/2}} \leq \frac{10+8a}{1+8a} = 1 + \frac{9}{1+8a} \leq 1 + 9 = 10.$$

Ceci montre que la valeur maximale de la courbure est bien 10, obtenue pour $\cos(3\theta) = 0$, donc $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$.

e) Si on considère les points correspondants à $\theta_k = k\frac{\pi}{6}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ on a $\gamma(\theta_k) = 0$ pour $k$ pair et $|\gamma(\theta_k)| = 1$ pour $k$ impair. En utilisant la définition de la longueur comme un sup on trouve

$$L(\gamma) \geq \sum_{k=0}^{5} |\gamma(\theta_k) - \gamma(\theta_{k+1})| = 6.$$

Si, au contraire, on utilise la formule avec la dérivée on trouve

$$L(\gamma) = \int_0^\pi |\gamma'(\theta)| d\theta = \int_0^\pi \sqrt{1+8\cos^2(3\theta)} d\theta \leq \int_0^\pi \sqrt{9} d\theta = 3\pi.$$

f) Le point $z_1 = 2$ est à l'extérieur de la courbe et son indice est donc 0. Le point $z_0 = -i/2$ est au contraire contourné par une branche de la courbe, qui passe autour de lui en sens direct. Son indice vaut donc 1.

**Exercice 3** (6 points)**.** On souhaite calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{3 - \sin t + \cos t}{3 + \cos t + \sin t} dt.$$

a) Prouver que cette intégrale ne change pas si on enlève "$-\sin t + \cos t$" du numérateur.

b) Calculer cette intégrale à l'aide du théorème des résidus

**Corrigé :**

a) Soit $f(t) := 3 + \cos t + \sin t$. On a

$$\int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + \cos t}{3 + \cos t + \sin t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \int_0^{2\pi} (\log(f(t)))' \, dt = [\log(f(t))]_{t=0}^{t=2\pi}$$

et la périodicité de la fonction $f$ montre que cette intégrale s'annule. On peut donc la soustraire de l'intégrale cherchée sans que le résultat ne change.

b) La méthode illustrée en cours stipule que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_\gamma R\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)\frac{1}{iz}dz,$$

où $\gamma(t) = e^{it}$. Ici on prend $R(u,v) = 3/(3+u+v)$. Il faut donc calculer

$$\int_\gamma \frac{3}{iz\left(3+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)}dz = \int_\gamma \frac{3}{3iz+z^2\frac{1+i}{2}+\frac{i-1}{2}}dz$$

On peut calculer cette dernière intégrale par la méthode des résidus si on trouve les pôles. Les points où s'annulle le dénominateur sont

$$z = \frac{-3i \pm \sqrt{-9-(1+i)(i-1)}}{1+i} = \frac{-3i \pm i\sqrt{7}}{1+i}.$$

En regardant le module de ces deux valeurs de $z$, on voit que la seule qui est contenu à l'intérieur du cercle unité est $z = i\frac{-3+\sqrt{7}}{1+i}$. Il faut calculer le résidu de la fonction $f = g/h$ en ce point, où $g = 3$ et $h(z) = 3iz + z^2\frac{1+i}{2} + \frac{i-1}{2}$. La formule usuelle nous dit que le résidus en un pôle simple $a$ vauf $g(a)/h'a)$, donc ici $\frac{3}{(1+i)a+3i}$. On a donc $\mathrm{Red}(f, \frac{-3i+i\sqrt{7}}{1+i}) = \frac{3}{-3i+i\sqrt{7}+3i} = \frac{3}{i\sqrt{7}}$. Enfin, la formule des résidus nous dit que l'intégrale en question vaut $2\pi i\mathrm{Red}(f, \frac{-3i+i\sqrt{7}}{1+i}) = \frac{6\pi}{\sqrt{7}}$.

**Exercice 4** (6 points)**.** Soit $f : \mathbb{C}\setminus\{1,2\} \to \mathbb{C}$ la fonction donnée par

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Cette fonction est holomorphe sur l'union des trois couronnes ouvertes $C(0,0,1)$, $C(0,1,2)$ et $C(0,2,\infty)$ où $C(z_0,r_1,r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$.

a) Exprimer $f$ sous la forme $f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$, pour $A, B \in \mathbb{C}$.

b) Trouver les coefficients de la série de Laurent de $f$ en chacune des trois couronnes ci-dessus.

c) Calculer, pour $z \in C(0,1,2)$, la somme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{n}{2^{(n+1)_+}} z^n,$$

où $(n+1)_+ := \max\{0, n+1\}$.

**Corrigé :**

a) On cherche $A$ et $B$ tels que

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)}.$$

Par identification des numérateurs on trouve $A+B=0$ et $-2A-B=1$, donc $A=-B$ et $B=1$. On a donc

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

b) Commençons par $C(0,0,1)$, où l'on a $|z|<1$ :

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geq 0} z^n, \quad \frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-(z/2)}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(\frac{z}{2})^n.$$

On trouve donc

$$f(z)=\sum_{n\geq 0} z^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Il n'y a que des termes avec exposant positif parce que la fonction est holomorphe jusqu'en $z=0$ inclus.

On passe ensuite à $C(0,1,2)$, où l'on a $1<|z|<2$ :

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}=\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{z})^n, \quad \frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-(z/2)}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(\frac{z}{2})^n.$$

On trouve donc

$$f(z)=-\sum_{n<0} z^n-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+1}}z^n=-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2^{(n+1)_+}}z^n.$$

On regarde enfin $C(0,2,\infty)$, où l'on a $|z|>2$ :

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}=\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{z})^n \quad \frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z}=\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{2}{z})^n.$$

On trouve donc

$$f(z)=\sum_{n\geq 0} z^{-(n+1)}(2^n-1),$$

ce qui peut s'écrire comme

$$f(z)=\sum_{n<0} z^n(2^{-n-1}-1),$$

c) En dérivant la série de Laurent de $f$ sur $C(0,1,2)$ on a

$$f'(z)=-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{n}{2^{(n+1)_+}}z^{n-1}.$$

On en déduit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{n}{2^{(n+1)_+}}z^n=-zf'(z)=\frac{2z^2-3z}{(z-1)^2(z-2)^2}.$$