Calcul Différentiel et Analyse Complexe
—
Épreuve Terminale, 20 mai 2020

Durée : 3h ; calculettes, notes personnelles et textes sont autorisés (de toute manière on ne pourrait rien vérifier) ; seulement, ne vous faites pas aider par d'autres humains.

Exercice 1 (6 points). Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x,y) = (x^2 + y^2, y^2 - x^2).$$

a) Justifier que f est une fonction C^∞ et écrire sa matrice Jacobienne.
b) Prouver que f n'est pas injective sur $\mathbb{R}^2$ mais elle l'est si restreinte à $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y > 0\}$.
c) Prouver que f est localement un difféomorphisme autour de chaque point de Ω.
d) Prouver que f est un difféomorphisme de Ω sur son image et déterminer son image.
e) Si on identifie maintenant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ en identifiant (x,y) au complexe $x + iy$, en quels points de $\mathbb{C}$ la fonction f admet-elle une dérivée complexe ?
f) Trouver toutes les fonctions holomorphes $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$.
g) Peut-on trouver une fonction holomorphe $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{Re}(h) = \mathrm{Re}(f)$. ?

Exercice 2 (6 points). Considérer la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(\theta) := (\sin(3\theta)\cos(\theta), \sin(3\theta)\sin(\theta)).$$

a) Prouver que cette fonction est périodique de période π.
b) On la considère maintenant comme une courbe définie sur $[0, \pi]$. Faire un schéma indicatif de l'allure de cette courbe, et écrire ses dérivées première et seconde.
c) S'agit-il d'une courbe parametrée par longueur ?
d) Prouver que la valeur maximale de sa courbure est 10.
e) Soit $L(\gamma)$ la longueur de cette courbe. Prouver que l'on a $6 \leq L(\gamma) \leq 3\pi$.
f) On considère maintenant cette courbe comme un chemin dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Trouver l'indice par rapport à cette courbe des points $z_0 = -i/2$ et $z_1 = 2$.

Exercice 3 (6 points). On souhaite calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{3 - \sin t + \cos t}{3 + \cos t + \sin t} dt.$$

a) Prouver que cette intégrale ne change pas si on enlève "$-\sin t + \cos t$" du numérateur.
b) Calculer cette intégrale à l'aide du théorème des résidus

Exercice 4 (6 points). Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{C}$ la fonction donnée par

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Cette fonction est holomorphe sur l'union des trois couronnes ouvertes $C(0,0,1)$, $C(0,1,2)$ et $C(0,2,\infty)$ où $C(z_0, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

a) Exprimer f sous la forme $f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$, pour $A, B \in \mathbb{C}$.
b) Trouver les coefficients de la série de Laurent de f en chacune des trois couronnes ci-dessus.
c) Calculer, pour $z \in C(0,1,2)$, la somme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n}{2^{(n+1)_+}} z^n,$$

où $(n+1)_+ := \max\{0, n+1\}$.