ENSAE 2010/2011 - 2A SEMESTRE 2

—

EXAMEN SESSION 1

—

Optimisation Dynamique

2h, sans documents, calculatrice non autorisée
Ce sujet se compose d'une seule page

Exercice 1 (7 points)**.** Un jeu a lieu sur la droite réelle $\mathbb{R}$ de la manière suivante : un pion se trouve initialement en $x_0 = 0$; le joueur doit ensuite le bouger trois fois : la première vers la droite ($x_1 \geq x_0$), la deuxième vers la gauche ($x_2 \leq x_1$) et a troisième où il veut, jusqu'à sa position finale x_3. Le score final, que le joueur veut maximiser, est donné par $\frac{1}{2}x_3^2$ auquel il faut soustraire le coût pour chaque déplacement, qui vaut $|x-y|^2$ à chaque fois que le pion est déplacé d'une position x à une position y.

Traduire le problème de maximisation associé à ce jeu par voie d'un problème de programmation dynamique en temps discret et horizon fini, et le résoudre, en trouvant les fonctions valeurs $v(t,x)$ pour $t = 0, 1, 2, 3$ et les politiques optimales. Y a-t-il unicité de la politique optimale ?

Résoudre également le même problème dans le cas - plus difficile - où $\mathbb{R}$ est remplacé par l'intervalle $[-1, 1]$ (et le pion ne peut pas sortir de cet intervalle).

Exercice 2 (4 points)**.** Considérer l'équation de Bellmann

$$v(x) = \inf\{|x-y|^2 + \beta v(y) \ : \ y \in [x-1, x+1]\},$$

où $\beta \in]0, 1[$ est un paramètre fixé. Trouver une fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée qui est solution de cette équation et expliquer ce que cela signifie en termes du problème de programmation dynamique en temps discret et horizon infini auquel cette équation est associée.

Exercice 3 (7 points)**.** Considérer la fonctionnelle F suivante

$$F(u) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}u'(t)^2 + 8|u(t)|^{3/2}\right) dt$$

et le problème de minimisation

$$\min\left\{F(u) \ : \ u \in C^1([0,1]), \ u(1) = 1\right\}.$$

a) Écrire l'équation d'Euler-Lagrange correspondante à ce problème de minimisation, avec les conditions au bord opportunes.

b) Trouver une solution $\bar{u}$ de cette équation, en la cherchant de la forme $\bar{u}(t) = At^\alpha$.

c) Justifier que $\bar{u}$ est solution du problème de minimisation, qu'elle est la seule solution du problème de minimisation et aussi la seule solution de l'équation avec ses conditions au bord.

Exercice 4 (7 points)**.** Considérer le problème de contrôle suivant

$$\max \int_0^T -\left(\frac{5}{4}x(t)^2 + u(t)^2\right) dt \quad : \quad x'(t) = x(t) + u(t), \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad x(0) = x_0 > 0.$$

a) Ecrire l'Hamiltonien du système et le système Hamiltonien résolu par (x, p).

b) Trouver la solution de ce système (il peut être utile d'écrire l'équation satisfaite par $p(t) - x(t)$). La courbe $x(t)$ est alors un candidat à l'optimisation. Préciser le contrôle u qui lui correspond.

c) Écrire l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème (celle qui est satisfaite par la fonction valeur) et deviner une solution de cette équation en utilisant les résultats trouvés à la question b) pour calculer un candidat solution.

d) Justifier que la courbe x est vraiment l'optimum, en s'appuyant sur les résultats vu en cours et sur les réponses aux questions précédentes.