ISSEA
ISE 2e année
27 avril 2009

Examen d'Optimisation Dynamique

Durée : 2 heures

Seul le polycopié et les notes de cours sont autorisés

Exercice 1 (4 points)**.** Considérer la corréspondance $\Gamma : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ suivante

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \{-1, 1\} & \text{si } x < 0, \\ [-x, x] & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Dire si Γ est hémi-continue supérieurement et/ou est hémi-continue inférieurement.

Exercice 2 (8 points)**.** Soit $x_0 > 0$ fixé. Résoudre soigneusement le problème d'optimisation suivant (en déterminant la polytique optimale si elle existe, la valeur du problème et les fonctions valeur si nécessaire et en justifiant tout ce qui est opportun justifer)

$$\sup \Big\{ f(x_0, x_1) + g(x_1, x_2) + h(x_2, x_3) + i(x_3, x_4), x_{i+1} \in \Gamma_i(x_i), i = 0, 1, 2, 3 \Big\}$$

où les paiements f, g, h et i et les correspondances $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ et Γ_3 sont définis par

$$f(x_0, x_1) = x_0 - x_0 x_1 - 10x_1, \quad g(x_1, x_2) = -3x_1^3 - 9x_1^2 + \tfrac{x_2}{x_1+1} - 3,$$
$$h(x_2, x_3) = 3\sqrt{x_2}x_3, \qquad i(x_3, x_4) = 3x_3x_4 - 2x_4^{3/2} - 2x_3^3,$$
$$\Gamma_0(x_0) = [2x_0, 3x_0 + 1],\ \Gamma_1(x_1) = [1, (x_1 + 1)^4],\ \Gamma_2(x_2) = [1, x_2 + 1],\ \Gamma_3(x_3) = [0, 2x_3^2 + 1].$$

Exercice 3 (10 points)**.** Considérer les deux problèmes d'optimisation suivants

$$(1) \quad \inf \left\{ \int_0^1 \Big[t(x'(t))^2 + x(t)^2 \Big] dt,\ x \in A([0, 1]),\ x(0) = 1 \right\},$$
$$(2) \quad \inf \left\{ \int_0^1 \Big[(x'(t))^2 + tx(t)^2 \Big] dt,\ x \in A([0, 1]),\ x(0) = 1 \right\},$$

où la classe $A([0, 1])$ est la classe des fonctions admissibles, c'est-à-dire les fonctions continues sur $[0, 1]$ et C^1 par morceaux.

- En s'inspirant aux exemples de non-unicité vus en cours, démontrer que le problème (1) n'a pas de solution.
- Écrire les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (2) sous la forme d'une équation d'Euler-Lagrange completée avec des conditions au bord.
- Ces conditions sont-elles suffisantes pour l'optimalité ?
- Qu'est-ce qu'on peut dire de l'unicité des minimiseurs du problème (2) ?
- L'équation d'Euler-Lagrange que vous avez déterminée (si vous avez trouvé la bonne équation), n'est pas très simple à résoudre. Chercher la solution sous la forme d'une série entière

  $$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

  et écrire une condition récursive sur les coefficients pour qu'une série come ça en soit une solution.
- Considérons la fonction $y(t) = e^{t^3}$, qui n'a rien à voir. Écrire une équation du même type que l'équation d'Euler-Lagrange du problème (2) qui est résolue par y. En suite, écrire un problème du calcul des variations du même type que le problème (2) qui est résolu par la fonction y.