Université de Paris XI **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques **1er semestre 2009–2010**

Feuille d'exercices 5

Courbes paramétrées, Fonctions de deux variables.

Les exercices avec $\star$ sont facultatifs. On ne traitera pas toutes les questions dans les exercices composés de plusieurs questions similaires.

Exercice 1.— **1.** Déterminer une représentation paramétrique simple du segment $[AB]$ où A et B ont respectivement pour coordonnées (x_A, y_A), (x_B, y_B).
2. On fixe deux réels a et b non nuls et on considére la transformation géométrique du plan qui a tout point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M' de coordonnées $x' = a.x$, $y' = b.y$.
Déterminer une représentation paramétrique de l'image du cercle de centre 0 de rayon par cette transformation. En déterminer une équation cartésienne.
$\star$**3.** Même question avec la transformation $x' = a.x + c.y$, $y' = b.y$ avec a, b réels non nuls et c quelconque.

Exercice 2.— On considère la courbe paramétrées donnée par les formules

$$x(t) = \cos^2(t), \quad y(t) = \cos^3(t)\sin(t)$$

En supposant que son tableau de variations est le suivant, tracer l'allure de la courbe.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
x'	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
y'	1	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	1
x	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1
y	0	$\nearrow$	$3\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$3\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	0

On tracera notamment les vecteurs vitesses aux points remarquables de cette courbe et l'on étudiera de plus près la question de la tangente aux endroits où la vitesse s'annule.

Donner, sous forme intégrale, une expression de la distance parcourue par le mobile entre deux instants t_0 et t_1. Pouvez-vous calculer cette intégrale ?

Exercice 3.— Reprendre l'exercice 2 avec

$$x(t) = \frac{t}{1+t^4}, \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$$

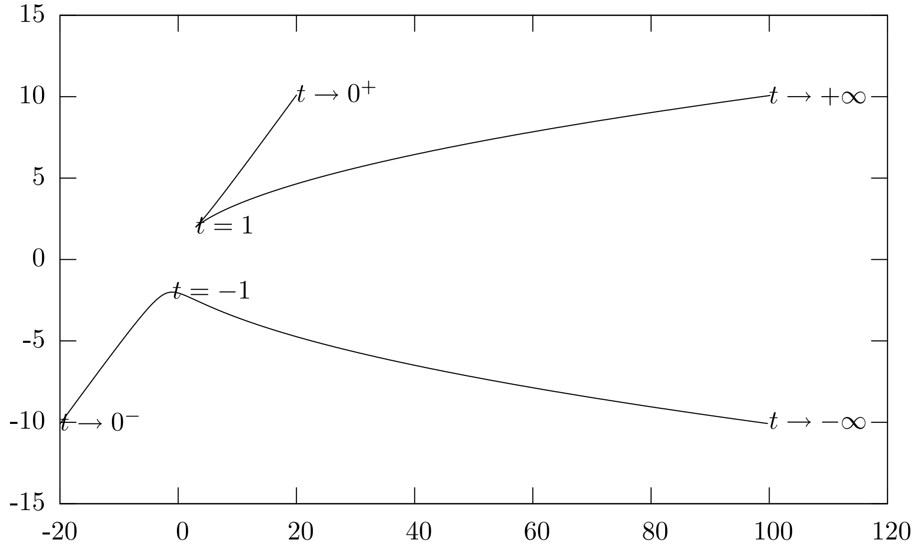

FIG. 1 – $x(t) = \frac{t}{1+t^4}$, $\quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}$

et le tableau de variations (incomplet)

t	0		$3^{-\frac{1}{4}}$		$3^{\frac{1}{4}}$		$+\infty$
x'	1	$+$	0	$-$		$-$	
y'	0	$+$		$+$	0	$-$	

On veillera notamment à examiner le comportement lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 4.— On considère la courbe paramétrées donnée par les formules

$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t}, \quad y(t) = t + \frac{1}{t}$$

Un logiciel de tracé sur ordinateur dessine la courbe de la figure 1.
Recomposer autant que possible les tableaux de variations des fonctions x et y.
Exercice 5.-$\star$- 1. Reprendre l'exercice 4 avec la courbe de Lissajous paramétrée par

$$x(t) = \sin(2t), \quad y(t) = \sin(3t)$$

et le graphique de la figure 2.
$\star$**2.** Déterminer les points où la courbe se recoupe.
Exercice 6.-$\star$- Pour chacune des courbes des exercices 2, 3, 4 et 5, calculer les tableaux de variations fournis ou obtenus.

Exercice 7.— On considère la courbe (Γ) définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$

1. Etudiez les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.
2. Déterminez les symétries de la courbe (Γ)
3. Tracez (Γ).
4. Déterminer la distance parcourue par le mobile entre les instants 0 et $\frac{\pi}{2}$.

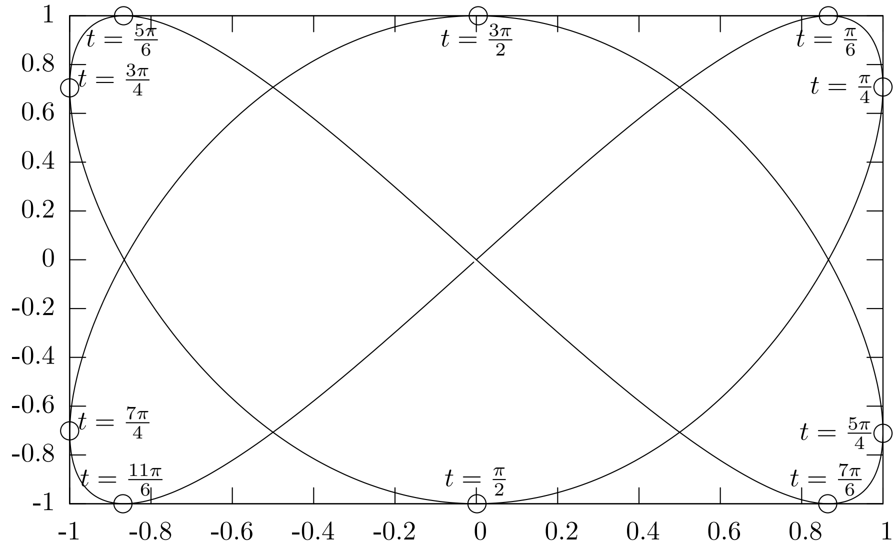

FIG. 2 – $x(t) = \sin(2t), \quad y(t) = \sin(3t)$

Exercice 8.-⋆- Tracer les courbes paramétrées suivantes

a. $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = t\frac{1-t^2}{1+t^2}$
b. $x(t) = \tan(t) + \sin(t), \quad y(t) = \frac{1}{\cos(t)}$
c. $x(t) = t^2 + 2t, \quad y(t) = \frac{1+2t}{t^2}$
d. $x(t) = \frac{t^2-1}{t}, \quad y(t) = \frac{t+1}{t(t-1)}$
e. $x(t) = \frac{4t^2}{1-t}, \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^2)}$

Exercice 9.— On fait rouler une roue sur un sol plan (sans glissement et en ligne droite). Sur le cerceau, il y a une marque colorée de petite dimension. Déterminer et tracer la courbe décrite par la marque.
réponse : si la roue est de rayon 1, en se donnant un repère raisonnable $x(t) = t + \sin t$, $y(t) = 1 + \cos t$
Déterminer la distance parcourue par cette marque lors d'un tour de roue.

Exercice 10.— On considére la courbe dont l'équation polaire est $r = \sin(2\theta)$ dont la figure 3 est une représentation tracée par ordinateur. Reconstituer le tableau de variation de la fonction $r(\theta)$ et expliquer les symétries visibles sur le tracé.

Exercice 11.-⋆- Même exercice que le précédent avec la courbe $r = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$ et la figure 4
Exercice 12.-⋆- Tracer les courbes dont l'équation polaire est

a. $r = \theta$	b. $r = 1 + \cos\theta$
c. $r = \frac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}$	d. $r = \frac{1}{\sin(2\theta)}$
e. $r = \ln\left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right) = \ln\cosh\theta$	

Exercice 13.-⋆- Construire les courbes définies par

a. $r(\theta) = \cos(\theta)$ | b. $r(\theta) = \cos(2\theta)$ | c. $r(\theta) = \cos(\frac{3}{2}\theta)$

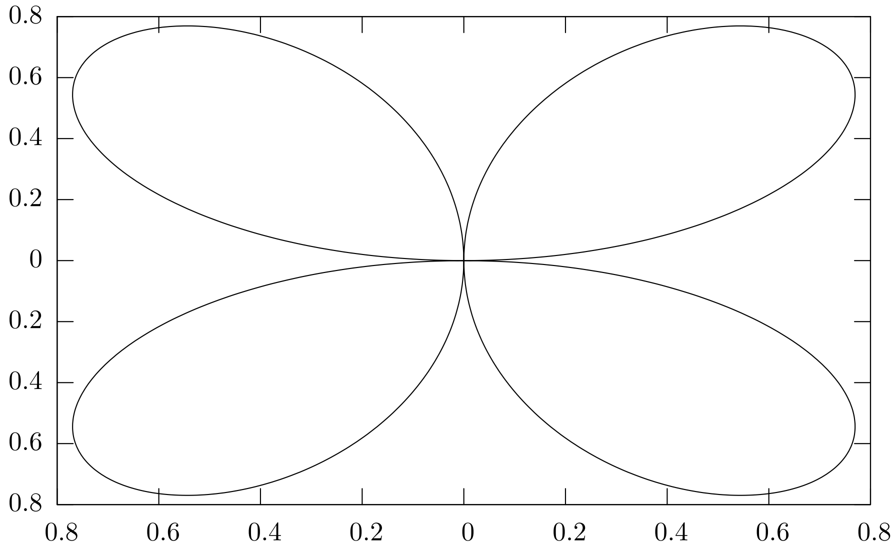

FIG. 3 – $r = \sin(2\theta)$

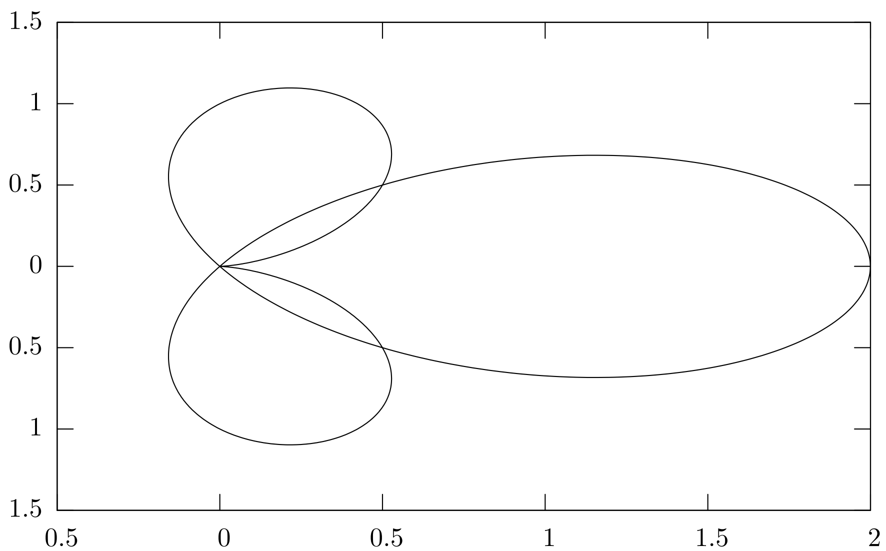

FIG. 4 – $r = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$

Fonctions de deux variables

Exercice 14.— Tracer la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 3xy$ en la coupant par les droites $y = tx$, et en faisant varier le paramètre $t \in \mathbb{R}$.
Exercice 15.— **1.** Pour chacune des formules suivantes, déterminer l'ensemble de définition, et dessiner cet ensemble.

$\frac{xy^2}{2x+y}$,	$\sin(\frac{1}{1-x^2-y^2})$,	$\ln(x-y)$,
$\sqrt{2x+y+1}$,	$\sqrt{2x+y+1}\ln(x-y)$,	$\sqrt{x^2+y^2-4}$,
$e^{\frac{1}{y+2x^2}}$,	$\sqrt{x^2+y^2-4} \times e^{\frac{1}{y+2x^2}}$,	$\ln(x^2-y^2)$.

$\star$**2.** Déterminer des formules pour les dérivées partielles premières de chacune de ces fonctions.
Exercice 16.— **1.** Soit $f_1(x,y) = \sin(x) + y^2$. Déterminer les fonctions partielles de f en un point (x_0, y_0). Tracer rapidement l'allure de leur graphe, en indiquant notamment les maxima et minima de la fonction.
2. Mêmes questions pour $f_2(x,y) = \sin(x)y$.
3. Mêmes questions pour $f_3(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$. Quelles sont les lignes de niveau de f_3 ?
Exercice 17.— Pour chacune des fonctions suivantes f en les deux variables x et y, trouver de nouvelles variables X et Y, fonctions linéaires en x et y, telles que f s'exprime en fonction de X et de Y sous une des formes : XY, $aX^2 + bY^2$, $aY + bX^2$. Dans chacun des cas, préciser l'allure des lignes de niveau de f.

1. $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + y + x$
2. $f_2(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy$
3. $f_3(x,y) = 3y^2 - 2x^2 - 5xy$
4. $f_4(x,y) = 4x^2 + 7y^2 + 10xy$

Exercice 18.— Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles premières, donner leur valeur au point indiqué et écrire la formule de Taylor d'ordre 1. On justifiera rapidement que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage du point considéré.

1. $f(x,y) = x\sin(y)$ en $(1, \pi/4)$;
2. $f(x,y) = \tan(x^2 + y)$ en $(0,0)$;
3. $f(x,y) = \arctan(y/x)$ en $(2,2)$;
4. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(2,2)$;
5. $f(x,y) = \ln(1 + (x+y)^2)$ en (x_0, y_0) ;
6. $P(V,T) = k\frac{T}{V}$ (où k est une constante) au point (V_0, T_0)

Exercice 19.— Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le DL à l'ordre 1 à partir des DLs classiques des fonctions d'une variable. On vérifiera que le reste se met bien sous la forme de $\|(h,k)\|\epsilon(h,k)$ où ϵ est une fonction de limite 0 en $(0,0)$.

1. $f(x,y) = e^{x-y}$ en $(0,0)$;
2. $f(x,y) = (1+x)\sqrt{1+y}$ en $(0,0)$;
3. $f(x,y) = \sqrt{1 + \sin(x-y)}$ en $(0,0)$;
4. $f(x,y) = \frac{1+x}{1+y}$ en $(0,0)$.

Exercice 20.— La figure 5 est une carte du relief d'une presqu'île : le contour extérieur est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.

Un plaisancier mouillant dans la baie située au sud de la presqu'île voudrait franchir la presqu'île à skis pour rejoindre la côte nord, en se dirigeant toujours droit vers le nord.
1. Partie graphique Dessinez le profil du relief le long de trois itinéraires sud-nord, en évaluant pour chacun de ces itinéraires l'altitude du point culminant. En quel point de la baie le plaisancier doit-il aborder pour que son dénivelé soit le plus petit possible ? Marquez sur la carte le point culminant de son itinéraire, et évaluez-en l'altitude.

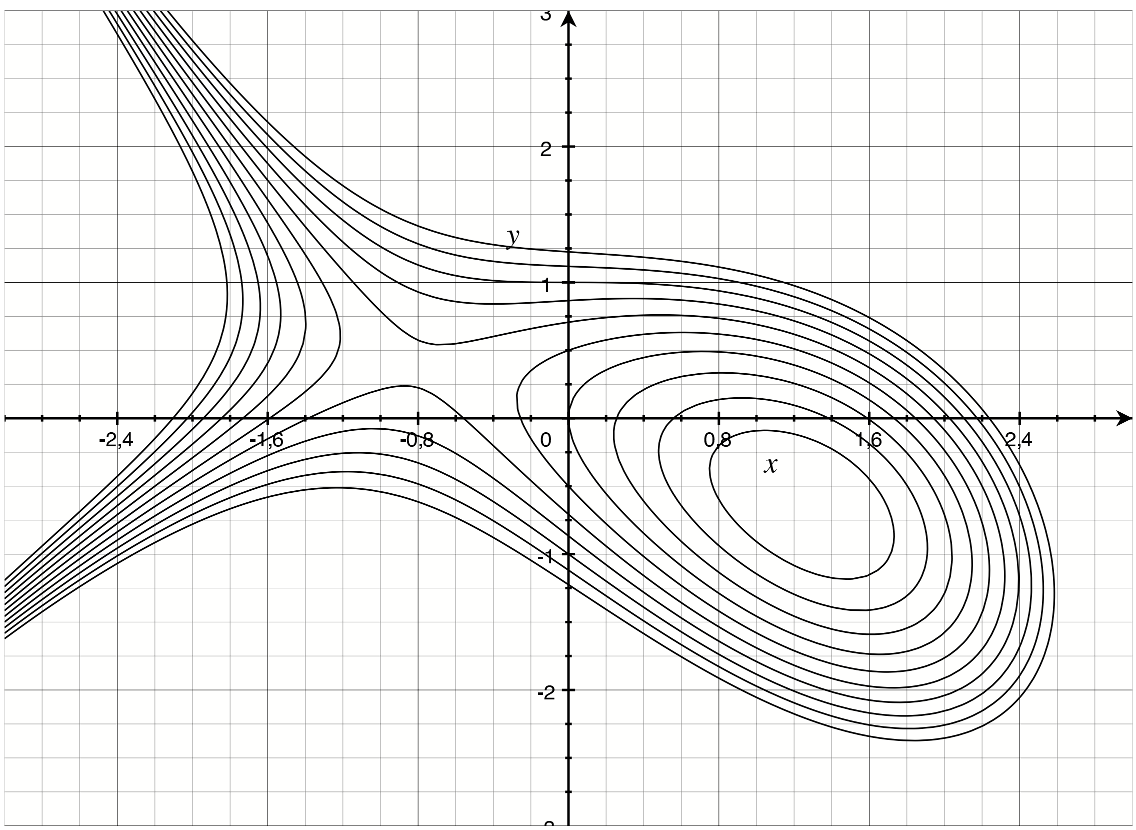

FIG. 5 – La carte d'une presqu'ile enneigée

2. Confrontation avec le calcul En fait la fonction de la figure a pour expression

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$$

(les valeurs des niveaux étant exprimées en centaines de mètres).
a. On note x_0 la longitude à laquelle a mouillé le plaisancier. Le profil de relief de la première question est le graphe d'une fonction de la variable y. Écrire cette fonction.
b. Trouver (par le calcul) l'altitude du point culminant de l'itinéraire.
c. Trouver (par le calcul) la longitude x_0 qui donne le pus petit dénivelé.
Exercice 21.— Calculer les dérivées partielles seconde de chacune des fonctions de l'exercice 18 en $(x,y) \neq (0,0)$.
Exercice 22.-⋆- On considère toutes les boites qui sont des parallélépipèdes rectangle, de volume 1, *sans couvercle*. On cherche celles dont la surface totale des parois est minimale.
1. Exprimer la surface totale S des parois en fonction de la largeur ℓ et de la profondeur p , $S = f(p,\ell)$.
2. Montrer que f a un unique point critique (p_0,ℓ_0), et calculer la valeur de f en ce point.
3. Par un DL d'ordre 2, montrer que l'on a trouvé un minimum local de la fonction f.
4. On fixe ℓ à une certaine valeur > 0 et on considère la fonction d'une variable $g(p) = f(p,\ell)$. Etudier g et trouver une formule pour son minimum absolu $m(\ell)$ en fonction de ℓ.
5. Etudier la fonction $m(\ell)$ et en déduire que $f(p_0,\ell_0)$ est le minimum absolu de f.

Exercice 23.-⋆- Le but de cet exercice est de répondre à la question suivante : *Parmi tous les triangles de périmètre fixé, quels sont ceux qui ont une surface maximale ?*

On donne la formule suivante (formule de Heron d'Alexandrie) : l'aire d'un triangle de côtés a,b,c est donnée par

$$A = \sqrt{p(p-A)(p-b)(p-c)}$$

où p est le demi-périmètre du triangle, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.
1. Pour simplifier, on considère les triangles de périmètre 2 (c-à-d $p = 1$). Exprimer l'aire en fonction des deux longueurs a et b.
2. Dessiner le domaine de définition de la fonction. [1]
3. Un triangle de périmètre 2 a ses côtés de longueur plus petite que 1 (pourquoi ?...). D'autre part, comme la racine carrée est croissante, on peut tout aussi bien chercher le maximum de A^2.

On cherche donc maintenant le maximum, pour x et y compris entre 0 et 1, de la fonction

$$f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1).$$

Trouver les points critiques de f.
4. En faisant le DL 2 de f au point critique, évaluer si l'on a affaire à un minimum local, un maximum local ou autre chose.
5. On voudrait maintenant vérifier que le point critique correspond bien au maximum de la fonction f.
a. Pour y fixé (entre 0 et 1), trouver la valeur de x pour laquelle $f(x,y)$ est maximale. On note $m(y)$ la valeur de f au point correspondant.
b. Trouver la valeur maximale de $m(y)$ pour y variant entre 0 et 1.
c. Conclure.

[1] À quoi correspondent les valeurs de a et b extérieures au domaine de définition ?