M101 : Calculus
Université Paris XI Orsay

Notes de cours

JC Léger, F. Menous

22 septembre 2009

Table des matières

M101 : Un bref aperçu du programme

Ce semestre nous allons étudier divers aspects de la théorie élémentaire des fonctions d'une ou de deux variables réelles à valeurs réelles ou vectorielles.

En ce qui concerne les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles, vous avez déjà travaillé un certain nombre de points au lycée. Nous allons revenir sur beaucoup de ces points en les approfondissant et en introduisant de nouvelles techniques de calcul. Nous supposons que vous avez une certaine familiarité avec ce que vous êtes censés avoir vu au lycée, par exemple la notion même de fonction, les notions de limite, de dérivée, d'intégrale, l'utilisation des fonctions trigonométriques, de la fonction logarithme népérien (ln) et de l'exponentielle.

Les vraies nouveautés de ce semestre se situent

- dans l'étude (succincte) des arcs paramétrés, qui ne sont autres que des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans le plan, ou, d'un autre point de vue, des couples de fonctions réelles d'une variable réelle,
- dans une introduction simple aux fonctions réelles de deux variables réelles.

Il est illusoire de pouvoir appréhender ces nouveautés sans une bonne maîtrise des techniques utilisées pour traiter des fonctions réelles d'une seule variable réelle.

Nous allons maintenant définir ces objets et essayer de donner un avant-goût de ce qui nous attend !

Le chapitre **??** de ce polycopié est une relecture des concepts et techniques sous l'angle de la modélisation, en particulier en physique. Il s'agit d'un angle de vue particulier permettant parfois d'occulter ou négliger certains détails mathématiques au bénéfice d'une plus grande liberté de parole. N'hésitez à vous y référer régulièrement.

0.1 Fonctions réelles d'une variable réelle

0.1.1 Qu'est-ce que c'est ?

Commençons par une définition informelle : nous avons à disposition deux ensembles de nombres réels, deux parties de $\mathbb{R}$, l'ensemble de tous les nombres réels, D et A. Une fonction, f, de D vers A est un « objet mathématique » qui, à tout nombre, tout élément de D associe ou fait correspondre un unique élément de A.

1. D est appelé l'**ensemble de départ**, la **source** ou le **domaine de définition** de la fonction f
2. A est appelé l'**ensemble d'arrivée** ou le **but** de la fonction f
3. Si x est un élément de D, on note $f(x)$ l'élément de A associé à x par la fonction f. Cet élément $f(x)$ est appelé l'**image** de x par f.
4. Si on écrit « Soit une fonction $f : D \to A$... », on entend par là « Considérons une fonction f, dont l'ensemble de départ est D et l'ensemble d'arrivée est A », et, à moins que ce ne soit précisé ultérieurement, cette fonction n'a aucune propriété particulière hormis le fait d'être un objet qui satisfait à notre définition informelle.

La fonction f est « de variable réelle » car le domaine dans lequel varie son argument, sa source, est une partie de $\mathbb{R}$. Elle est « à valeurs réelles » car son but est une partie de $\mathbb{R}$.

- Si on écrit « Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^2 - 1$ pour tout $x \in [0,1]$ », on considère un objet mathématique uniquement défini : **la** fonction f, dont l'ensemble de départ est l'intervalle $[0,1]$, l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ tout entier, qui associe à tout élément x de $[0,1]$ l'unique nombre réel calculé par la formule ci-avant.
- On doit souligner que si $f : D \to A$ est une fonction, si x est un nombre n'appartenant pas à D alors $f(x)$ n'est pas défini.
- Dans l'exemple précédent $f(2)$ n'a donc pas de sens même si $2 \times 2^2 - 1$ en a un.

0.1.2 Graphes

Plaçons-nous dans le contexte précédent. Soit $f : D \to A$ une fonction réelle de variable réelle. Son graphe est la partie G de l'ensemble-produit[1] $D \times A$ définie par

$$G = \{(x, f(x)), x \in D\} = \{(x,y) \in D \times A,\ y = f(x)\}$$

G est donc l'ensemble de **tous** les couples possibles formés d'une valeur x prise dans D et de son image $f(x)$.

G est une partie de l'ensemble $D \times A$ qui est lui-même une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. On représente graphiquement (une partie de) $\mathbb{R}^2$ sur une feuille quadrillée de la façon que vous connaissez bien : le couple de réels (x,y) est représenté par le point de coordonnées (x,y) relativement au quadrillage.

L'usage veut que l'axe des abscisses (coordonnée x) soit représenté horizontalement, orienté de la gauche vers la droite et que l'axe des ordonnées (coordonnée y) soit représenté verticalement, orienté du bas vers le haut. Certaines situations peuvent forcer à adopter d'autres conventions.

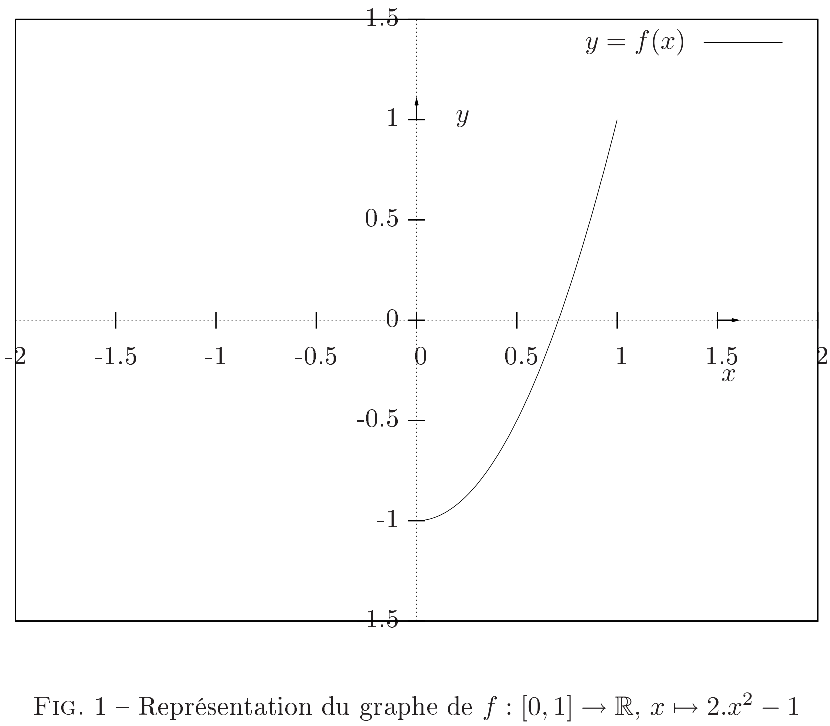

Fig. 1 – Représentation du graphe de $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2.x^2 - 1$

En retournant notre manche, on peut maintenant préciser l'« objet mathématique[2] » dont nous

[1] $D \times A$ est l'ensemble de tous les couples (x,y) pouvant être formés avec une valeur x dans D et une valeur y dans A.

[2] Assez curieusement, quasiment tous les objets mathématiques peuvent être vus comme des ensembles, y compris les nombres...

parlions dans la définition informelle de fonction.

Définition 1 *Soient D et A deux parties de $\mathbb{R}$, une fonction f de D vers A est une partie G de $D \times A$ ayant la propriété suivante :*

$$\textit{Pour tout } x \in D, \textit{ il existe un unique } y \in A \textit{ tel que } (x, y) \in G.$$

L'astuce réside en ceci, qu'étant donnée une telle partie G, on peut définir, pour $x \in D$, $f(x)$ comme étant l'unique $y \in A$ tel que $(x, y) \in G$. On a alors défini sans ambiguïté une fonction $f : D \to A$. Il s'avère a posteriori que G est le graphe de f.

Ce que dit la définition, c'est très exactement qu'une fonction f, c'est son graphe. L'usage montre cependant qu'utiliser le graphe de la fonction est assez malcommode alors que la notation $f(x)$ est très parlante.

Si je ne me trompe pas, dans tout ce cours, cette définition très formelle pour définir une fonction ne sera utilisée qu'une fois[3].

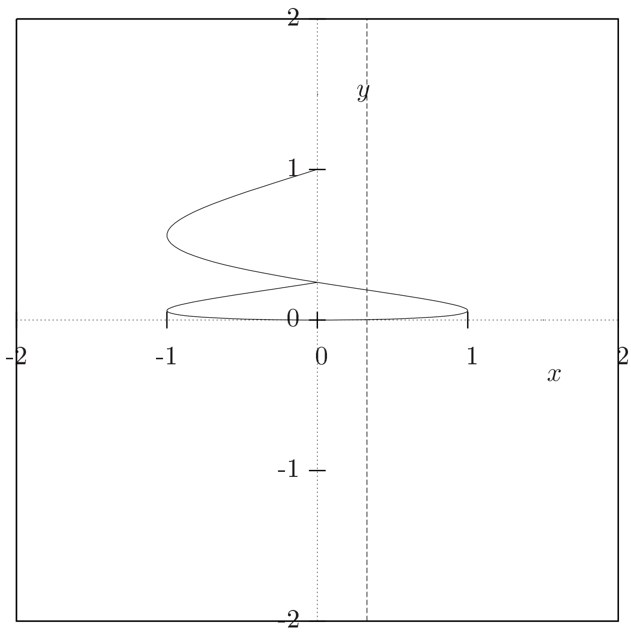

FIG. 2 – Ceci n'est pas le graphe d'une fonction $y = f(x)$: certaines verticales coupent l'ensemble en plus de deux points

0.1.3 Composition

L'opération la plus importante que l'on puisse réaliser avec deux fonctions est leur composition : On dispose de deux fonctions $f : A \to B$ et $g : C \to D$.

Si pour tout élément x de A, $f(x)$ (qui est élément de B a coup sûr) appartient à C, on peut alors calculer $g(f(x))$. On peut donc associer à tout $x \in A$, $g(f(x)) \in D$ et donc définir une nouvelle fonction, notée $g \circ f$, dont la source est A et le but est D.

En résumé, si $f : A \to B$ et $g : C \to D$ sont deux fonctions, la composée $g \circ f : A \to D$ est définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A$$

[3]lors de la définition de la réciproque

Cette définition n'a de sens que si $f(x) \in C$, la source de g, pour tout $x \in A$, la source de f.

Dès que l'on écrit une formule imbriquant des fonctions élémentaires, on est en train de faire un certain nombre de compositions.

0.1.4 Définir une fonction par des formules – domaine de définition

La façon la plus usuelle de définir une fonction d'une variable, disons x, est d'utiliser un dictionnaire de fonctions élémentaires (exp, ln, cos, etc.), les opérations usuelles de l'arithmétique, et de combiner tout ceci en une *formule* comportant la variable x et pouvant être calculée pour certaines valeurs de cette variable.

Exemples et Remarques

1. La locution

   Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \exp(x^2 + 3)$ pour tout $x \in [-1, 1]$

   définit parfaitement la fonction f. On a $f(0) = e^3$, $f(1) = e^4$, etc. Par contre $f(2)$ n'est pas défini même si la formule définissant f a un sens lorsque $x = 2$: on a imposé que le domaine de définition de f soit l'intervalle $[-1, 1]$.

   La formule doit, d'une part, être syntaxiquement correcte et d'autre part, on doit être en mesure d'identifier les valeurs de la variable x pour lesquelles le calcul ne peut aboutir. Les raisons pour lesquelles ce calcul ne peut aboutir sont par exemple, une division par 0, la prise du logarithme d'un nombre négatif.

2. C'est ce type de problème qui nous a amenés, plus haut, à donner une condition sur les fonctions $f : A \to B$ et $g : C \to D$ pour que la composée $g \circ f$ soit bien définie sur tout A.

   Déterminer l'ensemble de définition d'une telle formule, c'est identifier les valeurs de la variable x pour lesquelles le calcul aboutira. C'est aussi, en un certain sens, identifier le domaine source de la fonction que nous sommes en train de définir.

   Ce type de question mène souvent à la résolution, en cascade, d'une suite d'équations et/ou d'inéquations en se basant sur le principe que $f(g(x))$ n'est défini pour une certaine valeur de x qu'à partir du moment où, à la fois, $y = g(x)$ est bien défini et $f(y)$ est bien défini.

3. On veut définir une fonction g à valeurs réelles sur un certain domaine D de $\mathbb{R}$ par la formule

   $$g(t) = \sqrt{-\ln(t^2 - 1)}, \text{ pour tout } t \in D$$

   La question pertinente est « Quel est le plus grand domaine D possible sur lequel on peut définir cette fonction g ? »

   Pour que $g(t)$ soit défini, il faut (et il suffit) que

   $$\left\{ \text{et} \begin{array}{ll} \text{(a)} & t^2 - 1 > 0 \text{ car le domaine de définition de ln est }]0, +\infty[. \\ \text{(b)} & -\ln(t^2 - 1) \geq 0 \text{ car le domaine de définition de } \sqrt{} \text{ est } [0, +\infty[. \end{array} \right.$$

   On tombe donc sur un système d'inéquations d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ qu'il faut résoudre. Ce système est équivalent à

   $$\left\{ \text{et} \begin{array}{ll} \text{(a)} & t > 1 \text{ ou } t < -1 \\ \text{(b)} & t^2 - 1 \leq 1 \text{ car } \ln X \leq 0 \text{ si et seulement si } X \leq 1 \end{array} \right.$$

   c'est-à-dire

   $$\left\{ \text{et} \begin{array}{ll} \text{(a)} & t > 1 \text{ ou } t < -1 \\ \text{(b)} & -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \end{array} \right.$$

   Pour résumer, on a donc $D = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.

4. On peut utiliser des définitions par morceaux. On pose la même question que précédemment en voulant définir g sur un domaine D de $\mathbb{R}$ par la formule, pour tout $t \in D$,

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{-\ln(t^2-1)} & \text{si } t > 0 \\ \tan t & \text{si } t \in \left]-\pi, 0\right[\end{cases}$$

Pour que $g(t)$ soit défini, il faut (et il suffit) que

$$\left\{ \text{et} \begin{array}{l} \text{(a) soit } t > 0 \text{ et } \sqrt{-\ln(t^2-1)} \text{ est bien défini} \\ \text{(b) soit } t \in \left]-\pi, 0\right[\text{ et } \tan t \text{ est bien défini} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \text{et} \begin{array}{l} \text{(a) soit } t > 0 \text{ et } t \in \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right] \text{ (on se sert ici de l'exemple précédent)} \\ \text{(b) Soit } t \in \left]-\pi, 0\right[\text{ et } t \neq -\dfrac{\pi}{2} \text{ (quel est le domaine de définition de la tangente ?)} \end{array} \right.$$

En résumé, le domaine D cherché est

$$D = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$$

0.2 Arcs paramétrés

0.2.1 Le plan, $\mathbb{R}^2$

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que le graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle se représente graphiquement dans le plan. Dans tout ce cours, le plan sera supposé rapporté à un repère (O, i, j), ce qui implique que chaque point est représenté par un couple (x, y) de coordonnées. De la sorte, le plan s'identifie à $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'ensemble des couples de nombres réels et, pour simplifier l'exposé, un point M du plan sera pour nous un couple (x, y) de nombres réels.

Nous aurons aussi besoin de l'ensemble des **vecteurs du plan**, que l'on nomme le **plan vectoriel**. Chaque vecteur du plan est caractérisé par son couple de coordonnées dans la base (i, j) et, de même que précédemment, le plan vectoriel s'identifie à $\mathbb{R}^2$ par le biais des coordonnées dans la base (i, j).

$\mathbb{R}^2$ joue donc plusieurs rôles ; il représente à la fois le plan « des points » et le plan vectoriel : cette distinction peut paraitre subtile au premier abord, mais elle existe ne serait-ce que d'un point de vue physique : La position d'un mobile dans le plan n'a pas la même nature que sa vitesse, alors que ces deux caractéristiques peuvent chacune être codées par un couple de nombre réels.

0.2.2 Une définition

Définition 2 *Un* **arc paramétré** *(ou une* **courbe paramétrée***) est une fonction*[4] *continue*[5] *dont la source est un intervalle I de $\mathbb{R}$ et le but est une partie A du plan.*

Les arcs paramétrés sont principalement utilisés pour représenter les trajectoires de mobiles se déplaçant dans le plan. A un instant donné t, appartenant à l'intervalle de temps D, on associe le point $\gamma(t)$, position du mobile à l'instant t. L'arc paramétré décrit par le mobile est donc cette fonction γ.

La fonction γ est entièrement déterminée par deux fonctions réelles $x : D \to \mathbb{R}$ et $y : D \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in D$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

L'usage veut que, souvent,

[4] On reprend la définition d'une fonction donnée précédemment en oubliant le fait que source et but étaient des parties de $\mathbb{R}$.

[5] Ceci sera précisé plus tard

– l'argument d'un arc paramétrés soit noté par une lettre rappelant le temps : t, τ (« tau », le t grec), s, σ, (« sigma », le s grec), u, v, etc.
– Les fonctions coordonnées soient notées par des lettres rappelant leur position en tant que coordonnées : x, y, X, Y, etc.

0.2.3 Un exemple et une représentation graphique

On représente souvent un arc paramétré γ par le dessin que ferait un mobile traceur suivant cet arc. On dessine donc la « trajectoire » de ce mobile. On indique de plus les instants de passage en des points remarquables de la courbe ainsi obtenue.

La figure 3 représente la courbe paramétrée γ définie par

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),\ t \in \mathbb{R}.$$

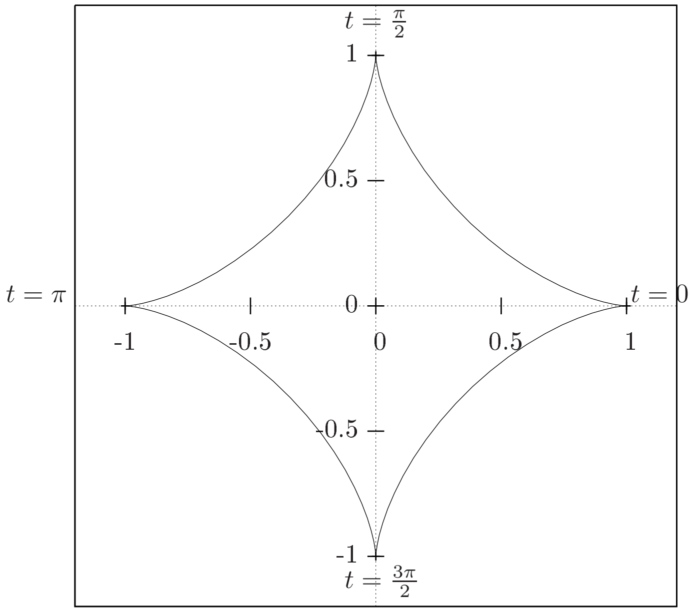

FIG. 3 – Une astroïde

0.2.4 Changer le temps – composition à droite

Soit D et Δ deux parties de $\mathbb{R}$, $\gamma : D \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, $f : \Delta \to D$, une fonction réelle de variable réelle.

On peut définir un nouvel arc paramétré $\widetilde{\gamma}$ dont la source est Δ par la formule

$$\widetilde{\gamma}(\tau) = \gamma(f(\tau)), \tau \in \Delta$$

Cela revient « à changer le chronomètre » du mobile parcourant la première trajectoire en posant $t = f(\tau)$. Le nouveau mobile ne parcourt a priori qu'une partie de la première trajectoire.

La figure 4 représente la courbe paramétrée $\widetilde{\gamma}$ définie par

$$\widetilde{\gamma}(s) = (\cos^3 \sin s, \sin^3 \sin s) = (\gamma \circ \sin)(s),\ s \in \mathbb{R}.$$

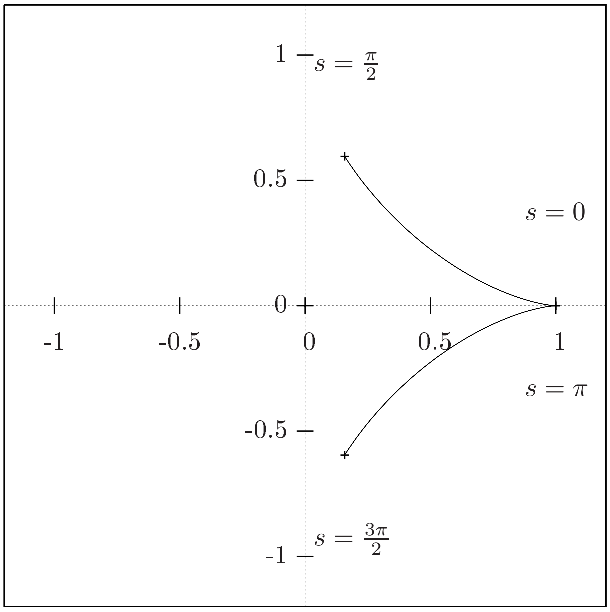

FIG. 4 – Un mobile se déplaçant sur l'astroïde

0.3 Fonctions réelles de deux variables réelles : exemples

Une fonction réelle de deux variables réelles, $f : D \to A$ associe à tout couple (x, y) de réels appartenant à une certaine partie D du plan un nombre réel appartenant à la partie A de $\mathbb{R}$.

0.3.1 Une formule et la détermination du domaine de définition.

Le même type de problèmes de définition qui se posaient en une variable se posent en deux variables. Donnons un exemple illustrant ce fait

On veut définir une fonction f de deux variables par la formule $f(x, y) = \sqrt{-\ln((x + 2y)^2 - 1)}$ sur un certain domaine D du plan, le plus grand possible. En reprenant le travail fait en une variable, il est clair que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y \in \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]\}$$

La représentation graphique de cet ensemble est la réunion de deux bandes obliques délimitées par les quatre droites d'équations $x + 2y = 1$, $x + 2y = \sqrt{2}$, $x + 2y = -1$ et $x + 2y = -\sqrt{2}$. Le lecteur est invité à faire la représentation graphique de cet ensemble.

0.3.2 Des représentations graphiques

Deux types de représentation graphiques sont d'usage courant pour les fonctions réelles de deux variables réelles.

1. la représentation en graphe : le graphe est une surface dans l'espace à trois dimensions : on représente le graphe de f, c'est-à-dire l'ensemble

$$G = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D\}$$

2. une représentation en lignes de niveau : on "colorie" un point du plan en fonction de la valeur de f en ce point.

Les figures 6 et 5 montrent ces deux types de représentations pour la fonction $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$. Ses lignes de niveau sont des cercles centrés en 0.

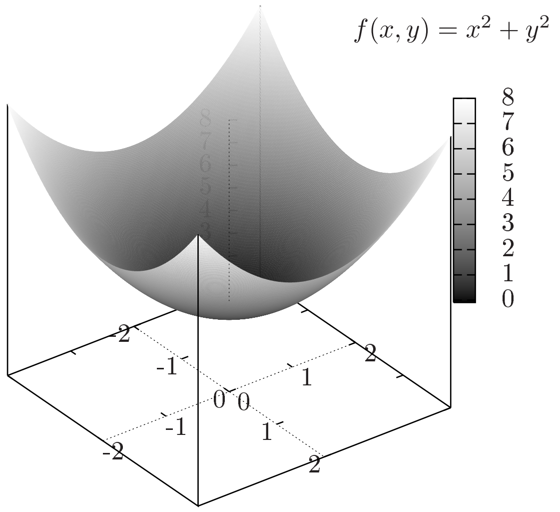

Fig. 5 – Graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2$

0.3.3 Se promener dans un paysage – composition à droite

Une carte de randonnée (cf les figures 7 et 8) sur laquelle sont représentées les lignes de niveau peut être comprise comme la représentation d'une certaine fonction f de deux variables réelles, qui à un point de coordonnées (x,y) sur la carte associe l'altitude du paysage à cet endroit.

Imaginons maintenant un promeneur muni d'un altimètre et d'un chronomètre. Son but est de tracer le graphique de la fonction h d'une variable (le temps), qui, à un instant associe l'altitude à laquelle il se trouve.

Si l'on connaît la trajectoire du promeneur, i.e. une courbe paramétrée $\gamma : T \to \mathbb{R}^2$ qui à chaque instant t de l'intervalle de temps T associe les coordonnées $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ du promeneur à cet instant t , on a alors, pour tout $t \in T$,

$$h(t) = f(\gamma(t))$$

En d'autres termes, $h = f \circ \gamma$. On a composé la fonction de deux variables f à droite par une fonction à valeurs dans le plan.

0.3.4 Les quatre opérations

Il s'agit des opérations que vous faites depuis longtemps sur les fonctions réelles d'UNE variable réelle : addition, multiplication, division de fonctions. Considérons le cas de la division qui présente de plus une difficulté de définition.

Posons $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $d(x,y) = x/y$. Si maintenant f et g sont deux fonctions de variables réelles sur une même source D, g ne s'annulant pas sur D, la fonction quotient f/g définie par $(f/g)(t) = f(t)/g(t)$ pour tout $t \in D$ est en fait la composée $d \circ \gamma$ de la fonction d, « de division », par l'arc paramétré γ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ défini par $\gamma(t) = (f(t), g(t))$.

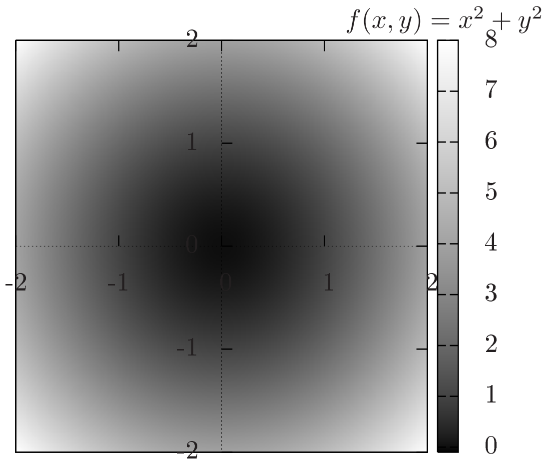

FIG. 6 – Lignes de niveau de $f(x,y) = x^2 + y^2$

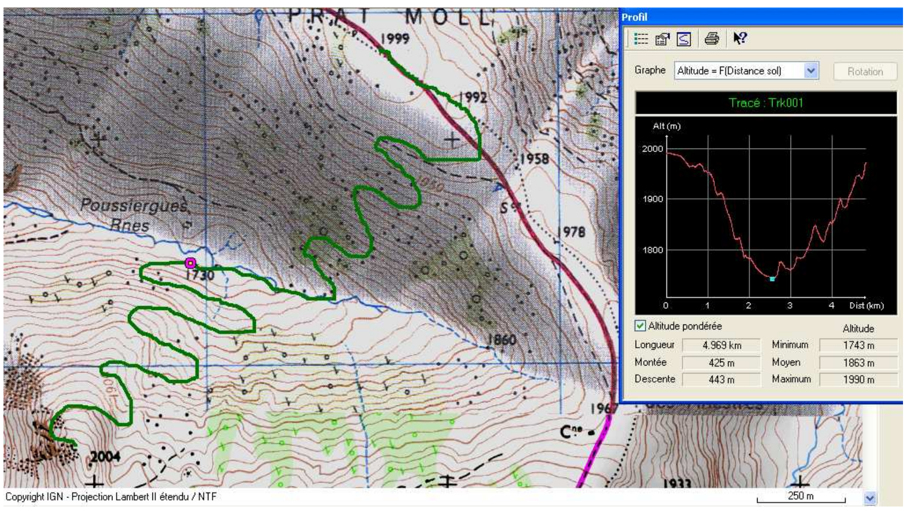

FIG. 7 – Des lignes de niveau, un parcours et l'altitude le long de ce parcours

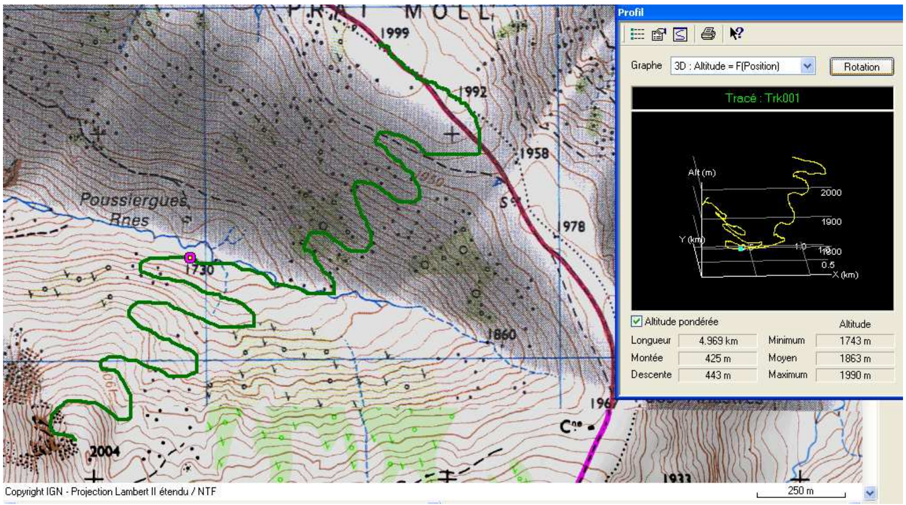

FIG. 8 – Le parcours tracé sur le graphe de la fonction

Le lecteur est invité à formuler la somme, le produit de deux fonctions réelles de variable réelle en ces termes.

Chapitre 1

Rappels et compléments sur les limites

La notion de limite est à la base de l'analyse. Nous allons rappeler les résultats vus en Première et Terminale et préciser quelques notions.

1.1 Limite finie d'une fonction en un point x_0 de $\mathbb{R}$

1.1.1 Voisinage

Définition 3 *Un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe un intervalle du type $]x_0 - h, x_0 + h[$, avec $h > 0$, contenu dans V.*

Exemples et Remarques

1. Un intervalle ouvert est voisinage de chacun de ses points
2. $]0, 1]$ est voisinage de tout $x_0 \in]0, 1[$. Il n'est pas voisinage de 1.
3. Soit $A = \mathbb{R}^*$. A est voisinage de x_0 si $x_0 \neq 0$. A n'est pas voisinage de 0.

Définition 4 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de variable réelle ($D \subset \mathbb{R}$). On dit que*

1. *f est définie dans un voisinage de x_0 si D est un voisinage de x_0. Dans ce cas, il existe donc $h > 0$ tel que $f(x)$ est défini pour tout x dans l'intervalle $]x_0 - h, x_0 + h[$.*
2. *f est définie dans un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 si il existe $h > 0$ tel que D contienne l'ensemble $]x_0 - h, x_0[\cup]x_0, x_0 + h[$. Dans ce cas, $D \cup \{x_0\}$ est voisinage de x_0.*

Exemples et Remarques

1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{x}$. f est définie dans un voisinage de 0, sauf en 0. f est définie au voisinage de tout $x_0 \neq 0$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \sqrt{x}$. La fonction g est définie au voisinage de tout $x_0 > 0$. Elle n'est pas définie au voisinage de 0. (Mais on dira qu'elle est définie dans un voisinage à droite de 0, cf. 1.2.6.)
3. Nous utiliserons parfois la tournure de phrase suivante : **pour tout x voisin de x_0,** $f(x) = g(x)$. Cela signifie qu'il existe un certain voisinage de x_0, que l'on ne prend pas la peine de nommer tel que pour tout x dans ce voisinage l'égalité $f(x) = g(x)$ a lieu. Cela implique en particulier que f et g sont définies au voisinage de x_0.

1.1.2 Définition

Définition 5 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. On dit que f admet la limite ℓ en x_0, ou que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 est ℓ si*

Pour tout voisinage V de ℓ,
il existe un voisinage U de x_0 tel que,
pour tout $x \in U \cap D$ avec $x \neq x_0$,
$f(x) \in V$.

On note ce fait $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$ ou

$$f(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$$

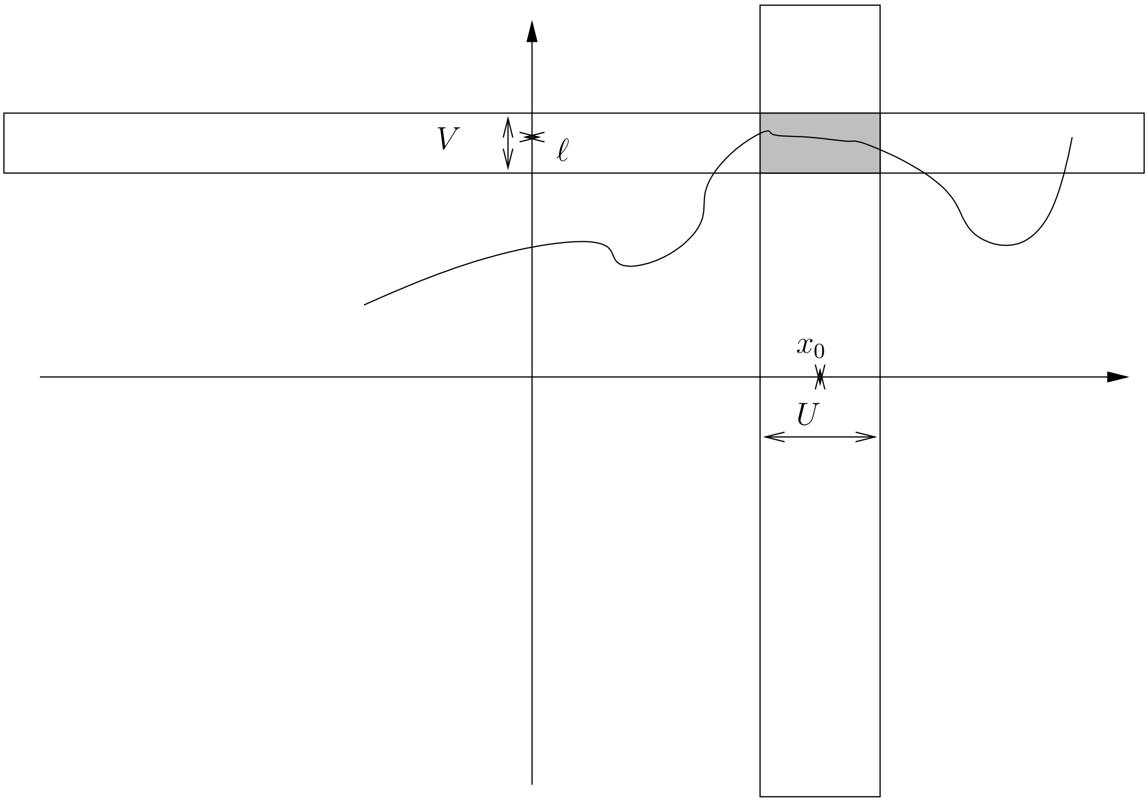

FIG. 1.1 – La définition de limite : à tout choix de V, correspond un voisinage U de x_0 tel que le graphe au dessus de U, à l'exception peut-être du point $(x_0, f(x_0))$, soit contenu dans le rectangle $U \times V$, grisé.

Exemples et Remarques

1. Même si f est définie en x_0, le fait que ℓ soit limite de f lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$ ne dépend que du comportement de $f(x)$ lorsque x est proche de x_0 en en étant distinct. Cela ne dépend pas de la valeur exacte de $f(x_0)$.
2. L'utilisation de l'article défini **la** dans la définition de la limite sera justifié par l'énoncé d'unicité sous réserve d'existence de la limite.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ si $x = 0$. On a alors

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0$$

4. Il y a plusieurs façons de caractériser le fait que f admette la limite ℓ en x_0. Voici une façon plus 'numérique' que la définition d'origine, de dire que f, définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0, admet 0 pour limite en 0.

   Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que
   pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, $x \neq 0$,
   $f(x)$ est défini et $f(x) \in]-\epsilon, +\epsilon[$.

Fonctions de références

Les fonctions suivantes sont des exemples fondamentaux de fonctions de limites nulle en 0. Leur étude sera faite au chapitre 7.

1. Soit $\alpha > 0$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = |x|^\alpha$ a pour limite 0 en 0.
2. La fonction $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x.(\ln |x|)$ a pour limite 0 en 0.
3. Soit $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. La fonction $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^\alpha.|\ln |x||^\beta$ a pour limite 0 en 0.

1.1.3 Suites

Proposition 6 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si pour* **toute** *suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans D, ne prenant pas la valeur x_0 mais convergeant vers x_0, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $v_n = f(u_n)$, converge vers ℓ.*

Exemples et Remarques La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0. D'après la proposition précédente, pour démontrer cela, il suffit de trouver deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, convergeant vers 0 et telles que $f(u_n)$ et $f(u'_n)$ convergent vers deux limites différentes.

C'est ce que l'on obtient en posant $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ et $u'_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ comme le suggère l'examen du graphe de la fonction f. (Ce sont les abscisses des points du graphe dont l'ordonnée vaut 1 ou -1.)

1.1.4 DL à l'ordre 0

Proposition 7 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si, il existe une fonction ϵ, définie au voisinage de 0, $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ telle que*

$$\textit{Pour tout } x \textit{ voisin de } x_0,\ x \neq x_0,\ f(x) = \ell + \epsilon(x - x_0)$$

Le fait d'écrire, pour x voisin de x_0, que $f(x) = \ell + \epsilon(x - x_0)$ s'appelle effectuer un Développement Limité de f à l'ordre 0 en x_0.

Nous verrons, au chapitre 6, ce qu'est un DL de f en x_0 à un certain ordre $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Propriétés

1.2.1 Unicité

Proposition 8 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. Si*

$$f(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\to} \ell \textit{ et } f(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\to} \ell'$$

alors

$$\ell = \ell'$$

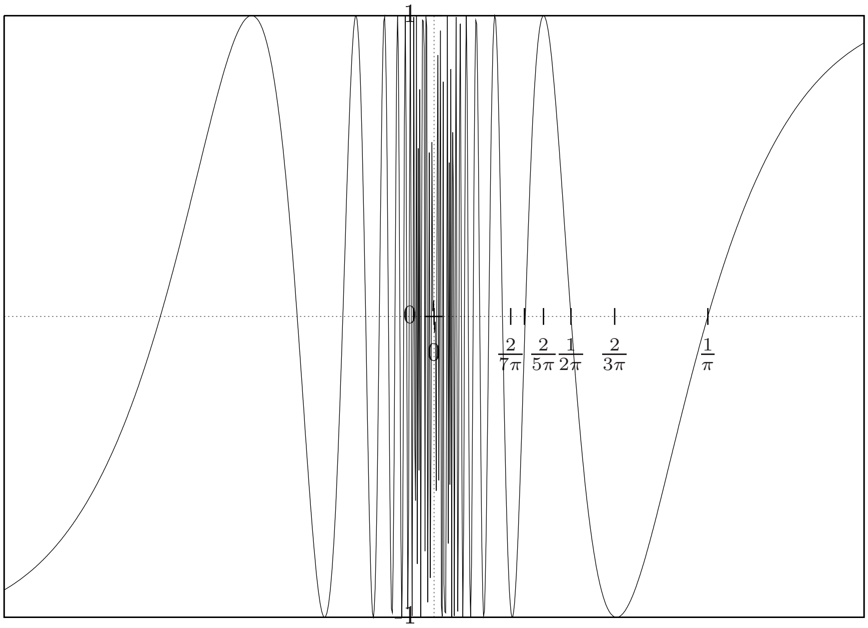

FIG. 1.2 – Une partie du graphe de $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

Preuve. Supposons que $\ell \neq \ell'$, on peut alors trouver V et V' des voisinages respectivement de ℓ et ℓ' tels que V et V' sont deux parties disjointes.

De la définition de $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$, on tire l'existence d'un voisinage U de x_0 tel que si $x \in U$, $x \neq x_0$, alors $f(x) \in V$ et, de même, de la définition de $f(x) \to \ell'$ lorsque $x \to x_0$, on tire l'existence d'un voisinage U' de x_0 tel que si $x \in U'$, $x \neq x_0$, alors $f(x) \in V'$.

La contradiction provient du fait qu'il existe au moins un point $x_1 \neq x_0$ appartenant à la fois à U et U'. Son image $f(x_1)$ est donc à la fois dans V et V', ce qui est impossible. $\diamond$

1.2.2 Théorème des gendarmes

Proposition 9 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f, g, et h trois fonctions à valeurs réelles définies sur un voisinage U de x_0, sauf peut-être en x_0 telles que*

$$\textit{Pour tout } x \in U,\ x \neq x_0,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Alors

1. *La preuve de 1. est basée sur le même raisonnement que la preuve d'unicité. Si on suppose que $m < \ell$, on peut montrer que pour x dans un certain voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0, $f(x) > g(x)$, ce qui apporte une contradiction.*
2. *Si f, g, h ont pour limites respectives ℓ, m, n en x_0, on a*

$$\ell \leq m \leq n$$

3. *Si f et h ont même limite ℓ en x_0, g admet ℓ comme limite en x_0.*

Exemples et Remarques

1. Cette proposition fournit la **méthode** fondamentale pour montrer que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to x_0, x \neq x_0$. Il suffit de trouver une majoration du type

$$|f(x_0 + h) - \ell| \leq \epsilon(h)$$

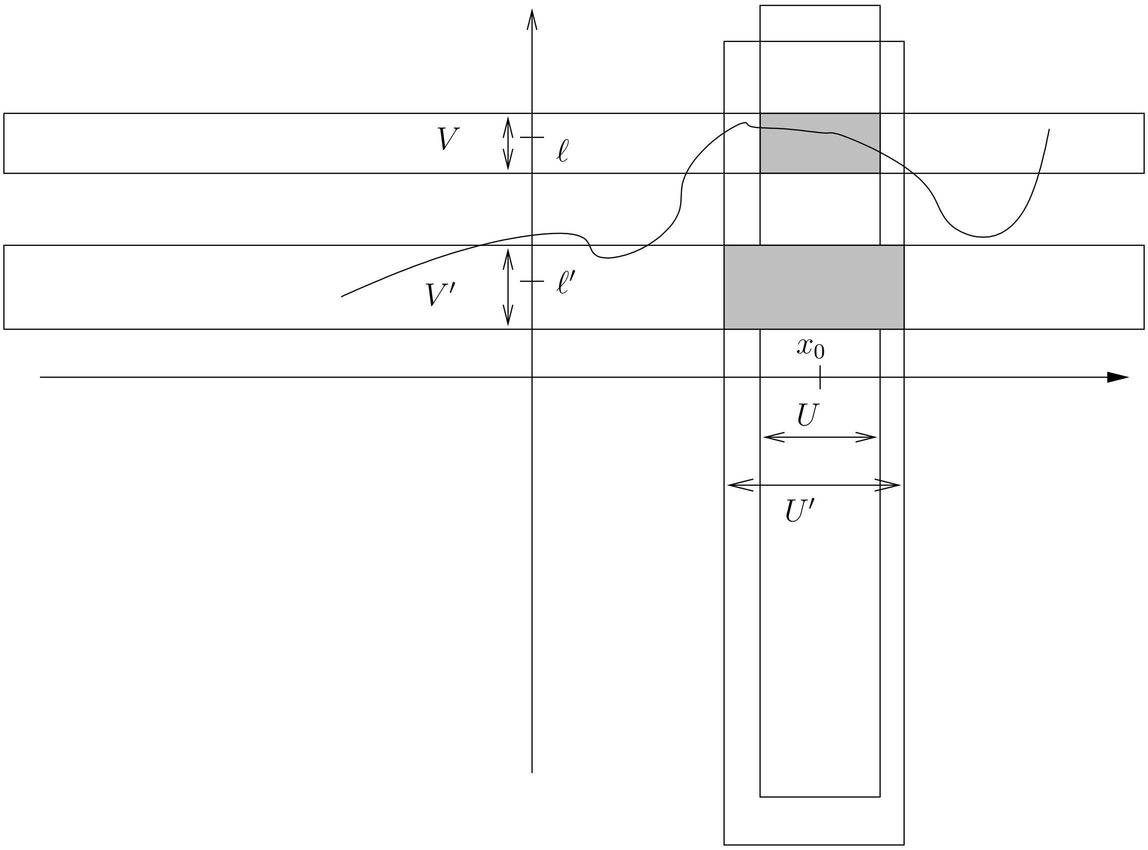

Fig. 1.3 – S'il n'y avait pas unicité, le graphe devrait être simultanément à l'intérieur des deux zones grisées $U \times V$ et $U' \times V'$ qui sont disjointes.

pour h voisin de 0 où ϵ est une fonction de limite 0 en 0. On peut en général prendre une telle fonction ϵ dans une liste de fonctions de référence : par exemple $\epsilon(h) = C|h|^\alpha$ avec $\alpha > 0$, C une constante positive.

2. Par exemple, montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x + 3$ a pour limite $f(1) = 6$ en $x_0 = 1$. On a
$$\begin{aligned} f(1+h) - f(1) &= (1+h)^2 + 2(1+h) - 1^2 - 2 \\ &= h(2+h) + 2.h = h(4+h) \end{aligned}$$
On travaille pour h voisin de 0, on peut donc supposer que $|h| \leq 1$. On a donc, pour ces h,
$$|f(1+h) - f(1)| \leq 5|h|$$
Comme l'expression à droite de cette inégalité définit une fonction $\epsilon(h)$ de limite 0 en 0, on a donc démontré que
$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

1.2.3 Quelques résultats utiles

f bornée localement

Proposition 10 *Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 alors f est bornée sur un voisinage de x_0 (x_0 exclus).*

Il suffit pour cela de considérer le voisinage $V =]\ell - 1, \ell + 1[$ de ℓ et d'appliquer la définition de limite.

Positivité sur un voisinage

Proposition 11 *Si f admet une limite $\ell > 0$ en x_0 alors $f(x) > \frac{1}{2}\ell > 0$ pour tout $x \neq x_0$ dans un certain voisinage de x_0.*

Il suffit pour cela de considérer le voisinage $V =]\ell/2, 3\ell/2[$ de ℓ et d'appliquer la définition de limite.

1.2.4 Opérations sur les limites

En général, on connaît un certain nombre de limites de fonctions « simples » : polynômes, exponentielles, etc... et, comme les fonctions que nous étudions sont pour la plupart obtenues grâce à des sommes, produits, quotients, etc... de ces fonctions simples, on veut pouvoir calculer des limites grâce à des moyens « opératoires ».

Dans tous les énoncés suivants, que nous admettons, f, g sont des fonctions définies au voisinage du point x_0, sauf peut-être en x_0.

Somme

Si
$$f(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\to} \ell \text{ et } g(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\to} m$$
alors
$$(f+g)(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\to} \ell + m$$

Produit

Si
$$f(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\to} \ell \text{ et } g(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\to} m$$
alors
$$(f.g)(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\to} \ell.m$$

Quotient

Si
$$f(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \text{ et } g(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\longrightarrow} m$$
et $m \neq 0$ alors, la fonction f/g est définie sur un certain voisinage de x_0, sauf, peut-être en x_0 et l'on a
$$(f/g)(x) \overset{x\neq x_0, x\to x_0}{\longrightarrow} \ell/m$$

1.2.5 Composition

Continuité en x_0

Définition 12 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage de x_0. On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = f(x_0)$.*

Composition

Proposition 13 *Soient f, g deux fonctions réelles d'une variable réelle, x_0, y_0 deux réels.*

1. *Si f est définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 et $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = y_0$,*
2. *si g est définie sur un voisinage de y_0 et est continue en y_0,*

alors $g \circ f$ est définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 et
$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} (g \circ f)(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} g(f(x)) = g(y_0)$$

Nous démontrons ce résultat dans le cas de fonctions de limite nulle en 0 pour illustrer la force de la définition de limite. Nous reviendrons sur ce cas dans le chapitre sur la continuité.

Preuve. Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de 0, de limite 0 en 0 et $g(0) = 0$. On considère $h = g \circ f$.

- La première question concerne la bonne définition de h au voisinage de 0, sauf peut-être en 0.
  g est définie sur un voisinage V_0 de 0 et, comme f a pour limite 0 en 0, il existe donc un voisinage U_0 de 0 tel que pour tout $x \in U_0$, $x \neq 0$, $f(x) \in V_0$. Pour de tels x, $h(x) := g(f(x))$ est donc bien défini. Ce qui montre que h est définie sur U_0, voisinage de 0, sauf, peut-être, en 0.
- Le même type de raisonnement nous donne la limite cherchée. Soit W un voisinage de 0, comme g est continue en 0, il existe un voisinage V de 0 tel que pour tout $y \in V$, $g(y) \in W$. Comme la limite de f en 0 est 0, il existe donc un voisinage U de 0 tel que pour tout $x \in U$, $x \neq 0$, $y = f(x) \in V$. Pour de tels x, $h(x) := g(f(x)) = g(y) \in W$.
- Conclusion : Étant donné W voisinage de 0, on a donc trouvé un voisinage U de 0 tel que pour tout $x \in U$, $x \neq 0$, $h(x) := g(f(x))$ est dans W : c'est exactement la définition du fait que la limite de $h(x)$ lorsque $x \to 0$ est 0.

$\diamond$

Exemples et Remarques Cette proposition de composition, basée sur la continuité est celle que l'on trouve le plus souvent dans les livres. Voici une variante en un sens plus naturelle.

Définition 14 *On suppose que f est définie sur un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 et que y_0 est un réel. On dit que*

$f(x)$ tend vers y_0 et $f(x) \neq y_0$ lorsque x tend vers x_0 et $x \neq x_0$ si

1. *$f(x)$ tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 et $x \neq x_0$*
2. *$f(x) \neq y_0$ pour x suffisamment voisin de x_0, $x \neq x_0$.*

On a alors la proposition

Proposition 15 *Soient f, g deux fonctions réelles d'une variable réelle, x_0, y_0 et z_0 trois réels.*

1. *Si $f(x) \to y_0$ et $f(x) \neq y_0$ lorsque $x \to x_0$ et $x \neq x_0$*
2. *Si $g(y) \to z_0$ lorsque $y \to y_0$ et $y \neq y_0$*

alors $g(f(x)) \to z_0$ lorsque $x \to x_0$ et $x \neq x_0$.

Cela revient, dans la pratique courante, à effectuer un **changement de variable**, $y = f(x)$.
Exercice résolu. On rappelle que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. En déduire, en utilisant les formules trigonométriques d'angle double et les règles opératoires sur les limites que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

1.2.6 Limites à droite et à gauche en x_0

La définition de limite s'applique lorsqu'on travaille sur une fonction f définie sur un voisinage du point d'intérêt, x_0 et que l'on s'intéresse à la fois à ce qui se passe à droite et à gauche de ce point.
Exemples et Remarques

1. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{x}{|x|}$ n'a pas de limite en 0 mais exhibe une certaine régularité séparément à droite et à gauche de 0.
2. $g :]-3, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \sqrt{3+x}$ n'est définie qu'à droite de -3 mais $g(x)$ a un comportement régulier lorsque x s'approche de -3 par la droite.

Définition 16 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $D \cup \{x_0\}$ est voisinage* **à droite** *de x_0, i.e contient un intervalle du type $[x_0, x_0 + h[$ pour un certain $h > 0$, on dit que f admet ℓ comme limite à droite en x_0 si*

   Pour tout voisinage V de ℓ,
   il existe un voisinage U de x_0 tel que
   pour tout $x \in U \cap D$, $x > x_0$,
   $f(x) \in V$.

   On note ceci, $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ ou

   $$f(x) \overset{x>x_0, x\to x_0}{\to} \ell$$

2. *On a une définition similaire pour la limite à gauche, que l'on note $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ o*

   $$f(x) \overset{x<x_0, x\to x_0}{\to} \ell$$

Concernant les opérations et les limites à droite, les résultats vus précédemment restent valables en remplaçant systématiquement $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}}$ par $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}}$. Il en est de même pour les limites à gauche.

Cette notion peut-être utile lorsqu'il s'agit de traiter le cas d'une fonction définie par une alternative du fait du résultat suivant

Proposition 17 *Soit f une fonction réelle de variable réelle définie sur un voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut-être en x_0. Sont équivalentes les propositions suivantes*

1. *ℓ est limite de $f(x)$ lorsque $x \to x_0$, $x \neq x_0$*
2. *ℓ est limite à droite de $f(x)$ lorsque $x \to x_0$ et ℓ est limite à gauche de $f(x)$ lorsque $x \to x_0$.*

1.3 Limites en $+\infty$, en $-\infty$ et limites infinies

1.3.1 Voisinages de l'infini

Définition 18 *Soit V une partie de $\mathbb{R}$, on dit que*

1. *V est un voisinage de $+\infty$ si V contient un intervalle du type $]A, +\infty[$, pour un certain $A \in \mathbb{R}$.*
2. *V est un voisinage de $-\infty$ si V contient un intervalle du type $]-\infty, A[$, pour un certain $A \in \mathbb{R}$.*

De la même façon qu'auparavant, $f : D \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si D est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)

1.3.2 Définition

Définition 19 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$, ℓ un réel. On dit que la limite f en $+\infty$ est ℓ si*

Pour tout voisinage V de ℓ,
il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que,
pour tout x,
si $x \in U \cap D$, $f(x) \in V$.

On note ceci par $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$.

Exemples et Remarques

1. On a évidemment une définition analogue pour la situation en $-\infty$.
2. On a encore unicité de la limite, sous réserve d'existence.
3. La définition de $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ s'écrit donc, au cas où f est définie sur un voisinage de $+\infty$,

$$\text{Pour tout } \epsilon > 0, \text{ il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } x \in]A, +\infty[, \ |f(x)| < \epsilon.$$

4. Sont équivalentes les assertions suivantes
   (a) $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$
   (b) Caractérisation séquentielle de la limite. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, tendant vers $+\infty$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = f(u_n), n \in \mathbb{N}$, est convergente vers ℓ.
   (c) Développement asymptotique d'ordre 0. Il existe une fonction ϵ, de limite 0 en 0, telle que, pour tout x voisin de $+\infty$, on a

$$f(x) = \ell + \epsilon(\frac{1}{x})$$

Fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont des exemples fondamentaux de fonctions de limites nulle en $+\infty$. Leur étude sera faite au chapitre 7.

1. Soit $\alpha > 0$, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha} = |x|^{-\alpha}$ a pour limite 0 en $\pm\infty$.
2. Soit $\alpha > 0$, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln|x|}{|x|^\alpha} = |x|^{-\alpha}\ln|x|$ a pour limite 0 en $\pm\infty$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^\alpha e^{-|x|^\beta}$ a pour limite 0 en $\pm\infty$.

1.3.3 Opérations

Concernant les opérations et les limites en $+\infty$, les résultats vus sur les limites usuelles restent valables en remplaçant systématiquement $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}$ par $\lim_{x\to+\infty}$.

1.3.4 Limites infinies

Il s'agit, dans ce paragraphe, d'exprimer le fait que la limite d'une fonction en un point x_0, à gauche où à droite ou en $\pm\infty$ puisse être l'un des deux infinis.

Nous ne donnons que l'une des définitions, le schéma général de telles définitions devant être maintenant familier :

Définition 20 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0, on dit que f admet $+\infty$ comme limite en x_0 si*

Pour tout voisinage V de $+\infty$,
il existe un voisinage U de x_0 tel que
pour tout $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$,
$f(x) \in V$.

Fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont des exemples fondamentaux de fonctions de limites infinies. Les exemples ci-dessous relèvent de ce que l'on appelle les « croissances comparées », du logarithme, de l'exponentielle et des fonctions puissances, voir la partie 7.4.2 du chapitre 7 pour des justifications de ceci.

1. Soit $\alpha > 0$, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x|^\alpha} = |x|^{-\alpha}$ a pour limite $+\infty$ en 0.
2. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour limite $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en 0^-.
3. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln|x|$ a pour limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $\pm\infty$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^\alpha e^{+|x|^\beta}$ a pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$.

Exemples et Remarques Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on dit que f admet une **branche infinie** qu'on peut étudier plus avant (recherche de droites asymptotes, position de la courbe relativement à cette asymptote). Nous étudierons ceci plus en détail dans le chapitre sur les développements limités.

Proposition 21 (Composition et limites infinies) *Si $\lim_{y\to+\infty} g(y) = \ell$ où ℓ est soit un nombre, soit l'un des symboles $-\infty$ ou $+\infty$, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$$

.

Exemples et Remarques

1. On a le même type d'énoncé avec $g(y) \to \ell$ lorsque $y \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to x_0$.
2. On peut remplacer les « $x \to x_0$ » par des limites lorsque $x \to \pm\infty$ ou lorsque $x \to x_0^{\pm}$.
3. La preuve de cette proposition est sur le même canevas que la preuve de la composition pour les limites finies, proposition 13.

1.3.5 Quelques remarques finales concernant les opérations

On a vu les règles opératoires concernant les limites finies et leur comportement vis à vis des opérations. Quand l'une des limites est infinie ou quand on ne tombe pas dans l'un des cas décrit, on tombe sur ce que l'on appelle **une forme indéterminée**. Il s'agit alors de travailler un peu plus pour « lever » cette indétermination.

Quelques exemples de formes indéterminées (lorsque $x \to x_0$) :

1. $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to -\infty$, $f(x) + g(x) \to ??$
2. $f(x) \to \pm\infty$, $g(x) \to \pm\infty$, $f(x) + g(x) \to ??$, $f(x)/g(x) \to ??$
3. $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, $f(x)/g(x) \to ??$
4. $f(x) \to 0$, $g(x) \to +\infty$, $f(x).g(x) \to ??$

Il y a par contre un certain nombre de règles combinant limites finies et infinies qui sont à connaître

1. $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$, $f(x) + g(x) \to +\infty$, $f(x).g(x) \to +\infty$
2. $f(x) \to -\infty$, $g(x) \to -\infty$, $f(x) + g(x) \to -\infty$, $f(x).g(x) \to +\infty$
3. $f(x) \to \ell$, $g(x) \to +\infty$, $f(x) + g(x) \to +\infty$,
   (a) Si $\ell > 0$, $f(x).g(x) \to +\infty$,
   (b) si $\ell < 0$, $f(x).g(x) \to -\infty$,
   (c) si $\ell = 0$, indétermination.
4. $f(x) \to \ell$, $g(x) \to \pm\infty$, $f(x)/g(x) \to 0$
5. $f(x) \to \ell > 0$, $g(x) \to 0^+$ (cela signifie que g reste positive au voisinage du point considéré), $f(x)/g(x) \to +\infty$

Voici, sur un certain nombre d'exemples et de techniques pour lever ces indéterminations

1. $0/0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, c'est à connaître et une preuve de ceci ne peut reposer que sur la définition même de la fonction sinus.
2. $+\infty/+\infty$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2-3x+2}{3x^2+5} = \frac{7}{3}$. Ici numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$ (pourquoi est-ce vrai du numérateur ?). La technique consiste à factoriser en haut et en bas la plus grande puissance, qui est le terme dominant lorsque $x \to \infty$ dans une expression polynomiale. On a donc, pour x assez grand,
$$\frac{7x^2 - 3x + 2}{3x^2 + 5} = \frac{x^2}{x^2} . \frac{7 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{5}{x^2}}$$
   Les règles opératoires indiquent qu'alors la deuxième fraction tend vers $\frac{7}{3}$.
3. $+\infty - \infty$. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \frac{1}{2}$ (expression conjuguée, puis technique précédente)
4. $0 \times \infty$. $(3x^2 - x + 2) \sin \frac{1}{x^2} \to 3$ lorsque $x \to +\infty$
5. Les techniques de développements limités du chapitre 6 seront fondamentales pour la levée des indéterminations.

Chapitre 2

Continuité

2.1 Fonction continue en x_0

2.1.1 Définition

Définition 22 *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ (et donc y compris en x_0). On dit que f est continue en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

On a la caractérisation séquentielle de la continuité en x_0.

Proposition 23 *$f : D \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in D$ si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans D, convergeant vers x_0, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$.*

Exemples et Remarques

1. De ce qui a été dit sur les limites, on a par exemple que toute fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Les fonctions ln, exp, $x \mapsto |x|^\alpha$, les fonctions trigonométriques usuelles sont continues en tout point de leurs ensembles de définitions respectifs.

2.1.2 Prolongement par continuité

Lorsque la fonction f n'est pas définie en x_0, on ne peut donc pas parler de continuité de f en x_0. Cependant, par un mécanisme de prolongement, on peut parfois obtenir une « variante » de f, une **extension** de f, qui est continue en x_0.

Proposition 24 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin D$ tel que $D \cup \{x_0\}$ soit voisinage de x_0. Sont équivalentes les assertions suivantes*

1. *Il existe une fonction $g : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$, continue en x_0, égale à f sur D*
2. *$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ existe.*

Dans ce cas, la fonction g est unique, elle est définie par

$$g(x) = f(x), \text{ si } x \in D,\ g(x_0) = \ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

g est appelée le **prolongement par continuité** *de f au point x_0.*

Exemples et Remarques

1. La fonction « sinus cardinal », utile en traitement du signal, est définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, $\mathrm{sinc}(0) = 1$. Il s'agit du **prolongment par continuité en** 0 de la fonction définie par $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \frac{\sin x}{x}$.
2. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 car $f(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$, $x \neq 0$.

2.1.3 Continuité à droite et à gauche en x_0

Définition 25 *Soit f une fonction définie au voisinage à droite d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ (et donc y compris en x_0). On dit que f est* **continue à droite** *en x_0 si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

On a une définition semblable concernant la continuité à gauche.

Exemples et Remarques

1. Soit H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = 1$ si $x \geq 0$, $H(x) = 0$ si $x < 0$. H est continue à droite, elle n'est pas continue à gauche.
2. Soit $\widetilde{H}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\widetilde{H}(x) = 1$ si $x > 0$, $\widetilde{H}(x) = 0$ si $x \leq 0$. $\widetilde{H}$ est continue à gauche, elle n'est pas continue à droite.

Proposition 26 *Une fonction est continue en un point x_0 si et seulement elle y est continue à gauche et à droite.*

Exercice résolu. Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel a, la continuité en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indication: La limite à gauche en 0 de cette fonction est $\frac{1}{2}$, sa limite à droite y est a, qui est par ailleurs sa valeur en 0, f est donc continue en 0 si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

2.1.4 Quelques théorèmes utiles

On peut reformuler pour les fonctions continues en un point x_0, les résultats énoncés lors de l'étude des limites.

f bornée localement

Proposition 27 *Si f est continue en x_0 alors f est bornée sur un voisinage de x_0.*

Positivité sur un voisinage

Proposition 28 *Si f est continue en x_0 et $f(x_0) > 0$, alors $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$ pour tout x dans un certain voisinage de x_0.*

Opérations

Proposition 29 *Si f et g sont continues en x_0, il en est de même de $f + g$ et $f.g$; et, pourvu que $g(x_0) \neq 0$, f/g est définie au voisinage de x_0 et est continue en x_0.*

Composition

Proposition 30 *Si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$, g est continue en y_0 alors $h = g \circ f$ est bien définie sur un voisinage de x_0 et est continue en x_0.*

Preuve. La continuité de g en $y_0 = f(x_0)$ implique l'existence d'un DL d'ordre 0 de g en y_0, i.e il existe une fonction η, $\eta(0) = 0$, continue en 0 telle que, pour tout y dans un voisinage V de y_0, on a

$$g(y) = g(y_0) + \eta(y - y_0)$$

De même, la continuité de f en x_0 implique l'existence d'un DL d'ordre 0 de f en x_0, i.e il existe une fonction ϵ, $\epsilon(0) = 0$, continue en 0 telle que, pour tout x dans un voisinage U de x_0, on a

$$f(x) = f(x_0) + \epsilon(x - x_0)$$

On peut par ailleurs supposer que si $x \in U$, $f(x) \in V$ quitte à restreindre l'ensemble U.

On peut donc substituer $f(x)$ à y dans la première égalité pour obtenir que pour tout $x \in U$,

$$h(x) = g(y_0) + \eta(f(x_0) + \epsilon(x - x_0) - y_0) = h(x_0) + (\eta \circ \epsilon)(x - x_0)$$

La fonction $\eta \circ \epsilon$ est nulle en 0 et est continue en 0 (voir à ce propos l'énoncé de composition de limites), on a donc obtenu un DL de h en x_0 à l'ordre 0 qui prouve que h est continue en x_0. $\diamond$

Remarque : Nous utiliserons la même technique de preuve lors de la proposition 49 pour prouver l'énoncé concernant la dérivée d'une fonction composée.

2.2 Fonction continue sur un intervalle

2.2.1 Définition

Définition 31 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial*[1]*, contenu dans D.*

1. *Si I est ouvert, on dit que f est continue sur I si f est continue en tout $x_0 \in I$*[2]*.*
2. *Si $I = [a, b]$, on dit que f est continue sur I si*
   - *elle est continue sur $]a, b[$*
   - *elle est continue à droite en a*
   - *elle est continue à gauche en b*
3. *Plus généralement, si I contient une de ses bornes, on demande la continuité à gauche ou à droite à la borne.*

Exemples et Remarques

1. I contient l'une de ses bornes, le fait que f soit continue sur I ne signifie pas que f est continue en chaque point[3] de I.
2. Illustrons ce fait sur un exemple concret. Considérons la fonction H définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $H(x) = 1$ si $x \geq 0$, $H(x) = 0$ si $x < 0$.
   La fonction H n'est pas continue sur son intervalle de définition car elle n'est pas continue en 0. Par contre elle est continue sur chacun des intervalles $[-1, 0[$ et $[0, 1]$.
3. Lorsque l'on parlera de fonction continue sur un intervalle I, on se placera toujours dans la situation où f est définie sur un domaine D contenant I et I est non trivial.
4. Une remarque toute simple mais utile à la cohérence du discours est que si f est continue sur un intervalle I et J est un intervalle contenu dans I alors f est continue sur I.
5. En utilisant la caractérisation séquentielle des limites, on obtient alors

   Proposition 32 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction alors on a équivalence entre*
   (a) *f est continue sur I*
   (b) *Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I convergeant vers ℓ dans I, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.*

2.2.2 Propriétés

Recollement

Proposition 33 (Recollement) *Soient I et J deux intervalles fermés ayant un seul point commun a. Si f est continue sur I et f est continue sur J alors f est continue sur l'intervalle $I \cup J$.*

Il suffit de voir que dans cette situation, comme I et J sont non triviaux, a est un point intérieur à l'intervalle $I \cup J$. Par ailleurs, les limites à gauche et à droite de f en a coincident toutes deux avec $f(a)$. En conclusion f admet $f(a)$ pour limite en a.

[1] Un intervalle est non trivial s'il est non vide, non réduit à un point.

[2] On remarque qu'alors I est voisinage de chacun de ses points

[3] Dans certain ouvrages, comme définition de f est continue sur une partie D' contenue dans D, on de mande que f soit continue en chaque point de D'. Ce n'est pas la convention que nous adoptons ici

Opérations

Proposition 34 *Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, f, g, fonctions à valeurs réelles sont continues sur I alors*

1. *$f + g$ est continue sur I*
2. *$f.g$ est continue sur I*
3. *si g ne s'annule pas sur I, f/g est continue sur I*

Composition

Proposition 35 *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si f, à valeurs réelles, continue sur I, g, à valeurs réelles, continue sur J. Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$, la composée $h = g \circ f$ est continue sur I.*

2.2.3 Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) : version 1

Théorème 36 *Soit g une fonction, à valeurs réelles, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$. Si $g(a)$ et $g(b)$ sont non nuls et de signes opposés, il existe alors c,* **strictement entre**[4] *a et b tel que $g(c) = 0$.*

Nous consacrerons le paragraphe 2.3 à la preuve de ce théorème.
Exercice résolu. Montrer qu'il existe un nombre $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $c = \cos^2 c$.

2.2.4 TVI : version 2

Théorème 37 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f à valeurs réelles, continue sur I, a, $b \in I$. Si y est entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe alors $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

Preuve. Soit y un nombre entre $f(a)$ et $f(b)$. Il s'agit de se mettre en position pour appliquer le théorème 36. Il suffit de considérer la fonction g définie par $g(t) = f(t) - y$ pour $t \in I$ car une solution de l'équation $g(x) = 0$, $x \in I$ est une solution de $f(x) = y$, $x \in I$ et réciproquement.

Soit donc, si $f(a) \leq y$ et $f(b) \geq y$[5],

$$g(t) = f(t) - y$$

cette fonction est continue sur $[a, b]$, $g(a) = f(a) - y \leq 0$, $g(b) = f(b) - y \geq 0$ et donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$ et donc $f(c) = y$. ◇

2.2.5 TVI : version 3

Théorème 38 *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, f une fonction à valeurs réelles, continue sur I. L'ensemble $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Exemples et Remarques

1. Cela signifie que lorsque x décrit I, $f(x)$ décrit exactement un intervalle....
2. Aucune précision n'est apportée quant au « type » de l'intervalle image, sauf le cas très particulier où l'intervalle I est de la forme $[a, b]$, le type de l'intervalle image est indépendant du type de l'intervalle de départ. Par exemple, si $f : I =]-1, 1[\to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$, on a $f(I) = [0, 1[$

Preuve. On utilise la caractérisation suivante des intervalles de $\mathbb{R}$ ont la preuve est un hors de notre programme.

---

[4] c est entre a et b si $a \leq c \leq b$ ou $a \geq c \geq b$, il est strictement entre a et b si $a < c < b$ ou $a > c > b$
[5] L'autre cas se traite de manière similaire

Proposition 39 *Si A est une partie de $\mathbb{R}$ possédant la propriété suivante,*
« Pour toute paire de points y_1 et y_2 dans A, si y est un réel entre y_1 et y_2 alors $y \in A$ »
alors A est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Réciproquement, les intervalles de $\mathbb{R}$ ont cette propriété.

Cette caractérisation n'est pas triviale (la réciproque est claire comme on peut le voir en listant tous les types possibles d'intervalles). La difficulté pour montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ ayant cette propriété est un intervalle est d'exhiber les bornes possibles pour l'intervalle...

Revenons à la preuve du théorème 38. Soit $A = f(I) = \{f(x), x \in I\}$. Soient y_1 et y_2 dans A et y un réel quelconque entre y_1 et y_2. On peut alors trouver deux points a et b dans I tels que $f(a) = y_1$ et $f(b) = y_2$. Le théorème 37, appliqué à l'intervalle fermé J d'extrémités a et b, affirme que, puisque f est continue sur J et que y est entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x entre a et b tel que $f(x) = y$. Ce nombre x est dans I car a et b y sont et donc cela montre que $y \in f(I) = A$.

D'après la proposition 39, on a donc montré que A est un intervalle.

$\diamond$

2.2.6 Fonction continue sur un segment

On admet le théorème suivant dont la preuve est du même ordre de difficulté que la preuve du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 40 *Soit $I = [a, b]$ un segment dans $\mathbb{R}$, f une fonction à valeurs réelles, continue sur I. Il existe alors un maximum M de f sur I, i.e il existe $c \in I$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M = f(c)$.*

Exemples et Remarques

1. On a un énoncé similaire pour les minima et, couplé avec le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient que

   Théorème 41 *Soit $I = [a, b]$ un segment dans $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. $f(I)$ est un segment dans $\mathbb{R}$, i.e il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $f(I) = [m, M]$.*

2. Le théorème est remarquable en ceci qu'il est faux à partir du moment où I n'est pas du type $[a, b]$.
3. Si $I = [1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ alors s'il y avait un minimum de cette fonction en $c \in I$, on aurait une contradiction car $f(c + 1) < f(c)$.
4. Si $I =]0, 1]$ et $f(x) = (1 - x) \sin \frac{1}{x}$, f n'a ni minimum ni maximum sur I. Lorsque x s'approche de 0, $f(x)$ s'approche d'aussi près que l'on veut de ± 1 sans jamais atteindre ces valeurs.

2.3 Preuve du théorème 36

Il s'agit de construire une solution à l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x \in [a, b]$ sous les hypothèses que g est continue sur $[a, b]$ et que $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes opposés.

L'idée est de donner un algorithme, de recherche de racines, l'algorithme de **dichotomie**, fournissant deux **suites** d'approximations par défaut et par excès d'une solution de cette équation.

Nous commençons par un rappel sur certains types de suites, les suites adjacentes.

2.3.1 Suites adjacentes

Définition 42 *Deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites* **adjacentes** *si*

1. *$a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$*
2. *(a_n) croit et (b_n) décroît*
3. $\lim_{n \to \infty} b_n - a_n = 0$

Le théorème des suites adjacentes affirme que deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite. Ce théorème est issu de la construction même des nombres réels[6]–il peut, suivant la construction choisie, être un théorème ou un axiome–Il n'est pas question que nous le démontrions ici.

2.3.2 Le principe de dichotomie

On peut supposer sans perte de généralité que $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$.

Soit $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Si l'un des nombres $f(a_0)$, $f(b_0)$ ou $f(c_0)$ est nul, l'algorithme est terminé et on a bien trouvé une solution de l'équation $f(x) = 0$. Sinon, on a $f(a_0) < 0$, $f(b_0) > 0$ et deux possibilités : $f(c_0) < 0$ ou $f(c_0) > 0$.

- Si $f(c_0) < 0$, on pose $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$
- Si $f(c_0) > 0$, on pose $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$

on pose $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Dans les deux cas, on a alors $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$, $a_0 \leq a_1 \leq c_1 \leq b_1 \leq b_0$.

En supposant construit $a_n < b_n$ et $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, avec $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) > 0$, on peut construire a_{n+1} et b_{n+1} de la même façon que l'on construit a_1 et b_1 à partir de a_0 et b_0.

- Si $f(c_n) = 0$, l'algorithme s'arrête et on a trouvé une solution de l'équation.
- Si $f(c_n) < 0$, on pose $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$
- Si $f(c_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$

Dans les deux derniers cas, on a $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$, $f(a_{n+1}) < 0$ et $f(b_{n+1}) > 0$ et on peut donc recommencer la construction.

Si l'algorithme ne s'arrête pas, les deux suites (a_n) et (b_n) construites par récurrence sont adjacentes : elles sont clairement l'une croissante et l'autre décroissante, on a bien $a_n \leq b_n$ et enfin $b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) > 0$.

Le théorème des suites adjacentes affirme alors qu'elles convergent vers une certaine limite $c \in [0, 1]$. Comme f est continue sur $[0, 1]$ (et donc en c), on alors que $f(a_n) \to f(c)$ et $f(b_n) \to f(c)$ lorsque $n \to \infty$. De la première convergence, on tire $f(c) \leq 0$, de la deuxième, $f(c) \geq 0$. Au final, on a $f(c) = 0$ et donc c est une solution de l'équation considérée.

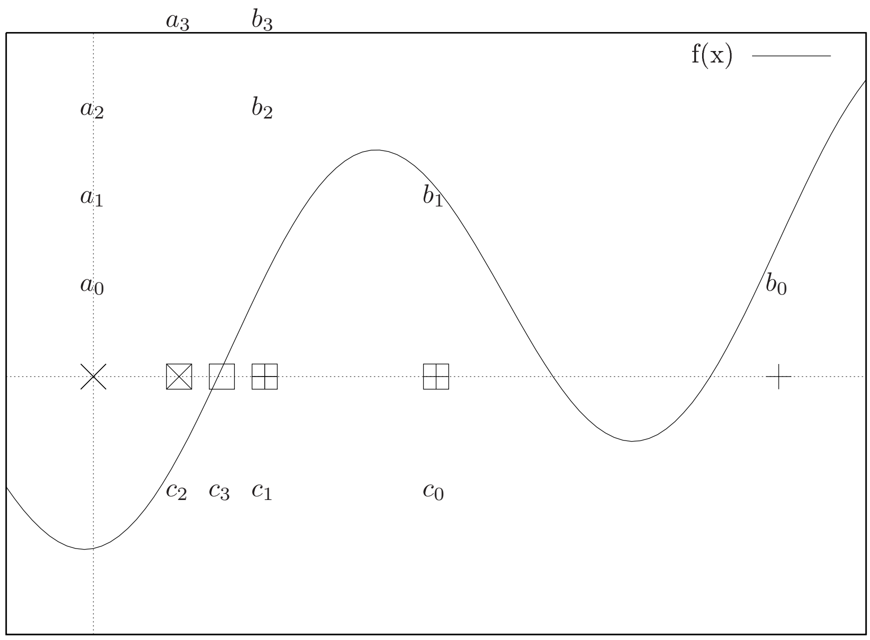

FIG. 2.1 – L'algorithme de dichotomie. Le point c_3 est très proche d'une solution de l'équation

[6]Que seuls ceux qui aiment lire par eux-mêmes apprendront

Chapitre 3

Dérivabilité

3.1 Dérivée en un point et interprétation géométrique

3.1.1 Définition

Dans la suite f est toujours une fonction définie au voisinage du réel x_0, y compris en x_0.

Définition 43 *Soit x_0 un réel, f une fonction définie au voisinage de x_0.*

1. *La fonction θ définie par $\theta(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est bien définie au voisinage de x_0 sauf en x_0. $\theta(x)$ est le* **taux d'accroissement** *de f entre x et x_0.*
2. *On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le taux d'accroissement de f entre x et x_0 admet une limite lorsque $x \to x_0$. Cette limite s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. On a donc, lorsque cela à un sens,*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Exemples et Remarques

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ admet un nombre dérivé en tout $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $f'(x_0) = 2x_0$.
2. $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ admet un nombre dérivé (ou **une dérivée**) en x_0 pour tout $x_0 > 0$. On a
$$g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$ est dérivable en $x_0 = 0$ avec $h'(0) = 0$ (Elle est d'ailleurs dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$, ce que l'on verra plus tard.)

3.1.2 Interprétation géométrique

En considérant le graphe de f au voisinage de x_0, pour $x \neq x_0$ la **corde** au graphe passant par les points M_0 et M de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour équation (d'inconnues $X, Y \in \mathbb{R}$)

$$Y - f(x_0) = \theta(x).(X - x_0)$$

Lorsque x tend vers x_0, $\theta(x)$ tend vers $f'(x_0)$, ce qui signifie géométriquement que la corde se « rapproche » de la droite d'équation

$$Y - f(x_0) = f'(x_0).(X - x_0)$$

Cette droite est appelée la tangente au graphe de f en x_0.

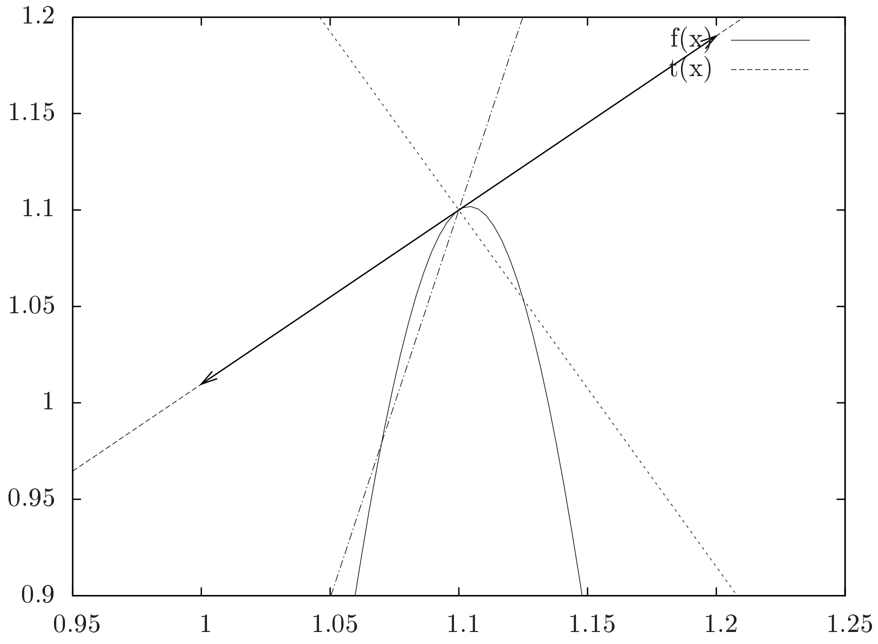

FIG. 3.1 – $x_0 = 1.1$, quelques cordes au graphe de f passant par $(x_0, f(x_0))$ et la tangente au graphe en x_0

3.1.3 Tangente verticale

Si le taux d'accroissement d'une fonction f en un point x_0 admet une limite infinie lorsque x tend vers x_0. On dit que le graphe de f admet une tangente verticale. Attention ! Dans un tel cas, la fonction f n'est pas dérivable en x_0

Un exemple typique est le cas fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ en 0. Nous invitons le lecteur à tracer l'allure de son graphe au voisinage de 0.

3.1.4 DL d'ordre 1

De la définition même de limite, on déduit la

Proposition 44 *Soit x_0 un réel, f une fonction définie au voisinage de x_0. f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un nombre ℓ et une fonction ϵ, définie au voisinage de 0 tels que*

(i) ϵ est continue en 0, $\epsilon(0) = 0$

(ii) pour tout x voisin de x_0,

$$f(x) = f(x_0) + \ell.(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)$$

Dans ce cas, $\ell = f'(x_0)$.

L'écriture du point (ii) s'appelle le **développement limité d'ordre 1** de f au voisinage de x_0.

3.1.5 Dérivabilité et continuité

Corollaire 45 *Si f est dérivable en x_0, elle y est continue.*

Exemples et Remarques

1. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue en 0.
2. On peut construire une fonction, continue sur $\mathbb{R}$, qui n'est dérivable en aucun point

3.1.6 Dérivabilité à droite et à gauche

Définition 46 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction définie dans un voisinage à droite de x_0. On dit que f est dérivable à droite en x_0, de nombre dérivé $f'_d(x_0)$ si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite lorsque x tend vers x_0 à droite. Dans ce cas*

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On a une définition similaire pour la dérivabilité à gauche et $f'_g(x_0)$, le nombre dérivé à gauche.

Proposition 47 *Soit f définie au voisinage du point x_0. f est dérivable en x_0 si et seulement si elle y est dérivable à gauche et à droite et*

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

Exercice résolu. Étude de la dérivabilité de $f(x) = \sqrt{x^2 + x^3}$ définie sur $[-1, +\infty[$ en -1 à droite et en 0.

3.1.7 Opérations algébriques

Proposition 48 *Soit x_0 un réel, f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, dérivables en x_0.*

1. *$f + g$ est dérivable en x_0 et*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. *(Règle de Leibniz) $f.g$ est dérivable en x_0 et*

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0).$$

En particulier, ceci s'applique si f est une fonction constante, $f(x) = C$, pour donner que $C.g$ est dérivable en x_0 avec

$$(C.g)'(x_0) = C.g'(x_0)$$

3. *Si $g(x_0) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de x_0, sont dérivables en x_0 avec*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

3.1.8 Composition

Proposition 49 (Règle de la chaîne) *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction définie au voisinage de x_0, dérivable en x_0. Soit $y_0 = f(x_0)$, g une fonction définie au voisinage de y_0, dérivable en y_0.*

La fonction $h = g \circ f$ est définie au voisinage de x_0, y est dérivable et

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = f'(x_0).g'(y_0) = f'(x_0).g'(f(x_0))$$

En notation physicienne, en posant $y = f(x)$,

$$\frac{dh}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dy}(y_0)\frac{dy}{dx}(x_0)$$

Preuve. Le fait que h soit bien définie au voisinage de x_0 est une conséquence de l'énoncé similaire sur la continuité.

D'après la proposition 44, il existe deux fonctions ϵ et η, définies au voisinage de 0 telles que pour tout x voisin de x_0, tout y voisin de $y_0 = f(x_0)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0) \\ g(y) &= g(y_0) + (y - y_0)g'(y_0) + (y - y_0)\eta(y - y_0) \end{aligned}$$

$y = f(x)$ est suffisamment voisin de y_0 pour que l'on puisse écrire, par substitution de la première égalité dans la seconde que

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + ((x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0))\, g'(y_0) + \\ &\quad + ((x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0))\, \eta\, ((x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)) \\ &= g(f(x_0)) + (x - x_0)f'(x_0).g'(y_0) + (x - x_0)\epsilon'(x - x_0) \end{aligned}$$

On a ici posé

$$\epsilon'(h) = \epsilon(h)g'(y_0) + (f'(x_0) + \epsilon(h))\, \eta\, (h.f'(x_0) + h\epsilon(h))$$

qui est clairement une fonction de limite 0 en 0. On a donc prouvé l'existence d'un DL d'ordre 1 de h au voisinage de x_0, i.e la dérivabilité de h en x_0 et le fait que

$$h'(x_0) = f'(x_0).g'(y_0)$$

$\diamond$

3.2 Fonction dérivable sur un intervalle, fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle

3.2.1 Définition

Définition 50 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de variable réelle, à valeurs réelles. Soit I un intervalle non trivial contenu dans D.*

1. *Si la fonction f est dérivable en tout point de I (à droite ou à gauche si l'on s'intéresse à une borne de I contenue dans I), on dit que f est dérivable sur I. Dans ce cas, la fonction f' définie sur I par*
$$f'(x) = \text{le nombre dérivé de } f \text{ en } x$$
est appelée **la fonction dérivée** *de f sur I*
2. *Si la fonction f est dérivable sur I et que sa dérivée f' sur I est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, ce que l'on note $f \in \mathcal{C}^1(I)$.*

Exemples et Remarques

1. Les fonctions les plus simples sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. Celles-ci sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, leur dérivée est la fonction nulle.
2. La fonction $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est la fonction constante égale à 1.
3. La fonction $\sqrt{.}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, sa dérivée est la fonction $x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. La fonction $\sqrt{.}$ n'est pas dérivable sur son intervalle de définition car elle n'est pas dérivable à droite en 0.
5. La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
6. exp, sin, cos sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Leurs fonction dérivées sont respectivement exp, cos et $-$ sin.

3.2.2 Opérations

Proposition 51 (Recollement) *Soient I et J deux intervalles fermés ayant pour seul point commun le point a. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sur J alors,* **pourvu que** *$f'_g(a) = f'_d(a)$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $I \cup J$.*

Les résultats concernant les opérations sur les fonctions et la dérivabilité en un point a s'étendent naturellement en des résultats sur les fonctions dérivées

Proposition 52 *1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$ alors*

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f \in \mathcal{C}^1(I)$, sur I,

$$(\lambda.f)' = \lambda.f'$$

(ii) Si f ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}^1(I)$ et, sur I,

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

2. Soit de plus $g \in \mathcal{C}^1(I)$

(i) Les fonctions $f + g$ et $f.g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, sur I,

$$(f + g)' = f' + g' \text{ et } (f.g)' = f.g' + f'.g$$

(ii) Si f ne s'annule pas sur I, alors $\frac{g}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, sur I,

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'.f - g.f'}{f^2}$$

3. Soit J un intervalle et $g \in \mathcal{C}^1(J)$. Si pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$ alors la fonction $g \circ f \in \mathcal{C}^1(I)$, et, sur I,

$$(g \circ f)' = (g' \circ f).f'$$

Exemples et Remarques

1. Du fait que la fonction $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on déduit que tout fonction polynomiale est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est alors une fonction polynomiale.
2. Une fraction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle contenu dans son domaine de définition. Sa fonction dérivée est-elle même, sur chacun de ces intervalles, une fraction rationnelle.
3. tan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. Sa dérivée y est la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$	commentaires
x^n	nx^{n-1}	pour $x \in \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	pour $x \neq 0$ si $n \in \mathbb{Z}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	pour $x > 0$ si $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	pour $x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	pour $x > 0$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	pour $x \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$	pour $x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	pour $x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	pour $x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	pour $-1 < x < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	pour $-1 < x < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	pour $x \in \mathbb{R}$

TAB. 3.1 – Les dérivées classiques

Chapitre 4

Utilisation de la dérivée

4.1 Extrema et points critiques

Définition 53 *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet un* **maximum local** *en $a \in D$ s'il existe un voisinage I de a tel que pour tout $x \in I \cap D$, $f(x) \leq f(a)$.*

Exemples et Remarques On a une définition semblable pour un minimum local. Si f admet en a un maximum ou un minimum local, on dit que f admet un extremum local.

Si f admet un maximum global en a, elle y admet *a fortiori* un maximum local.

Proposition 54 *Soit f une fonction à valeurs réelles, dérivable sur un intervalle I, a un point intérieur à I*[1]*.*

Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Preuve. Supposons que $f'(a) \neq 0$, il existe une fonction ϵ telle que pour tout x voisin de a,

$$f(x) - f(a) = f'(a).(x - a)\,(1 + \epsilon(x - a))$$

Sur un certain voisinage de a, la quantité $1 + \epsilon(x - a)$ est strictement positive et donc, sur ce voisinage, $f(x) - f(a)$ est du même signe que $f'(a).(x - a)$. De part et d'autre de a (on se sert **là** du fait que a est intérieur à I), cette quantité prend des valeurs > 0 et < 0, ce qui est impossible si f admet un extremum local en a. $\diamond$

4.2 Le lemme de Rolle et le théorème des accroissements finis

Théorème 55 (Accroissements finis) *Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction à valeurs réelles, continue sur I, dérivable sur $]a, b[$. Il existe un point $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Preuve. On se ramène d'abord au cas particulier où $f(a) = f(b)$ auquel cas le théorème précédent s'appelle le **Lemme de Rolle**. Si f satisfait les hypothèses du théorème des accroissements finis, la fonction

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \text{ eq. de la corde entre } a \text{ et } b$$

satisfait les hypothèses du lemme de Rolle et l'on peut conclure.

Si $f(a) = f(b)$, la fonction f, qui est continue sur $[a, b]$ admet un minimum m et un maximum M par le théorème 41. Si $m = M$, cela signifie que la fonction est constante sur $[a, b]$. Sa dérivée y est donc nulle.

Si $m < M$, l'un de ces deux nombres est différent de $f(a) = f(b)$, il s'agit donc d'un extremum local de f atteint en un point intérieur c à $[a, b]$. On a alors $f'(c) = 0$. $\diamond$

[1] i.e a n'est pas une borne de I

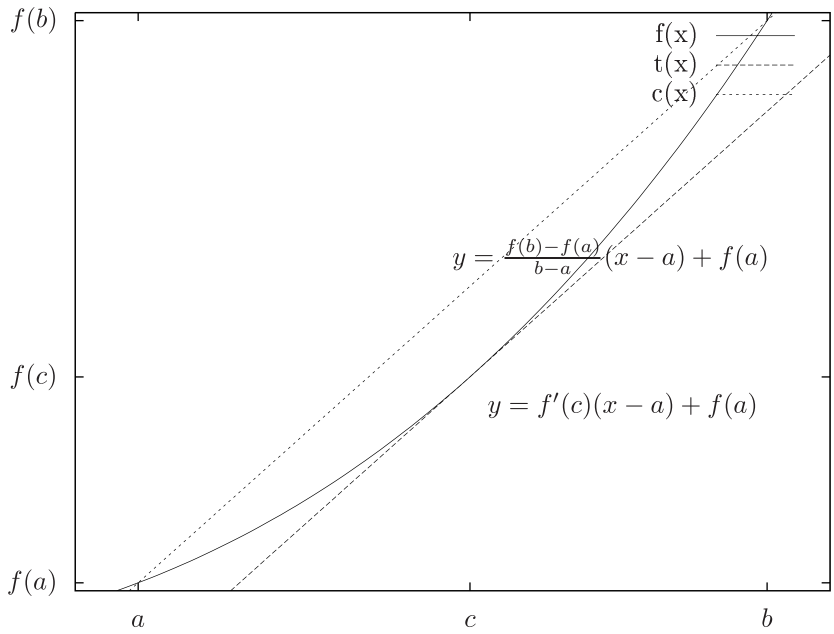

FIG. 4.1 – $[a,b] = [1,2]$, il y a une tangente entre a et b qui est parallèle à la corde au graphe entre a et b.

4.3 Croissance d'une fonction et signe de la dérivée

Définition 56 *Soit $D \subset \mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles définie sur D.*

1. *On dit que f est* **croissante** *sur D si, pour tous $x, y \in D$, si $x < y$ alors $f(x) \leq f(y)$*
2. *On dit que f est* **décroissante** *sur D si, pour tous $x, y \in D$, si $x < y$ alors $f(x) \geq f(y)$*
3. *On dit que f est* **strictement croissante** *sur D si, pour tous $x, y \in D$, si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$*
4. *On dit que f est* **strictement décroissante** *sur D si, pour tous $x, y \in D$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$*

Théorème 57 *Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction dérivable sur I telle que $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I.*

Preuve. Soient $x < y$ deux points de I. La fonction f est dérivable sur $]x, y[$ et continue sur $[x, y]$. On peut alors appliquer le théorème 55 (TAF) pour obtenir que, pour un certain $z \in I$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) > 0$$

On a donc clairement que $f(y) > f(x)$. $\diamond$

Exemples et Remarques

1. Si $f' < 0$ sur I, f y est strictement décroissante
2. Si f' est seulement positive sur I (i.e, elle peut s'annuler) alors f est croissante sur I. Réciproquement, si f est croissante sur un intervalle I, sa dérivée y est ≥ 0.
3. Le théorème 57 est utilisé constamment lorsque l'on construit le **tableau de variations** de f. C'est lui qui justifie le passage de la ligne indiquant le signe de f' à la ligne indiquant le sens de variation de f.

4. Lorsque l'on construit le tableau de variations de f, on cherche les intervalles sur lequel sa dérivée est > 0, ce que l'on marque dans le tableau de signe de f' par un $+$. De même, on marque par un $-$ les intervalles sur lesquels $f' < 0$. Il s'agit donc de résoudre les deux inéquations d'inconnue x : $f'(x) < 0$ et $f'(x) > 0$. Dans la pratique et dans la plupart des cas, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ et donc, pour déterminer ces zones, comme f' est continue, d'après le TVI, le théorème 36[2], il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = 0$. On sait alors que f est de signe constant sur les intervalles délimités par les solutions de cette équation. On peut alors trouver ce signe en calculant, par exemple, $f(x)$ pour un x bien choisi de l'intervalle ou par tout autre argument du même calibre.

Théorème 58 *Si $f \in \mathcal{C}^1(I)$ et sa dérivée y est nulle alors f est constante sur I.*

Exemples et Remarques

1. Ce théorème implique l'égalité, à une constante additive près, de primitives sur un intervalle I d'une fonction f continue sur I, voir la section 5.1.1 du chapitre 5
2. Il est aussi à la base de résultats d'unicité concernant les équations différentielles.

4.4 Prolongement de la dérivée

Théorème 59 *Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I =]a, b]$. Supposons que*
(i) f se prolonge par continuité sur $[a, b]$ en une fonction $\tilde{f}$.
(ii) f' se prolonge par continuité sur $[a, b]$ en une fonction g
alors $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et sur cet intervalle $\tilde{f}' = g$.

Preuve. On sait déjà que sur $]a, b]$, $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ et $\tilde{f}' = g$, tout le problème est concentré au point a.

Soit $x \in]a, b]$, d'après le théorème 55, le TAF, appliqué à $\tilde{f}$ sur l'intervalle $[a, x]$, on a l'existence d'un point $z_x \in]a, x[$ tel que

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(a) + (x - a)g(z_x)$$

Mais, comme g est continue sur $[a, b]$ et notamment en a, il existe ϵ as usual tel que

$$g(z_x) = g(a) + \epsilon_g(z_x - a)$$

En remplaçant, on obtient alors que

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(a) + (x - a)g(a) + (x - a)\epsilon_g(z_x - a)$$

Comme lorsque $x \to a$, $z_a \to a$ (gendarmes !), alors, il existe une fonction ϵ telle que $\epsilon_g(z_x - a) = \epsilon(x - a)$, ce qui donne

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(a) + (x - a)g(a) + (x - a)\epsilon(x - a)$$

et garantit que $\tilde{f}$ est dérivable en a avec $\tilde{f}'(a) = g(a)$. ◇

Exercice résolu. Montrer que la fonction définie pour $x \neq 0$ par la formule $\frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$. [3] Quelle est la valeur de sa dérivée en 0 ? Indication: On admettra qu'il existe deux fonctions ϵ de limite 0 en 0 telles que $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$ et $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$.

4.5 L'inégalité des accroissements finis

Théorème 60 *Si f est $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I = [a, b]$, alors il existe une constante M telle que pour tous $x, y, \in I$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

On peut prendre pour M tout nombre majorant $|f'|$ sur l'intervalle I.

[2] l'hypothèse de continuité de la dérivée est en fait inutile, on peut en effet montrer, c'est le théorème de Darboux, que f' verifie toujours le TVI

[3] Cette fonction est appelée le **sinus cardinal**, elle est utilisée en électronique, en traitement du signal...

Preuve. $|f'|$ est continue sur $[a,b]$, il existe donc une constante M telle que pour tout $z \in I$, $|f'(z)| \leq M$.

Soient $x < y$ dans I, on peut appliquer le TAF, le théorème 55, à la fonction f sur l'intervalle $[x,y]$ et donc, il existe $z \in I$ tel que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leq M|x - y|$$

$\diamond$

Ce théorème sert à obtenir des inégalités intéressantes. A titre d'exemples, le lecteur pourra montrer les inégalité suivantes

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$
2. Si $a > 0$, pour tous $x, y \in [a, +\infty[$,
$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}|x - y|$$

Chapitre 5

Primitives et Intégrales

5.1 Définition et propriétés élémentaires

5.1.1 Définition

Définition 61 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, f une fonction à valeurs réelles définie sur I. On dit que f* **admet une primitive** *sur I s'il existe une fonction F définie, dérivable sur I telle que, sur I,*

$$F' = f$$

Une fonction F vérifiant la propriété précédente est appelée **une primitive de f sur** *I.*

Exemples et Remarques

1. Si f admet une primitive sur un intervalle I et si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I alors il existe une constante C telle que, sur I,

$$F_1 = F_2 + C$$

   Autrement dit, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle différent d'une constante[1]. La réciproque est claire : si F est une primitive de f sur I et C est une constante alors la fonction $F + C$ est une primitive de f sur I.
2. Une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ y admet une primitive : en effet si $f(x) = a_0 + a_1.x + \cdots + a_n.x^n$ alors

$$F(x) = a_0.x + \frac{1}{2}a_1.x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_n.x^{n+1}$$

   est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. C'est **la** primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
3. Une fonction continue, affine par morceaux sur un intervalle $I = [a, b]$ y admet une primitive[2] Par exemple, considérons, sur l'intervalle $I = [0, 1]$ la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

   Une primitive de f sur I est alors

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

[1] On remarque que la dérivée de $F_1 - F_2$ est nulle et on applique le théorème 58

[2] par ceci, on entend qu'il existe $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b \in [a, b]$, tels que f est affine sur chaque intervalle du type $[x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \ldots, n$

4. Dans certains ouvrages[3], la fonction ln est définie comme étant une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$. L'existence de cette fonction est garantie par le théorème difficile suivant.

Théorème 62 (Admis) *Si f est une fonction continue sur un intervalle I, elle y admet une primitive F.*

Ceci étant dit, nous pouvons maintenant définir nos intégrales

Définition 63 *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, f une fonction réelle définie sur I,* **continue** *sur I et $a, b \in I$. On note, étant donnée F, une primitive de f sur I,*

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

l'intégrale de f de a à b[4]

Exemples et Remarques

1. La définition précédente ne dépend pas du choix de la primitive F de f sur I. La prise de différence annule les constantes.
2. Les notations introduites par cette définition sont au nombre de deux $\int_a^b$ et $[]_a^b$. Le crochet $[F(t)]_a^b$ vaut $F(b) - F(a)$. Dans cette notation, la variable t est muette, i.e n'a des sens qu'à l'intérieur du crochet. Pour être plus précis, on devrait en fait noter $[F(t)]_{t=a}^{t=b}$.
3. Nous verrons dans le chapitre 10 le pourquoi de l'utilisation du signe $\int$ qui est un « S »[5] déformé et la nature de la « variable » t apparaissant dans la notation. Nous verrons que cette « variable » joue un rôle similaire à la variable i dans une somme du type $\sum_{i=a}^b u_i$. En particulier, la « portée » de cette variable est confinée à l'« intérieur » du symbole $\int$. On peut changer son nom sans changer l'interprétation du symbole et elle n'a pas de sens à l'extérieur du symbole.
$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(s)\ ds = \int_a^b f(\xi)\ d\xi$$
4. Dans le même esprit que la remarque précédente sur le crochet, on devrait, pour être plus précis, noter
$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_{t=a}^{t=b} f(t)\ dt$$
5. En conséquence, une notation telle que
$$\int_a^b f(a)\ da$$
est trop ambigüe pour être utilisable sans risque, le a du $f(a)\ da$ est « intérieur » à l'intégrale alors que le a dans $\int_a^b$ est censé avoir une valeur définie hors de l'intégrale.
6. La notation F pour désigner une primitive de f est parfois très malcommode et l'on trouve dans certains livres la notation $\int f(x)\ dx$ pour désigner une primitive quelconque de f sur l'intervalle I. Nous éviterons cette notation[6] mais nous utiliserons couramment la notation
$$\int_{x_0}^x f(t)\ dt$$
pour désigner la fonction de $x \in I$ qui est **la** primitive de f s'annulant en $x_0 \in I$.
7. Un tableau des primitives classiques s'obtient en lisant le tableau des dérivés classiques à rebours, voir le tableau 5.1

[3] dont celui-ci

[4] ou parfois l'intégrale de f **entre** a et b, en sous-entendant la direction de a vers b, voire, l'intégrale de f **sur** $[a, b]$, pourvu que $a \leq b$

[5] Comme **S**omme

[6] L'auteur n'apprécie guère cette notation d'intégrale indéfinie qui est assez confuse

$F(x)$	$f(x)$	I
x^n	nx^{n-1}	$I = \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	$I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$ si $n \in \mathbb{Z}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$I = \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$I =]0, +\infty[$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$
$\sin x$	$\cos x$	$I = \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$I = \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \in I_k, I_k = \left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$I =]-1, 1[$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$I =]-1, 1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$I = \mathbb{R}$

TAB. 5.1 – Les primitives classiques, F est primitive de f sur I, en général on peut ajouter une constante à F

5.1.2 Propriétés fondamentales

On suppose que f,g,...sont des fonctions continues sur un certain intervalle I non trivial fixé et que $a, b, c, \dots \in I$.

Proposition 64 (Linéarité) *Si λ et μ sont deux constantes réelles alors*

$$\int_a^b (\lambda.f + \mu.g)(t)\ dt = \lambda. \int_a^b f(t)\ dt + \mu. \int_a^b g(t)\ dt$$

Cette relation est simplement due au fait que $(\lambda.F+\mu.G)' = \lambda.F'+\mu.G'$ avec F et G des primitives de f et g sur I.

Proposition 65 (Relation de Chasles) *On a*

$$\int_a^b f(t)\ dt + \int_b^c f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt$$

Cette relation est claire lorsque l'on écrit la définition de chaque symbole $\int_a^b$ à l'aide d'une primitive F de f sur I.

En particulier, comme $\int_a^a f(t)\ dt = 0$, on a

$$\int_a^b f(t)\ dt = -\int_b^a f(t)\ dt$$

Proposition 66 (Positivité) *Si $a \le b$[7], f est positive ou nulle sur $[a, b]$ alors*

$$\int_a^b f(t)\ dt \ge 0$$

C'est une version « inversée » de la caractérisation des fonctions dérivables croissantes. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$, comme $f \ge 0$ sur $[a, b]$, F est donc croissante sur $[a, b]$, et, comme $a \le b$, $F(a) \le F(b)$ et donc $\int_a^b f(t)\ dt \ge 0$.

Sur le même modèle, nous avons

Proposition 67 *Si $a < b$, f est positive ou nulle sur $[a, b]$, f est continue sur I, et*

$$\int_a^b f(t)\ dt = 0$$

alors f est nulle sur $[a, b]$.

On sait déjà que F est croissante sur $[a, b]$, comme $F(a) = F(b)$, cela montre que F est constante sur $[a, b]$, finalement, comme cet intervalle n'est pas trivial, cela montre que f, la dérivée de F, y est nulle.

En appliquant ce résultat à la fonction $g - f$,

Proposition 68 (Croissance) *Si $a \le b$ et sur $[a, b]$, $f \le g$, alors*

$$\int_a^b f(t)\ dt \le \int_a^b g(t)\ dt$$

Par exemple, si f est à valeurs dans l'intervalle $[m, M]$, on a alors

$$m(b - a) \le \int_a^b f(t)\ dt \le M(b - a)$$

[7] $\int_a^b f(t)\ dt$ est donc l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$

Proposition 69 (Inégalité triangulaire) *Si $a \leq b$ et sur $[a, b]$, alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \int_a^b |f|(t)\ dt$$

Cette relation est obtenue en remarquant que $f + |f|$ et $-f + |f|$ sont des fonctions positives et en appliquant la positivité.

Cette relation dit que la valeur absolue d'une somme est inférieure à la somme des valeurs absolues : il s'agit donc bien d'une version de l'inégalité triangulaire.

5.2 Techniques de calcul

Dans cette partie, nous essayons de donner des techniques permettant de calculer, ou tout au moins de simplifier certaines expressions intégrales. Rappelons que dans cette introduction élémentaire, les fonctions à intégrer, les **intégrandes**, sont au moins continues sur l'intervalle d'intégration.

5.2.1 Intégration par parties

Théorème 70 *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$ alors*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g'(t)\ dt &= (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f'(t)g(t)\ dt \\ &= [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\ dt\end{aligned}$$

Exemples et Remarques

1. La preuve de ce théorème tient en la remarque qu'il s'agit de la formule de la dérivée d'un produit « vue à l'envers ». Si $H := f.g$ alors H est une primitive de $h = H' = f'.g + f.g'$. En conséquence, on a
$$\int_a^b f'(t).g(t)\ dt + \int_a^b f(t).g'(t)\ dt = [H(t)]_{t=a}^{t=b} = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$
2. Le but d'une intégration par parties est, la plupart du temps, de tomber sur une expression plus simple à évaluer que celle de départ. Par exemple, pour calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\ dx,$$
on a le choix entre
   (a) poser $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ et donc $f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$
   (b) poser $f(x) = \cos x$, $g'(x) = x$ et donc $f'(x) = -\sin x$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

   Le premier mène à
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\ dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx$$
alors que le second mène à
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\ dx = [-\frac{1}{2}x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}x^2 \sin x\ dx$$
Il doit être clair que dans le premier cas, les choses tendent à se simplifier alors que dans le second, elles ont tendance à se compliquer. En suivant la première voie, on obtient
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\ dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

3. Il n'y a pas de formule générale permettant par exemple de dire que l'intégrale d'un produit est le produit des intégrales : la formule d'intégration par parties tient ce rôle, et elle n'est pas si simple.

5.2.2 Changement de variables

Théorème 71 *Soit* $\mathbf{u}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* $[a,b]$*, prenant ses valeurs dans un intervalle* I*. Soit* f *une fonction continue sur* I*, alors*[8]

$$\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\mathbf{u}'(x)\ dx \quad = \quad \int_{\mathbf{u}(a)}^{\mathbf{u}(b)} f(u)\ du$$

Exemples et Remarques

1. La preuve de ce théorème tient en la remarque qu'il s'agit de la formule de la dérivée d'une composée « vue à l'envers ». Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors $H := F(u(x))$ est une primitive de $f(u(x)).u'(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$ et donc

$$\begin{aligned}\int_{x=a}^{x=b} f(\mathbf{u}(x)).\mathbf{u}'(x)\ dx &= [H(x)]_{x=a}^{x=b}\\ &= F(\mathbf{u}(b)) - F(\mathbf{u}(a)) = [F(u)]_{u=\mathbf{u}(a)}^{u=\mathbf{u}(b)}\\ &= \int_{u=\mathbf{u}(a)}^{u=\mathbf{u}(b)} f(u)\ du\end{aligned}$$

2. La confusion entre la variable muette u et la fonction $\mathbf{u}$ a pour but de faciliter ce type de changement de variables. Considérons le calcul de

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{3e^x+1}\ dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{3e^x+1}\ e^x dx$$

Posons $u = \mathbf{u}(x) = e^x$, comme « nouvelle variable ». On a alors, au niveau symbolique tout au moins,

(a) $du = \mathbf{u}'(x)\ dx = e^x\ dx$

(b) lorsque $x = 0$, $u = \mathbf{u}(x) = 1$

(c) lorsque $x = 1$, $u = \mathbf{u}(x) = e$

et donc

$$I = \int_{u=1}^{u=e} \frac{1}{3u+1}\ du \left(= [\frac{1}{3}\ln(3u+1)]_{u=1}^{u=e} = \frac{1}{3}\ln\frac{3e+1}{4}\right)$$

3. On conseille au lecteur d'aller lire le chapitre 7 avant de lire ce paragraphe. Le changement de variable précédent est particulièrement facile car on a reconnu la forme $f'(\mathbf{u}(x)).\mathbf{u}'(x)$. Il arrive parfois (en fait la plupart du temps) que l'on veuille mener un changement de variable du type $u = \mathbf{u}(x)$ dans une intégrale du type

$$\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\ dx$$

On doit alors « forcer » l'apparition du terme $\mathbf{u}'(x)$ par

$$\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\ dx = \int_a^b [f(\mathbf{u}(x))\mathbf{u}'(x)^{-1}].\mathbf{u}'(x)dx$$

[8] Le lecteur pointilleux aura remarqué que nous dérogeons à notre règle de ne pas utiliser comme symbole de variable muette dans une intégrale ou un crochet une lettre désignant déjà un autre objet : ici u est à la fois une fonction, en lettres grasses pour avoir un minimum de distinction, (dans l'intégrale en dx ou les bornes de l'intégrale en du) et une variable muette (à l'intérieur de cette intégrale en du).

Ceci ne peut se faire correctement que si $\mathbf{u}'(x)$ ne **s'annule pas sur l'intervalle** $[a, b]$, ce qui implique notamment que u **définit une bijection** du segment $[a, b]$ sur le segment $[\mathbf{u}(a), \mathbf{u}(b)]$.

4. Illustrons ceci en reprenant notre exemple précédent, un peu camouflé. Le problème est de calculer
$$I = \int_0^1 \frac{1}{3 + e^{-x}}\ dx$$
On pose naturellement $\mathbf{u}(x) = e^{-x}$ et $\mathbf{u}'(x) = -e^{-x}$ ne s'annule pas. On a alors
$$I = \int_0^1 \frac{1}{(3 + e^{-x})(-e^{-x})}\ (-e^{-x})dx$$
et, en menant le changement de variable comme précédemment
   (a) $du = \mathbf{u}'(x)\ dx = -e^{-x}\ dx$
   (b) lorsque $x = 0$, $u = u(x) = 1$
   (c) lorsque $x = 1$, $u = u(x) = \frac{1}{e}$

   On obtient
$$I = -\int_1^{\frac{1}{e}} \frac{1}{(3 + u)u}\ du = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{(3 + u)u}\ du$$
On a (voir la partie sur les fractions rationnelles) que
$$\frac{1}{(3 + u)u} = \frac{1}{3}(-\frac{1}{3 + u} + \frac{1}{u})$$
et donc
$$I = \frac{1}{3}\left([\ln u]_{\frac{1}{e}}^1 - [\ln 3 + u]_{\frac{1}{e}}^1\right),$$
ce qui, après quelques simplifications nous redonne le résultat précédent.

5. Reprenons le cours de la discussion théorique. Pour éviter un peu les confusions de notation, on va noter en lettres grasses les fonctions et lettres usuelles les variables, notons donc $\mathbf{x}(u)$ la bijection réciproque de la fonction $\mathbf{u}$. On a alors
$$\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\ dx = \int_{\mathbf{u}(a)}^{\mathbf{u}(b)} [f(u)\mathbf{u}'(\mathbf{x}(u))^{-1}].\ du$$
Comme $\mathbf{u}'(\mathbf{x}(u))^{-1} = \mathbf{x}'(u)$ (formule de la dérivée d'une réciproque !), on obtient alors le théorème

   Théorème 72 *Soit* $\mathbf{u}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur le segment* $[a, b]$*, établissant une bijection de* $[a, b]$ *sur le segment* $[\mathbf{u}(a), \mathbf{u}(b)]$*, de bijection réciproque* $\mathbf{x}$*, elle même de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[\mathbf{u}(a), \mathbf{u}(b)]$[9].
   Soit f *une fonction continue sur le segment* $[\mathbf{u}(a), \mathbf{u}(b)]$*, alors*
$$\int_a^b f(\mathbf{u}(x))\ dx \quad = \quad \int_{\mathbf{u}(a)}^{\mathbf{u}(b)} f(u).\mathbf{x}'(u)\ du$$

6. **Exercice résolu.** Calculer l'aire d'un $\frac{1}{2}$-cercle et déterminer une primitive de $\sqrt{1 - x^2}$.
L'aire comprise entre le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est l'axe des abscisses est un demi-disque de rayon 1. Si nous faisons confiance à notre culture nous devrions donc avoir
$$I := \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2}\ dt = \frac{\pi}{2}$$

[9] On dit que $\mathbf{u}$ établit un $\mathcal{C}^1$-**difféomorphisme du segment** $[a, b]$ **sur le segment** $[u(a), u(b)]$, de difféomorphisme réciproque $\mathbf{x}$

Vérifions ceci en calculant cette intégrale par un changement de variable. L'idée est de poser $t = \cos u$ (en fait, pour respecter notre cadre $u = \arccos t$, et lorsque t décrit $[-1, 1]$, u décrit $[0, \pi]$), on a alors,

(a) $du = u'(t)\ dt$, ce qui donne une formule compliquée..On a aussi $dt = t'(u)\ du = -\sin u\ du$

(b) lorsque $t = -1$, $u = \pi$

(c) lorsque $t = 1$, $u = 0$

(d) $\sqrt{1 - t^2} = \sqrt{1 - \cos^2 u} = |\sin u| = \sin u$ car $u \in [0, \pi]$ et $\sin u$ est positif.

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\ dt = -\int_{\pi}^{0} \sin^2 u\ du = \int_{0}^{\pi} \sin^2 u\ du$$

Noter qu'on a fait le changement $t = \cos u$ dans l'intégrale de gauche et, comme par miracle, on tombe, à droite, sur l'intégrale I cherchée. Il reste à calculer la dernière intégrale, ce que l'on fait en **linéarisant** $\sin^2 u$: on a

$$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$$

et donc une primitive de $\sin^2 u$ est

$$\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sin u \cos u.$$

On a donc

$$I = \frac{1}{2}[u - \sin u \cos u]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Une primitive de $\sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1, +1]$ est donnée par

$$F(x) = \int_{1}^{x} \sqrt{1 - t^2}\ dt$$

Effectuons le même changement de variable $t = \cos u$ que précédemment. On a

(a) $dt = -\sin u\ du$

(b) lorsque $u = 0$, $t = 1$

(c) lorsque $u = \arccos x$, $t = \cos \arccos x = x$

(d) $\sqrt{1 - t^2} = \sqrt{1 - \cos^2 u} = |\sin u| = \sin u$ car $u \in [0, \pi]$ et $\sin u$ est positif.

et donc

$$\int_{0}^{\arccos x} \sin^2 u\ du = -\int_{1}^{x} \sqrt{1 - t^2}\ dt = F(x)$$

Finalement, on a donc

$$F(x) = -\frac{1}{2}[u - \sin u \cos u]_0^{\arccos x} = \frac{1}{2}(-\arccos x + x\sqrt{1 - x^2})$$

Chapitre 6

Développements limités

Nous avons vu dans les chapitres précédents comment continuité et dérivabilité d'une fonction apportent des informations respectivement sur l'approximation d'une fonction par les constantes et les fonctions affines.

1. Si f est continue en x_0, il existe une fonction ϵ, de limite 0 en 0 telle que, pour tout x dans un voisinage de x_0 on a
$$f(x) = f(x_0) + \epsilon(x - x_0)$$
$\epsilon(x - x_0)$ mesure la différence entre la fonction f et la fonction **constante** $x \mapsto f(x_0)$. La continuité exprime donc simplement que cette différence devient nulle lorsque $x \to x_0$.
2. Si f est dérivable en x_0, il existe une fonction ϵ, de limite 0 en 0 telle que, pour tout x dans un voisinage de x_0 on a
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0)$$
$(x - x_0)\epsilon(x - x_0)$ mesure ici la différence entre la fonction f et la fonction **affine** $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. La dérivabilité exprime donc simplement que cette différence devient nulle lorsque $x \to x_0$ **plus rapidement** que $x - x_0$.

Nous allons voir maintenant que le fait que f soit plusieurs fois dérivable permet ce type de comparaison entre la fonction f et une fonction **polynomiale**.

6.1 Dérivées d'ordre n , formules de Taylor avec reste intégral

6.1.1 Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2

Définition 73 *On dit que f une fonction est deux fois continuement dérivable sur un intervalle I (on dira aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur I) si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si la fonction f', qui est alors bien définie sur I est elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On note*
$$f'' = (f')'$$
la **dérivée seconde** *de f.*

Théorème 74 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ sur I, $a \neq b \in I$ alors*
$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\ dt \\ &= f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 \int_0^1 (1-s)f''(a+s(b-a))\ ds \end{aligned}$$

Preuve. Il s'agit d'une intégration par parties

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \int_a^b f'(t)\ dt \\ &= [-(b-t)f'(t)]_a^b + \int_a^b (b-t)f''(t)\ dt \\ &= (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\ dt \end{aligned}$$

Pour la deuxième formule, on fait le changement de variable $t = a + s(b-a)$, $b - t = (1-s)(b-a)$, $dt = (b-a)ds$, $t = a$ pour $s = 0$, $t = b$ pour $s = 1$. ◇

6.1.2 Dérivées d'ordre n

Définition 75 *Soit n un entier naturel, on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, est $n+1$ fois continuement dérivable sur I (on dira aussi de classe $\mathcal{C}^{n+1}$) si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et si sa dérivée n-ème est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On note $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ sa dérivée $n+1$-ème.*

Exemples et Remarques

1. Une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur I est, par convention, une fonction continue sur I, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I est une fonction dérivable sur I telle que f' est continue sur I.
2. La définition précédente est récursive. Pour vérifier qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^3$ sur I, on a besoin de savoir d'abord qu'elle est $\mathcal{C}^2$ et de vérifier que $f^{(2)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur I.
3. La convention de notation pour les premières dérivées est la suivante $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$. L'écriture de droite est souvent préférée lors de la manipulation d'une de ces fonctions. Par exemple, après calcul, on a $f''(x) = \dots$. L'écriture de gauche est préférée lors de l'écriture de formule compactes comme on va le voir ci-dessous.
4. Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, pour tout entier naturel n

Proposition 76

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I alors f, f',...,$f^{(n)}$ existent et sont continues sur I.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, λ est une constante alors $f+g$, $\lambda.f$, $f.g$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $g : J \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Exemples et Remarques

1. Les formules pour $(f+g)^{(n)}$ et $(\lambda.f)^{(n)}$ sont simples. On a

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \text{ et } (\lambda.f)^{(n)} = \lambda.f^{(n)}$$

2. La formule pour $(f.g)^{(n)}$ est plus compliquée mais se démontre aisément par récurrence sur n d'une façon similaire à la formule du binôme de Newton. On a la **formule de Leibniz**

$$\begin{aligned} (f.g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}.g^{(n-k)} \\ &= f.g^{(n)} + nf'.g^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} f''.g^{(n-2)} + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}.g'' + + nf^{(n-1)}.g' + g^{(n)}.f \end{aligned}$$

3. Il existe une formule pour $(g \circ f)^{(n)}$ appelée **Formule de Faa Di Bruno**. Elle est trop horrible pour être reproduite ici et la formule exacte est d'une utilité assez faible à notre niveau.

Exemples et Remarques

1. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de même que exp, sin, cos
2. ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
3. $\sqrt{\ }$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ mais ne l'est pas sur son ensemble de définition : il y a un problème en 0.

6.1.3 Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n \geq 1$

Théorème 77 (Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n \geq 1$**)** *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur l'intervalle* I*, alors si* $a \neq b \in I$*,*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\ dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\ dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + (b-a)^n \int_0^1 \frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+s(b-a))\ ds \end{aligned}$$

Exemples et Remarques

1. Pour $n = 1$, c'est la formule $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\ dt$, pour $n = 2$ c'est la formule précédente
2. Si $f = P$ est un polynôme de degré $\leq d$, en appliquant cette formule pour $n = d+1$, pour a quelconque et $b = x \in \mathbb{R}$, on obtient, car $P^{(d+1)} = 0$, la formule suivante dite **formule de Taylor pour les polynômes**

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{(x-a)^k}{k!}P^{(k)}(a)$$

3. La preuve de cette formule suit les traces de la formule pour $n = 2$: il s'agit de faire une intégration par parties sur le reste à l'ordre $n-1$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\ dt &= \left[-\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\right]_a^b + \\ &\quad + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ dt \end{aligned}$$

La forme avec $\int_0^1$ s'obtient comme précédemment grâce au changement de variable $t = a + s(b-a)$.

Exercice résolu. Montrer que pour $x > 0$, on a l'inégalité

$$|e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})| \leq \frac{x^3}{6}e^x$$

Exercice résolu. Montrer que pour un réel x quelconque on a

$$|\sin x - (x - \frac{1}{6}x^3)| \leq \frac{|x|^5}{120} \text{ et } |\cos x - (1 - \frac{1}{2}x^2)| \leq \frac{|x|^4}{24}$$

6.2 Formules de Taylor-Young

6.2.1 A l'ordre 2

Théorème 78 (Taylor-Young à l'ordre 2) *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$ sur I, un intervalle contenant 0. Il existe une fonction ϵ, définie sur un voisinage de 0 et de limite en 0 en 0 telle que, pour $x \in I$, voisin de 0, on a*

$$f(x) = \underbrace{f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0)}_{\text{polynôme de Taylor d'ordre 2 de } f \text{ en } 0} + \underbrace{x^2\epsilon(x)}_{\text{reste de Young d'ordre 2}}$$

Preuve. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à f entre 0 et x et on obtient alors,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + x^2\int_0^1 (1-s)[f''(sx) - f''(0)]\ ds$$

On pose donc $\epsilon(x) = \int_0^1 (1-s)[f''(sx) - f''(0)]\ ds$ et il s'agit simplement de montrer que cette fonction tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Soit $\eta > 0$ donné. Comme f'' est continue en 0, il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout réel y, $|y| \leq \alpha$, $|f''(y) - f''(0)| \leq \eta$. Si $|x| \leq \alpha$, lorsque $s \in [0,1]$, $|sx| \leq \alpha$ et donc

$$|(1-s)[f''(sx) - f''(0)]| \leq \eta(1-s)$$

D'après la proposition 69, il reste donc

$$|\epsilon(x)| \leq \frac{1}{2}\alpha \leq \alpha,$$

ce qui montre bien ce que nous cherchions.

$\diamond$

Exemples et Remarques

1. Ce qui est important dans cette formule c'est que lorsque $x \to 0$, le terme en $x^2\epsilon(x)$ tend vers 0 beaucoup plus vite que x^2 qui lui même tend vers 0 plus vite que x, la puissance précédente intervenant dans le polynôme de Taylor.
2. Nous ne voulons retenir aucune information particulière sur ϵ si ce n'est qu'elle tend vers 0 en 0, même si une majoration de la quantié $f''(y) - f''(0)$ nous permettrait de quantifier plu précisémment l'approximation de f par son polynôme de Taylor.

6.2.2 A l'ordre $n \geq 0$

Ce qui a été développé à l'ordre 2 dans la partie précédente se généralise à un ordre $n \geq 0$ quelconque, on a

Théorème 79 (Taylor-Young à l'ordre n) *Soit $n \geq 0$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^n$ sur I, un intervalle contenant 0. Il existe une fonction ϵ, définie sur un voisinage de 0 et de limite en 0 en 0 telle que, pour $x \in I$, voisin de 0, on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\epsilon(x) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)}_{\text{polynôme de Taylor d'ordre } n \text{ de } f \text{ en } 0} + \underbrace{x^n\epsilon(x)}_{\text{reste de Young d'ordre } n} \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu le type d'approximation annoncé en introduction à ce chapitre.

e^x	$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$	
$\sin x$	$= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x)$	
$\cos x$	$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x)$	
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$	série géométrique
$\ln(1-x)$	$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + x^n\epsilon(x)$	
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha.x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$	binôme de Newton
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$	série géométrique
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + x^n\epsilon(x)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$= 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x)$	
$\arctan x$	$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x)$	
$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x)$	
$\arcsin x$	$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x)$	

TAB. 6.1 – Les développements limités classiques lorsque $x \to 0$

6.2.3 Exemples classiques

En appliquant la formule de Taylor-Young aux fonctions classiques, on obtient le tableau 6.1 de développements limités classiques, ici n est un entier naturel quelconque.

Le tableau 6.1 est obtenu en utilisant les calculs suivants, pour tout entier p, on a

$$\begin{array}{rcl}(e^x)^{(p)} & = & e^x \\ (\sin)^{(2p)} & = & (-1)^p \sin \\ (\sin)^{(2p+1)} & = & (-1)^p \cos \\ (\cos)^{(2p)} & = & (-1)^p \cos \\ (\cos)^{(2p+1)} & = & (-1)^{p+1} \sin \\ \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(p)} & = & \dfrac{(-1)^p p!}{(1+x)^{p+1}} \\ ((1+x)^\alpha)^{(p)} & = & \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(p-1))(1+x)^{\alpha-p} \\ (\ln(1+x))^{(p)} & = & \dfrac{(-1)^{p+1}(p-1)!}{(1+x)^p},\ p \geq 1\end{array}$$

6.2.4 Formule de Taylor-Young en x_0

Nous n'avons obtenu jusqu'à présent qu'une formule de Taylor-Young exprimant l'approximation locale d'une fonction suffisamment régulière au voisinage du point 0. La question se pose de savoir ce qui se passe en un point x_0 quelconque. La réponse à cette question est donnée par le simple fait que si x est proche d'un point x_0 alors $h := x - x_0$ est proche de 0.

En d'autres termes, on se ramène toujours à étudier le comportement d'une fonction au voisinage de 0 en posant $h = x - x_0$. Une application de ce principe donne

Théorème 80 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $x_0 \in I$, il existe alors une fonction ϵ définie au voisinage de 0 telle que pour tout x voisin de x_0, on a*

$$\begin{array}{rcl}f(x) & = & f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots + \dfrac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \epsilon(x-x_0) \\ & = & \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}_{\text{polynôme de Taylor d'ordre } n \text{ de } f \text{ en } x_0} + \underbrace{(x-x_0)^n \epsilon(x-x_0)}_{\text{reste de Young d'ordre } n}\end{array}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Young à la fonction $g(h) = f(x_0 + h)$ définie au voisinage de 0. On a pour tout p que $g^{(p)}(h) = f^{(p)}(x_0 + h)$ et l'on substitue *in fine* , $x - x_0$ à h. ◇

Exercice résolu. Soit $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$ donner un DL d'ordre 2 de f en x_0.

- Méthode 1. On applique la formule de Taylor-Young f au point 1 à l'ordre 2.
  On a $f(1) = 6$, $f'(x) = 3x^2 + 4x$, $f'(1) = 7$, $f''(x) = 6x + 4$, $f''(1) = 13$. On a donc, pour une certaine fonction ϵ $\epsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$, que

$$f(1+h) = 6 + 7h + \frac{10}{2}h^2 + h^2\epsilon(h)$$

- Méthode 2. On peut calculer directement $f(1 + h)$. On a

$$\begin{array}{rcl}f(1+h) & = & (1+h)^3 + 2(1+h)^2 + 3 \\ & = & [1 + 3h + 3h^2 + h^3] + [2 + 4h + 2h^2] + 3 \\ & = & 6 + 7h + 5h^2 + h^3 \\ & = & 6 + 7h + 5h^2 + h^2\epsilon(h)\end{array}$$

  où ici $\epsilon(h) = h$.

Les deux résultats sont les mêmes. Chacune des deux méthodes possède son intérêt propre et l'on va voir dans la partie suivante comment mener des calculs de développement limités en suivant la deuxième méthode, i.e en évitant d'avoir recours à la formule de Taylor-Young.

6.3 Développements limités

6.3.1 Définition et propriétés générales

Définition 81 – *Développement en* 0. *On dit qu'une fonction* f, *définie au voisinage de* 0 *y admet un développement limité à l'ordre* n, *s'il existe* $n+1$ *nombres* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *et une fonction* ϵ *définie au voisinage de* 0, $\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$ *tels que, pour* x *voisin de* 0,

$$f(x)=a_0+a_1.x+\cdots+a_nx^n+x^n\epsilon(x)$$

– *Développement en* x_0. *On dit qu'une fonction* f, *définie au voisinage de* x_0 *y admet un développement limité à l'ordre* n, *s'il existe* $n+1$ *nombres* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *et une fonction* ϵ *définie au voisinage de* 0, $\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$ *tels que, pour* x *voisin de* x_0,

$$f(x)=a_0+a_1.(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\epsilon(x-x_0)$$

Autrement dit, en posant $h=x-x_0$, *si la fonction* $h\mapsto f(x_0+h)$ *admet un développement limité au voisinage de* 0.

Exemples et Remarques Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0, elle y admet, d'après la formule de Taylor-Young, un DL d'ordre n, dont les coefficients sont

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Proposition 82 (Unicité du DL) *Soit* n *un entier naturel fixé, si* $a_0,..,a_n$, $b_0,..,b_n$ *sont des nombres et si* ϵ_1 *et* ϵ_2 *sont deux fonctions définies au voisinage de* 0, $\lim_{h\to 0}\epsilon_1(h)=\lim_{h\to 0}\epsilon_2(h)=0$ *tels que, pour tout* x *voisin de* 0, $x\neq 0$, *on a*

$$a_0+a_1.x+\cdots+a_n.x^n+x^n\epsilon_1(x)=b_0+b_1.x+\cdots+b_n.x^n+x^n\epsilon_2(x),$$

alors $a_0=b_0$, $a_1=b_1$,...,$a_n=b_n$.

Preuve. Montrons la proposition pour $n=2$ afin de montrer comment s'enclenche la récurrence. On suppose donc que, au voisinage de 0,

$$a_0+a_1.x+a_2.x^2+x^2\varepsilon_1(x)=b_0+b_1.x+b_2.x^2+x^2\varepsilon_2(x),$$

a fortiori, on a que

$$a_0+\varepsilon_3(x)=b_0+\varepsilon_4(x),$$

et donc $a_0-b_0=\varepsilon_5(x)\to 0$ lorsque $x\to 0$. On a donc $a_0=b_0$.

Nous notons qu'au passage, nous venons de montrer la proposition pour $n=0$.

Nous injectons cette information dans l'égalité de départ pour obtenir que au voisinage de 0,

$$a_1.x+a_2.x^2+x^2\varepsilon_1(x)=b_1.x+b_2.x^2+x^2\varepsilon_2(x),$$

et donc, en divisant par $x\neq 0$, pour tout x au voisinage de 0, $x\neq 0$, on a que

$$a_1+a_2.x+x\varepsilon_1(x)=b_1+b_2.x+x\varepsilon_2(x)$$

Lorsque $x\to 0$, on obtient comme précédemment que $a_1=b_1$ et nous notons au passage que nous venons de montrer la proposition pour $n=1$. Comme, pour $x\neq 0$, x voisin de 0, on a

$$a_1+a_2.x+x\varepsilon_1(x)=b_1+b_2.x+x\varepsilon_2(x)$$

Le fait que la proposition soit vraie pour $n=1$, montre que $a_1=b_1$, (ce que l'on savait déjà) et que $a_2=b_2$, ce qui est nouveau.

Faisons maintenant une démonstration plus formelle de la proposition par récurrence sur n. Nous venons de voir que la proposition est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie pour un certain entier naturel n et montrons que cela implique qu'elle est vraie pour l'entier $n + 1$. Supposons donc donnés des nombres a_0,...,a_{n+1}, b_0,...,b_{n+1} et ε_1, ε_2 deux fonctions de limite nulle en 0. Supposons que pour tout $x \neq 0$ voisin de x, on a

$$a_0 + a_1.x + \cdots + a_n.x^n + a_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_1(x) = b_0 + b_1.x + \cdots + b_n.x^n + b_{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_2(x),$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient que $a_0 = b_0$ et en injectant cette information dans l'égalité précédente, puis en divisant par $x \neq 0$, on a que

$$a_1 + \cdots + a_{n+1}x^n + x^n\varepsilon_1(x) = b_1 + b_{n+1}x^n + x^n\varepsilon_2(x).$$

La véracité de la proposition au rang n implique alors que $a_1 = b_1$,..., $a_{n+1} = b_{n+1}$, ce qui est ce que l'on cherchait. $\diamond$

Exemples et Remarques

1. Le DL d'ordre n d'une fonction f en 0 donne le DL d'ordre $k < n$ de cette même fonction en 0 en « tronquant » celui ci au bon ordre. En effet, on a

$$\begin{array}{rl} a_0 + a_1.x + \cdots + a_k x^k & +a_{k+1}.x^{k+1} + \cdots + a_n.x^n + x^n\epsilon_1(x) = \\ a_0 + a_1.x + \cdots + a_k.x^k & +x^k \underbrace{[a_{k+1}.x + \cdots + a_n.x^{n-k} + x^{n-k}\epsilon(x)]}_{\tilde{\epsilon}(x)} \end{array}$$

2. Si f est une fonction paire admettant un DL d'ordre n en 0, les coefficients d'indice impair sont tous nuls et le DL ne comporte ainsi que des puissance paires de x. En effet supposons que pour tout x voisin de 0, on a

$$f(x) = a_0 + a_1.x + \cdots + a_n.x^n + x^n\epsilon_1(x)$$

En remplaçant x par $-x$, n a donc que

$$f(-x) = a_0 - a_1.x + \cdots + (-1)^n a_n.x^n + (-1)^n x^n \epsilon_1(-x)$$

Comme $f(-x) = f(x)$ et que $(-1)^n x^n\epsilon_1(-x) = x^n\epsilon_2(x)$, on a alors que

$$a_0 + a_1.x + \cdots + a_n.x^n + x^n\epsilon_1(x) = a_0 - a_1.x + \cdots + (-1)^n a_n.x^n + x^n\epsilon_2(x)$$

Donc, en identifiant, $a_0 = a_0$, $a_1 = -a_1$, $a_2 = a_2$,...,$a_n = (-1)^n a_n$. Si k est impair on a donc $a_k = a - a_k$ et donc $a_k = 0$.

3. L'énoncé correspondant pour une fonction impaire est vrai.

6.3.2 Calculs directs de développement limités

Le cas d'une somme

Exercice résolu. La question est la suivante : Déterminer le DL d'ordre 2 de $f(x) = \sqrt{2+x} + e^x$.

Le principe de calcul est le suivant : si l'on connaît un DL d'ordre 2 de chacun des deux termes de la somme, en additionnant le tout, on obtient un DL d'ordre 2 de la fonction f. On a $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ d'une part et, il s'agit pour nous d'obtenir un DL d'ordre 2 de $\sqrt{2+x}$. On se ramène à celui de $\sqrt{1+x}$. On a pour tout x voisin de 0 que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+x} &= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{2}} \\
&= \sqrt{2}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^2\varepsilon_2(\frac{x}{2})}_{x^2\varepsilon_3(x)}\right] \\
&= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{32}x^2+x^2\varepsilon_3(x)
\end{aligned}$$

Ce qui est le DL d'ordre 2 de $\sqrt{2+x}$ en 0. On a maintenant

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+x}+e^x &= \begin{array}{ccccccc} 1 & + & x & + & \frac{1}{2}x^2 & + & x^2\varepsilon_1(x)+ \\ \sqrt{2} & + & \frac{\sqrt{2}}{4}x & - & \frac{\sqrt{2}}{32}x^2 & + & x^2\varepsilon_3(x) \end{array} \\
&= (1+\sqrt{2})+(1+\frac{\sqrt{2}}{4})x+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{32})x^2+x^2\varepsilon_4(x)
\end{aligned}$$

Le cas d'un produit

Exercice résolu. La question est la suivante : Déterminer le DL d'ordre 3 en 0 de $f(x)=\frac{e^x}{1-x}$.

Le principe de calcul est le suivant : si l'on connaît un DL d'ordre 3 en 0 de chacun des deux termes du produit, en multipliant, on obtient un DL d'ordre 3 de la fonction f. On a

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_1(x) \text{ et } \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^3\varepsilon_2(x)$$

En multipliant et en développant on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x}.e^x &= \big(1+x+x^2+x^3+x^3\varepsilon_2(x)\big)\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_1(x)\right(\\
&= \begin{array}{ccccccccc|l} 1 & + & x & + & \frac{1}{2}x^2 & + & \frac{1}{6}x^3 & + & x^3\varepsilon_1(x)+ \\ & & x & + & x^2 & + & \frac{1}{2}x^3 & + & \frac{1}{6}x^4+x^4\varepsilon_1(x)+ \\ & & & & x^2 & + & x^3 & + & \frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^5+x^5\varepsilon_1(x)+ \\ & & & & & & x^3 & + & x^4+\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{6}x^6+x^6\varepsilon_1(x)+ \\ & & & & & & & & x^3\varepsilon_2(x)\big(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_1(x)\big) \end{array} \\
&= 1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+x^3\varepsilon_3(x)
\end{aligned}$$

Ce qui importe de remarquer dans ce calcul, c'est que tous les termes à droite de la barre sont du type $x^3\epsilon(x)$, leur somme est donc encore du même type et nous l'avons notée $x^3\varepsilon_3(x)$.

Le cas d'une composée

Supposons que f et g admettent des DL d'un certain ordre n en 0 et que $g(0)=0$, nous allons voir, sur des exemples, comment calculer le DL en 0 de $f\circ g$. L'idée consiste à substituer dans le DL de f la valeur de g, de développer brutalement les termes apparaissant en plaçant systématiquement les termes du type $x^n\epsilon(x)$ ensemble.

Exercice résolu. La question est la suivante : Déterminer le DL d'ordre 3 en 0 de $h(x)=\frac{1}{1+\sin x}$.

On reconnaît ici $f\circ g$ avec $f(u)=\frac{1}{1+u}$ et $u=g(x)=\sin x$ On a d'une part, que pour tout u dans un voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+u^3\varepsilon_4(u)$$

d'autre part, pour tout x au voisinage de 0, on a

$$u=\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_5(x)$$

En substituant, on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sin x} = &\quad 1-\left(x-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_5(x)\right)+\left(x-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_5(x)\right)^2\\ &-\left(x-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_5(x)\right)^3+\left(x-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_5(x)\right)^3\varepsilon_4(\sin x)\end{aligned}$$

On remarque dans un premier temps que $\varepsilon_4(\sin x)$ est du type $\varepsilon_6(x)$ car $\sin x \to 0$ lorsque $x \to 0$ et que le terme $\left(x-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_5(x)\right)^3\varepsilon_4(\sin x)$ est donc, après développement, du type $x^3\varepsilon_7(x)$.

Effectuons maintenant les développements des puissances de u. On a

$$\begin{aligned}u &= x-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_5(x)\\ u^2 &= \left(x-\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_5(x)\right)^2 = x^2+x^3\varepsilon_8(x)\\ u^3 &= \left(x-\frac{1}{6}x^3+x0^3\varepsilon_5(x)\right)^3 = x^3+x^3\varepsilon_9(x)\end{aligned}$$

Finalement :

$$\frac{1}{1+\sin x} = 1-(x-\frac{1}{6}x^3)+(x^2)-(x^3)+x^3\epsilon(x) = 1-x+x^2-\frac{5}{6}x^3)+x^3\epsilon(x)$$

Exercice résolu. La question est la suivante : Déterminer le DL d'ordre 3 en 0 de $h(x) = \frac{1}{1+e^x}$. On a $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_1(x)$ et donc

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2+u(x)}$$

avec

$$u(x) = x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_1(x) \to 0$$

Or, on a, (astuce pour obtenir le DL de $\frac{1}{2+x}$ en 0 à partir de celui de $\frac{1}{1+x}$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+u} &= \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\frac{u}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{u}{2}+\left(\frac{u}{2}\right)^2-\left(\frac{u}{2}\right)^3+\left(\frac{u}{2}\right)^3\varepsilon_2\left(\frac{u}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}u+\frac{1}{8}u^2-\frac{1}{16}u^3+u^3\varepsilon_3(u)\end{aligned}$$

On peut substituer dans cette expression la valeur de $u(x)$ définie précédemment **en remarquant que** $u(x)^3\varepsilon_3(u(x)) = x^3\varepsilon_4$ Par ailleurs

$$\begin{aligned}u(x) &= x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon_1(x)\\ u(x)^2 &= x^2+x^3+x^3\varepsilon_5(x)\\ u(x)^3 &= x^3+x^3\varepsilon_6(x)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)+\frac{1}{8}\left(x^2+x^3\right)-\frac{1}{16}\left(x^3\right)+x^3\varepsilon_7(x)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{48}x^3+x^3\varepsilon_7(x)\end{aligned}$$

Primitivation

Proposition 83 *Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I, voisinage de 0 et soit F une primitive de f sur I. Si f admet un DL en 0 à l'ordre n,*

$$f(x) = a_0 + a_1.x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$$

alors F admet un DL en 0 à l'ordre $n+1$,

$$F(x) = F(0) + a_0.x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x).$$

Cette proposition est issue directement du lemme suivant dont la preuve est très semblable à la preuve du Théorème 78

Lemme 84 *Soit $n \in \mathbb{N}$, ϵ une fonction définie, continue, au voisinage de 0, de limite nulle en 0. Il existe une fonction η définie, continue, au voisinage de 0, de limite nulle en 0 telle que, pour x voisin de 0,*

$$\int_0^x t^n \epsilon(t)\ dt = x^{n+1}\eta(x)$$

On obtient de la sorte les DL des fonctions arctan et arcsin en 0.

6.3.3 Utilisation des DL

Lever les formes indéterminées

Exercice résolu. « $\frac{0}{0}$ » Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{(\ln(1+x))^n}$ pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.
On a $\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1$, ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0 « à la même vitesse que x^3 ». Le réflexe naturel est donc de regarder à quelle vitesse $\ln(1+x)^n$ tend vers 0 et de comparer celle-ci avec x^3 : il s'agit donc de faire un DL en 0 de cette fonction, non dégénéré, au moins à l'ordre 3, On a

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon_2(x) \\
\ln(1+x)^2 &= x^2 - x^3x^3\varepsilon_3(x) \\
\ln(1+x)^3 &= x^3 + x^3\varepsilon_4(x) \\
\ln(1+x)^4 &= x^4 + x^4\varepsilon_5(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - x}{\ln(1+x)} &= \frac{-\frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)}{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon_2(x)} = \frac{-\frac{1}{6}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)} \to 0 \\
\frac{\sin x - x}{\ln(1+x)^2} &= \frac{-\frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)}{x^2 - x^3x^3\varepsilon_3(x)} = \frac{-\frac{1}{6}x + x\varepsilon_1(x)}{1 - x + x\varepsilon_3(x)} \to 0 \\
\frac{\sin x - x}{\ln(1+x)^3} &= \frac{-\frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)}{x^3 + x^3\varepsilon_4(x)} = \frac{-\frac{1}{6} + \varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_4(x)} \to -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Pour $n = 4$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - x}{\ln(1+x)^4} &= \frac{-\frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)}{x^4 + x^4\varepsilon_5(x)} \\
&= \frac{1}{x}\frac{-\frac{1}{6} + \varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_5(x)}
\end{aligned}$$

Ce qui tend vers $+\infty$ si $x \to 0$ par la gauche et vers $-\infty$ si $x \to 0$ par la droite.
Exercice résolu. « $1^{+\infty}$ ». Déterminer $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
On a

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= e^{\frac{1}{x^2}\ln(1-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x))} \\
&= e^{\frac{1}{x^2}(-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x))} \\
&= e^{-\frac{1}{2}+\epsilon(x)} \\
&\to e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Étude locale des courbes

Le problème est de déterminer la position de la courbe relativement à sa tangente en un point. En général, on n'obtient pas de résultat global mais, grâce aux DL, on peut obtenir un résultat local : i.e les positions relative du graphe et de la tangente sur un voisinage du point considéré.
Exemples et Remarques

1. Position du graphe de $\ln x$ et de sa tangente au point $x_0 = 2$.
   L'équation de la tangente en question est $y = \frac{1}{2}(x-2)+\ln 2$. La question qui se pose est celle du signe de $\ln x - (\frac{1}{2}(x-2)+\ln 2)$ lorsque x est proche de 2. Pour se ramener au voisnage 0, posons $h = x - 2$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(2+h) &= \ln 2(1+\frac{h}{2}) \\
&= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + h^2\epsilon(h)
\end{aligned}$$

   On a donc

$$\ln(2+h) - (\ln 2 + \frac{h}{2}) = h^2(-\frac{1}{8}+\epsilon(h))$$

   Lorsque h est suffisamment voisin de 0, $-\frac{1}{8}+\epsilon(h)$ est < 0 et donc le membre de droite est clairement négatif. On en déduit que pour h suffisamment voisin de 0, si $h \neq 0$,

$$\ln(2+h) < \ln 2 + \frac{h}{2}.$$

   Cela signifie que le graphe est, au voisinage de $x_0 = 2$, **sous** sa tangente en x_0.
2. Position du graphe de $\sin x$ et de sa tangente au point $x_0 = 0$.
   On a, au voisinage de 0,

$$\sin x - x = x^3(-\frac{1}{6}+\epsilon(x))$$

   Lorsque x est suffisamment voisin de 0, $-\frac{1}{6}+\epsilon(x) < 0$ et donc le membre de droite de l'égalité est, lorsque x est voisin de 0,
   (a) < 0 si $x > 0$,
   (b) > 0 si $x < 0$
   Cela signifie que le graphe est, au voisinage de 0,
   (a) **sous** sa tangente en 0, à droite de 0
   (b) **au-dessus** de sa tangente en 0, à gauche de 0
   On conclut donc que la tangente en 0 **traverse** le graphe en 0.

Dérivée seconde et extrema

Pour finir, voici un résultat permettant de conclure rapidement à la présence d'un extremum local en un point critique d'une fonction f. L'analogue de ce résultat pour les fonctions de deux variables réelles est la Proposition 141. Il s'agit simplement d'évaluer la position de la courbe par rapport à sa tangente en un point où celle-ci est horizontale.

Proposition 85 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$ un point critique de f,i.e. tel que $f'(x_0) = 0$ alors*

1. *Si $f''(x_0) > 0$, f admet en x_0 un minimum local*
2. *Si $f''(x_0) < 0$, f admet en x_0 un maximum local*

Preuve. Supposons que $f''(x_0) \neq 0$ et écrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en x_0 en tenant compte du fait que $f'(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + (x-x_0)^2 \epsilon(x-x_0) \\ &\overset{f''(x_0)\neq 0}{=} \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0)(1+\epsilon(x-x_0)) \end{aligned}$$

Comme $1+\epsilon(x-x_0) \to 1$ lorsque $x \to x_0$, la quantité $1+\epsilon(x-x_0)$ est strictement positive sur un certain voisinage de x_0. Sur ce voisinage, $f(x) - f(x_0)$ est donc du signe de $f''(x_0)$, ce qui garantit les conclusions annoncées. $\diamond$

Exemples et Remarques

1. Les cas des fonctions $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ et $f(x) = -x^4$ en 0 montrent l'éventualité $f''(x_0) = 0$ ne peut permettre de conclure quant à l'extremalité de x_0.
2. Considérons les deux fonctions définies par $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$ et $g(x) = \cos x - \frac{1}{8}\cos 2x$. Il doit être clair que f et g ont toutes deux un point critique en 0. D'un calcul élémentaire, on tire que $f''(0) = 1$ et $g''(0) = -\frac{1}{2}$. En conclusion, f admet un minimum local en 0 alors que g y admet un maximum local.

Étude en $\pm\infty$: Asymptotes obliques

Le problème est de déterminer si une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ ressemble à une droite près de l'infini. Une telle droite sera dite « asymptote » au graphe de f en $+\infty$. Les mêmes considérations valent évidemment en $-\infty$.

Pour régler ceci, on cherche à exprimer que $f(x) = a.x + b + \epsilon(\frac{1}{x})$ pour une certaine fonction ϵ de limite 0 en 0.

Exercice résolu. La question est de déterminer une asymptote oblique, si elle existe, pour la fonction définie par la formule

$$f(x) = \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1}$$

et, si possible, la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.

Posons $u = \frac{1}{x}$. L'étude f au voisinage de $+\infty$ revient à l'étude de $f(\frac{1}{u})$ au voisinage droit de 0 et l'étude f au voisinage de $-\infty$ revient à l'étude de $f(\frac{1}{u})$ au voisinage gauche de 0.

Commençons par l'étude au voisinage de $+\infty$. On a, en simplifiant que

$$g(u) = f(\frac{1}{u}) = \frac{\frac{1}{u}+2}{\frac{1}{u}}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1} = (1+2u)\sqrt{\frac{1-u^2}{u^2}}$$

et donc, comme u est supposé positif, on donc que

$$g(u) = (\frac{1}{u}+2)\sqrt{1-u^2}$$

Il apparaît clairement sur cette écriture que $g(u)$ ressemble à $\frac{1}{u}$ au voisinage de 0. On se pose la question des termes suivants. On a $\sqrt{1-u^2} = 1-\frac{1}{2}u^2+u^2\epsilon(u)$ et donc, en développant, on obtient

$$g(u) = (\frac{1}{u}+2)(1-u^2+u^2\epsilon(u)) = \frac{1}{u}+2-\frac{1}{2}u+u\epsilon(u)$$

En revenant à f, on obtient donc que

$$f(x) = x+2-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\epsilon(\frac{1}{x})$$

Ce qui montre que $f(x)-(x+2)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$ et donc que la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$. Par ailleurs,

$$f(x)-(x+2) = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}+\epsilon(\frac{1}{x})\right)$$

Ce qui est négatif lorsque x est suffisamment voisin $+\infty$ et l'on peut donc dire que près de $+\infty$ la courbe est au dessous de son asymptote.

Chapitre 7

Fonctions réciproques

7.1 Généralités

7.1.1 Bijection

Définition 86 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de variable réelle, $A \subset D$ et $B \subset \mathbb{R}$. On dit que f établit une bijection de A dans (sur) B si pour tout $y \in B$, il existe un unique $x \in A$ tel que $y = f(x)$.*

Autrement dit, f établit une bijection de A sur B si pour tout y dans B, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x dans A admet une unique solution.

On dit de façon plus classique que $f : A \to B$ **est une bijection**.

Exemples et Remarques Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Pour que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admette **au moins** une solution, il faut que $y \geq 0$. Si $y > 0$, il est bien connu (et on le redémontrera plus loin) que l'équation en question admet deux solutions distinctes (non nulles et opposées). Pour que f établisse une bijection d'une partie A de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$, il nous faut une unique solution. On choisit en général la solution positive (que l'on note $\sqrt{y}$) et, dans notre langage, cela se traduit par le fait que f établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

On aurait pu choisir de prendre systématiquement la solution négative, on a aussi que f établit une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^+$.

7.1.2 Application réciproque

Si f établit une bijection de A sur B, alors, a tout $y \in B$, on peut faire correspondre $g(y) \in A$, l'unique solution de l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in A$. Cela définit une fonction $g : B \to A$ appelée **fonction réciproque** de f vue comme application de $A \to B$.

On note cette application $g = f^{-1}$ pour marquer son lien avec la fonction f. Remarquons que cette fonction f^{-1} dépend crucialement des ensembles A et B entre lesquels f établit une bijection.

Exemples et Remarques

1. Il ne faut surtout pas confondre f^{-1} avec la fonction $\frac{1}{f}$!
2. $f^{-1}(y)$ est l'unique x de A vérifiant $f(x) = y$. On a donc
   (a) $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout y dans B ($x = f^{-1}(y)$) vérifie que $f(x) = y$)
   (b) $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout x dans A (Si $z = f^{-1}(f(x))$, on a $f(z) = f(x)$ et $f(z) \in B$. Comme, il y a **unicité**, on en tire que $z = x$.)
3. Dans ce contexte, la fonction $f^{-1} : B \to A$ est une bijection de B sur A et sa fonction réciproque est $(f^{-1})^{-1} = f$ avec $f : A \to B$.
4. La fonction « racine carrée » $\sqrt{\ } : y \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt{y} \in \mathbb{R}^+$ est définie comme étant la bijection réciproque de la bijection $.^2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$.

Il faut bien se rendre compte que jusqu'à présent nous parlons de cette fonction $\sqrt{}$ mais nous n'avons aucune garantie quant à sa bonne définition.

7.1.3 Bijections et graphes

Le graphe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f de variable réelle à valeurs réelles est le sous-ensemble du plan formé par les points $(x, f(x))$ lorsque x décrit le domaine de définition de f.

Si $f : A \to B$ est une bijection, alors un couple (x, y) est dans $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $x \in A$, $y \in B$, $y = f(x)$

Cela est clairement équivalent au fait que le couple (y, x) est dans le graphe de f^{-1}.

Supposons que le plan est rapporté à un repère orthonormé alors les graphes de f et f^{-1}, plus précisémment, les courbes d'équation $y = f(x), x \in A$ et $y = f^{-1}(x), x \in B$, sont symétriques l'un de l'autre dans la symétrie othogonale d'axe la première bissectrice du plan, i.e la droite d'équation $y = x$.

Remarquons par ailleurs que les courbes d'équation $y = f(x), x \in A$ et $x = f^{-1}(y), y \in B$ sont égales.

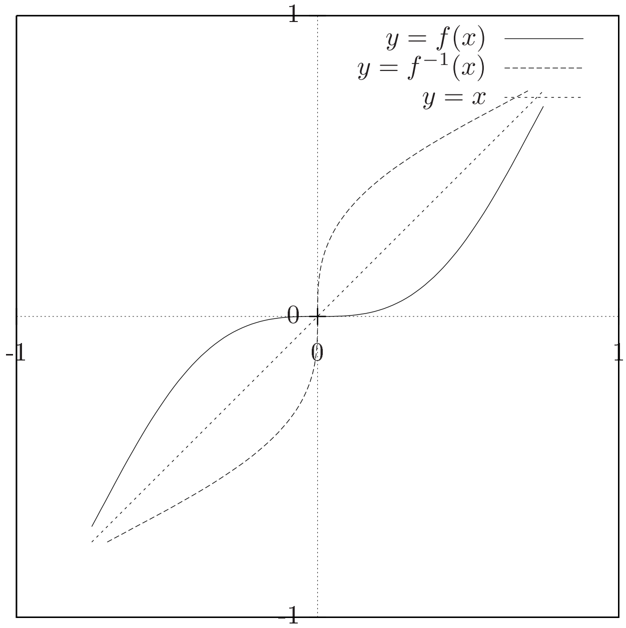

FIG. 7.1 – Dans un même repère **orthonormé**, les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice

7.1.4 Composées de bijections

Proposition 87 *Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux bijections alors $g \circ f : A \to C$ est une bijection et l'on a*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Preuve. Soit $z \in C$, il s'agit de montrer que l'équation $g(f(x)) = z$, d'inconnue $x \in A$ admet une unique solution et que cette solution est $x = f^{-1}(g^{-1}(z))$. On a

$$\begin{aligned} g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) &= g(g^{-1}(z)) \text{ car } f(f^{-1}(y)) = y \text{ pour } y \in B \\ &= z \text{ car } g(g^{-1}(z)) = z \text{ pour } z \in C \end{aligned}$$

Donc $x = f^{-1}(g^{-1}(z))$ est une solution de l'équation considérée.

Si $x \in A$ et $g(f(x)) = z$ alors $f(x) \in B$ et comme le seul élément $y \in B$ tel que $g(y) = z$ est $y = g^{-1}(z)$, on en déduit que $f(x) = g^{-1}(z)$. De même, si $y \in B$, le seul élément $x \in A$ tel que $f(x) = y$ est $x = f^{-1}(y)$ et donc, obligatoirement, $x = f^{-1}(g^{-1}(z))$. $\diamond$

7.2 Propriétés de régularité des fonctions réciproques

7.2.1 Le théorème de continuité

Théorème 88 *Soit f une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I alors*

(i) $J = f(I)$ est intervalle de $\mathbb{R}$

(ii) f établit une bijection de I sur J

(iii) La fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue, strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Preuve.

(i) C'est une des versions que nous avons donné du théorème des valeurs intermédiaires, le théorème 38.

(ii) Soit $y \in J$ fixé. Par définition même de l'ensemble $J = f(I)$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in I$ admet une solution. Rappelons que $f(I)$ est l'ensemble de **toutes** les images possibles des éléments de I par la fonction f.

Cette équation ne peut admettre qu'une solution car f est **strictement** monotone. En effet, si l'on dispose de deux solutions distinctes $x_1 < x_2$, on a alors $f(x_1) = y = f(x_2)$, ce qui est impossible car f étant strictement monotone, on a soit $f(x_1) < f(x_2)$, soit $f(x_1) > f(x_2)$.

(iii) Supposons que f est strictement croissante pour fixer les idées. Soient $y_1 < y_2 \in J$. De deux choses l'une, soit $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, soit $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Si le premier cas à lieu, comme f est croissante, on alors que

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$$

et donc $y_1 \geq y_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur y_1 et y_2, c'est donc le deuxième cas qui est vérifié.

Donc, pour $y_1 < y_2$, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, ce qui montre que f est strictement croissante.

(Hors cours)En ce qui concerne la continuité de f^{-1}. Si f n'est pas continue sur J, c'est qu'elle n'est pas continue en un certain point y_0 de J (continue à droite ou à gauche si y_0 est l'une des extrémités de J). Il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = y_0$. Si f^{-1} n'est pas continue en y_0, cela signifie qu'il existe une suite (y_n) de points de J, convergeant vers y_0 mais telle la suite de points de I, $x_n = f^{-1}(y_n)$, ne converge pas vers x_0. On peut, quitte à éliminer des termes de la suite (y_n), supposer que cette suite est strictement monotone. La suite $x_n = f^{-1}(y_n)$ est donc elle aussi strictement monotone.

Cette suite admet une limite ℓ dans $\mathbb{R}$, différente de x_0 et en analysant les différents cas, il existe alors un point m dans I, qui est strictement entre ℓ et x_0, ce qui montre, du fait de la stricte croissance de f, que pour tous les n à partir d'un certain rang, $y_n = f(x_n)$ et $y_0 = f(x_0)$ sont strictement séparés par $f(m)$, ce qui interdit la convergence de y_n vers y_0 et mène donc à une contradiction.

$\diamond$

7.2.2 Détermination de l'intervalle image

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Si a et b sont les bornes de I (a et b pouvant être des nombres réels ou les symboles $\pm\infty$) alors $J = f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x)$. La nature de l'intervalle J en la borne $\lim_{x\to a} f(x)$ est la même que celle de l'intervalle I en a.

Exemples et Remarques

1. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. La fonction f est continue, strictement décroissante sur $I =]0,1]$. On a $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$. On en déduit que $J = f(I) = [1, +\infty[$.
2. La fonction tangente est continue, strictement croissante sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty$, on a donc $\tan(I) = \mathbb{R}$.

7.2.3 Le théorème de dérivabilité

Théorème 89 *Soit f une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I. Soit $J = f(I)$ et $f^{-1} : J \to I$ la fonction réciproque.*

(i) Si $x_0 \in I$, $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in J$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

(ii) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

(iii) Soit $n \geq 1$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Preuve. Les points (ii) et (iii) sont clairement des conséquences du point (i). Nous ne prouvons que celui-ci.

Comme f est dérivable en x_0, il existe une fonction ϵ de limite nulle en 0 telle que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon(x - x_0) = y_0 + (x - x_0)(f'(x_0) + \epsilon(x - x_0))$$

Soit $y \in J$, $y = f(x)$ pour un unique $x \in I : x = f^{-1}(y)$. En substituant $y = f(x)$ dans le développement limité précédent, on a

$$y - y_0 = (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))(f'(x_0) + \epsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)))$$

Comme $f'(x_0) \neq 0$, lorsque $y \to y_0$, $\frac{1}{f'(x_0)}\epsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) \to 0$ car f^{-1} est continue en y_0. Il existe donc une fonction η définie au voisinage de 0 et de limite nulle en 0 telle que $\eta(y - y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\epsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$ et

$$f'(x_0) + \epsilon(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) = f'(x_0)(1 + \eta(y - y_0))$$

Par ailleurs, $1 + \eta(y - y_0)$ a pour limite 1 lorsque $y \to y_0$ et donc pour tout y suffisamment proche de y_0,

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = (y - y_0)\frac{1}{f'(x_0)}\frac{1}{1 + \eta(y - y_0)} = (y - y_0)\frac{1}{f'(x_0)} + (y - y_0)\left(\frac{1}{1 + \eta(y - y_0)} - 1\right)$$

Comme $\left(\frac{1}{1+\eta(y-y_0)} - 1\right)$ tend vers 0 lorsque $y \to y_0$, on a donc obtenu un développement limité d'ordre 1 de f^{-1} au voisinage de y_0. Ceci démontre que f^{-1} est dérivable en y_0 et nous donne la valeur de $(f^{-1})'(y_0)$ annoncée. $\diamond$

7.3 Les fonctions racine n-ième, $\sqrt[n]{x}$

7.3.1 Rappel : Les fonctions « puissance » d'exposant entier

Si n est un entier naturel, $n \neq 0$ et x un nombre réel, on pose

$$x^n = \underbrace{x \dots x}_{n \text{ fois}}$$

Proposition 90 *On a les propriétés suivantes, pour x, y des réels, m, n des entiers naturels distincts de zéro.*

1. $1^n = 1$
2. $x^{m+n} = x^m.x^n$
3. $(xy)^n = x^n.y^n$
4. $(x^n)^m = x^{mn}$
5. *Binôme de Newton*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k} = \sum_{\substack{k+\ell=n \\ 0\leq k,\ell}} \frac{n!}{k!\ell!} x^k y^\ell$$

Les règles 1., 2., et 4. suggèrent l'extension de cette notation à $n = 0$ et aux entiers négatifs pourvu que l'on considère des nombres réels $x \neq 0$.

On pose, pour $n = 0$, $x^0 = 1$ et, pour n entier, $n < 0$, $x \neq 0$,

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$$

On vérifie alors facilement la proposition suivante

Proposition 91 *On a les propriétés suivantes, pour x, y des réels* **non nuls***, m, n des entiers relatifs,*

1. $1^n = 1$
2. $x^{m+n} = x^m.x^n$
3. $(xy)^n = x^n.y^n$
4. $(x^n)^m = x^{mn}$

Soit n un entier relatif. Posons p_n, (comme "puissance n") la fonction définie par $p_n(x) = x^n$. Lorsque $n \geq 0$, son domaine de définition est $\mathbb{R}$ alors que pour $n < 0$, son domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposition 92

1. *Pour $n \geq 1$, p_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est donnée par*
$$p_n'(x) = n.p_{n-1}(x) = n.\frac{p_n(x)}{x}$$
2. *Pour $n \leq -1$, p_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$. Sa dérivée est donnée par*
$$p_n'(x) = n.\frac{p_n(x)}{x} = n.p_{n-1}(x)$$

7.3.2 Le cas n impair

On suppose ici que n est un entier naturel impair.

Proposition 93

1. *p_n est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *p_n définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque, continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ est notée avec la notation racine n-ième*
$$p_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$
3. *p_n^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.*
4. *Pour $x \neq 0$, on a*
$$(p_n^{-1})'(x) = \frac{1}{n}\frac{p_n^{-1}(x)}{x}$$
5. *p_n^{-1} n'est pas dérivable en 0. Le graphe de p_n admet, en 0, une tangente verticale.*

7.3.3 Le cas n pair

On suppose ici que n est un entier naturel pair.

Proposition 94 *1. p_n est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

2. p_n définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Sa bijection réciproque, continue, strictement croissante sur $[0,+\infty[$ est notée avec la notation racine n-ième

$$p_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

3. p_n^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

4. Pour $x > 0$, on a

$$(p_n^{-1})'(x) = \frac{1}{n}\frac{p_n^{-1}(x)}{x}$$

5. p_n^{-1} n'est pas dérivable en 0. Le graphe de p_n admet, en 0, une demi-tangente verticale.

7.3.4 Puissances rationnelles

Posons, pour $x > 0$, pour n entier naturel non nul,

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

et pour $\alpha = \frac{p}{q}$, un nombre rationnel non nul sous forme réduite ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q sans facteurs premiers communs)

$$x^\alpha = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

x^α est donc, par définition, l'unique nombre $y > 0$ tel que $y^q = x^p$.

On peut remarquer que si $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ mais que la fraction n'est pas réduite, on a tout de même

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = x^\alpha.$$

En effet, soit d le PGCD de p et q, on a donc $p = d.p'$, $q = d.q'$, $\alpha = \frac{p'}{q'}$ est écrit sous forme réduite. Posons $y = (x^p)^{\frac{1}{q}}$. On a alors, la suite d'implications

$$\begin{array}{rcl} (y^{q'})^d & = & y^q = x^p = (x^{p'})^d \\ y^{q'} & = & x^{p'} \\ y & = & x^\alpha \end{array}$$

Nous conservons par ailleurs la convention que $x^0 = 1$.

Proposition 95 *On a les propriétés suivantes, pour x, y des réels > 0, α, β des nombres rationnels,*

1. $1^\alpha = 1$

2. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha.x^\beta$

3. $(xy)^\alpha = x^\alpha.y^\alpha$

4. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha.\beta}$

5. La fonction $p_\alpha :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ $x \mapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dérivée en $x > 0$,

$$p'_\alpha(x) = \alpha.p_{\alpha-1}(x) = \alpha.x^{\alpha-1}$$

Preuve. Montrons, à titre d'exemple, que $(xy)^\alpha = x^\alpha.y^\alpha$. On suppose que $\alpha = \frac{p}{q}$. Par définition, $(xy)^\alpha$ est le nombre réel $z > 0$ tel que $z^q = (xy)^p$. On a, en utilisant les règles de calcul déjà connues pour les exposants entiers, que

$$(x^\alpha.y^\alpha)^q = (x^\alpha)^q.(y^\alpha)^q = x^p.y^p = (x.y)^p,$$

et, comme par ailleurs $x^\alpha.y^\alpha > 0$, on a donc

$$x^\alpha.y^\alpha = (x.y)^\alpha$$

En ce qui concerne les problèmes de continuité, dérivation, la définition de p_α montre que $p_\alpha = p_{\frac{1}{q}} \circ p_p$. Comme p_p est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$ et que $p_{\frac{1}{q}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, on en déduit que p_α est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. On a de plus la formule, pour $x > 0$,

$$p'_\alpha(x) = p'_p(x).p'_{\frac{1}{q}}(p_p(x)) = p\frac{p_p(x)}{x}.\frac{1}{q}\frac{p_{\frac{1}{q}}(p_p(x))}{p_p(x)} = \frac{p}{q}\frac{p_\alpha(x)}{x} = \alpha x^{\alpha-1} = \alpha.p_{\alpha-1}(x)$$

$\diamond$

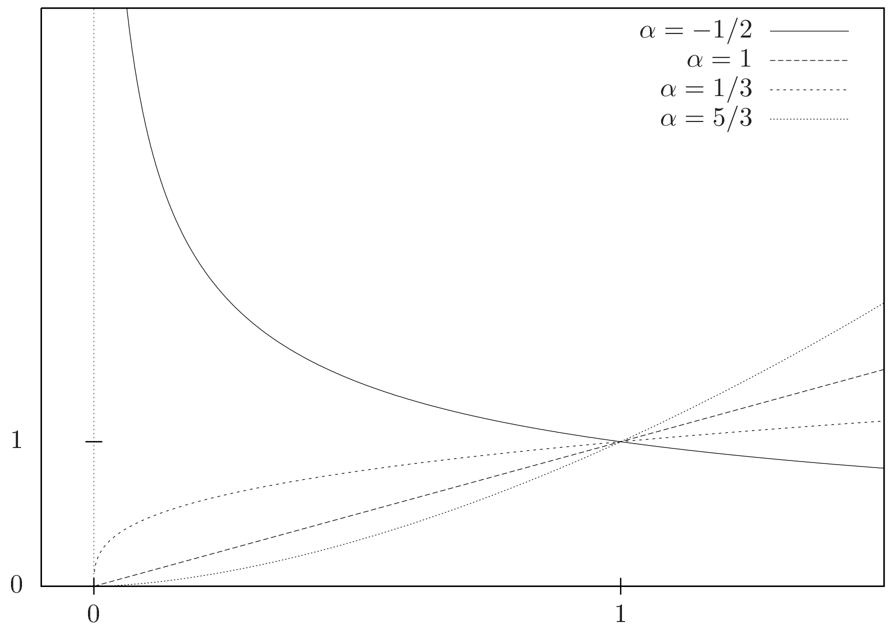

FIG. 7.2 – Les graphes de différentes fonctions puissances

Proposition 96 *1. Si $\alpha = 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est la fonction constante égale à 1.*

2. Si $\alpha \neq 0$, p_α est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, de bijection réciproque $p_{\frac{1}{\alpha}}$.

3. Si $\alpha < 0$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$. La fonction p_α est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

4. Si $\alpha > 0$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$, p_α se prolonge par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[0,+\infty[$, strictement croissante.

5. Si $\alpha \geq 1$, p_α se prolonge par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

6. Si $0 < \alpha < 1$, p_α n'est pas dérivable en 0. Son graphe y admet une demi-tangente verticale.

7.4 Les fonctions logarithme et exponentielle

7.4.1 Rappels : fonctions logarithme et exponentielle

Dans certains ouvrages, le logarithme népérien est défini comme étant la **primitive** s'annulant en 1 de $x \mapsto 1x$ sur l'intervalle $]0 + \infty[$. Cette définition nécessite la connaissance du théorème d'existence des primitives de fonctions continues, ce que nous n'aborderons que dans le chapitre 10.

Théorème 97 *Il existe une unique fonction, noté* $\ln$*, appelée le* **logarithme népérien** *définie, de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]0, +\infty[$ *vérifiant,*

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

De ceci, on peut déduire immédiatement les propriétés suivantes

Proposition 98 1. *Pour tous* $x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

2. *Pour tout* $x > 0$*,* α *rationnel,* $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.
3. $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$, $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Preuve. Prouvons par exemple le point 2. Fixons α rationnel et considérons la fonction f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x^\alpha)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a $f(1) = 0$ et

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\frac{1}{x^\alpha} = \alpha\frac{1}{x}$$

On en déduit que $f(x) = \alpha \ln(x)$ pour $x \in I$, ce qui est ce que nous cherchons.

En ce qui concerne le point 3., la stricte croissance de ln est issue de la stricte positivité de sa dérivée. On déduit de ceci que $\ln 2 > 0$. Le point 2. implique que $\ln 2^n = n \ln 2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. 2^n et $n \ln 2$ tendent vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit alors que $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. ⋄

Dans la plupart des cours de terminale actuels, la fonction exponentielle est définie comme étant la seule solution, valant 1 en 0 d'une certaine équation différentielle. Cette définition nécessite la connaissance de résultats d'existence de solutions d'équations différentielles.

Théorème 99 *Il existe une unique fonction, notée* $\exp$*, appelée l'***exponentielle***, de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant*

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp' = \exp$

De ceci, on peut déduire immédiatement les propriétés suivantes

Proposition 100 1. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x). \exp(y)$

2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* α *rationnel,* $\exp(\alpha.x) = (\exp(x))^\alpha$.
3. $\exp$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$

Exemples et Remarques

1. En posant $e = \exp(1)$, le point 2. implique que pour tout α rationnel, $e^\alpha = \exp(\alpha)$. On note, pour x réel
$$e^x := \exp(x)$$
Les régles de calcul fondamentales sur les puissances sont respectées
   (a) $e^0 = 1$
   (b) Pour x, y réels, $e^{x+y} = e^x.e^y$
   (c) Pour x réel, α rationnel, $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$

2. De quelque point de vue que l'on parte, on peut toujours définir l'exponentielle à partir du logarithme et vice versa en se basant sur la remarque suivante

   exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, ln est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Ces deux bijections sont réciproques l'une de l'autre.

3. Par exemple, supposons que la fonction ln soit définie en premier par son théorème d'existence et soit exp sa fonction réciproque. Comme ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée ne s'y annule pas, exp est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\exp' = \frac{1}{\ln' \circ \exp} = \frac{1}{\frac{1}{\exp}} = \exp$$

   Par ailleurs $\exp(0) = 1$ car $\ln 1 = 0$.

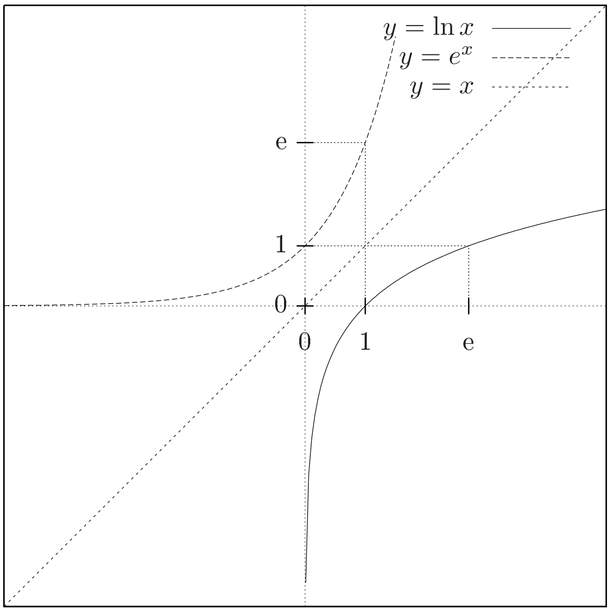

FIG. 7.3 – Les graphes $y = \ln x$ et $y = e^x$

7.4.2 Croissances comparées

Proposition 101 *1. Soit α un nombre rationnel,*

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^x = +\infty$$

2. Soit α un nombre rationnel,

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

3. Soit $\alpha > 0$, un nombre rationnel,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \ln x = 0$$

4. Soit $\alpha < 0$, un nombre rationnel,

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \ln x = 0$$

Preuve. La difficulté majeure est de prouver le point 1. Soit n un entier naturel, d'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$, comme la dérivée $n+1$ de l'exponentielle est > 0, on a, pour $x > 0$,

$$e^x \geq 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Soit α un nombre rationnel donné et n un entier naturel, strictement supérieur à $-\alpha$. On a donc

$$x^\alpha e^x \geq x^\alpha + \cdots + \frac{1}{n!} x^{\alpha+n}$$

Comme $\alpha + n > 0$, le membre de droite de cette inégalité tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, ce qui implique la limite annoncée.

Pour le deuxième point, il suffit de se rappeler que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. On a donc

$$x^\alpha e^{-x} = \frac{1}{x^{-\alpha} e^x}$$

D'après le point 1., le membre de droite de cette égalité tend vers 0 car son dénominateur tend vers $+\infty$.

Pour le point 3., en posant $y = \alpha \ln x$, l'existence et la valeur de la limite cherchée sont les mêmes que celle de la limite de $\frac{1}{\alpha} y.e^y$ lorsque $y \to -\infty$. On est donc ramenés au point 2. Le dernier point se traite de manière similaire. $\diamond$

7.4.3 Exponentielles et logarithmes de base $a > 0$, les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Lorsque a est un nombre réel > 0 et x est un nombre rationnel, on a la formule

$$a^x = (\exp(\ln a))^x = e^{x \ln a}$$

Nous définissons alors, pour x réel quelconque

$$a^x := e^{x \ln a}$$

Lorsque $a \neq 1$, $\exp_a : x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in]0, +\infty[$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction $\ln_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par

$$\ln_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

La valeur $a = 10$ est particulièrement prisée en physique-chimie, par exemple pour définir le Ph d'une solution ou le bruit en décibels. Elle est notée le plus souvent par $\ln_{10} = \log$.

Pour α un réel quelconque, nous venons donc de définir aussi la fonction p_α par $p_\alpha(x) = x^\alpha$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Ces fonctions ont déjà été étudiées pour les valeurs de α rationnelles et les résultats des propositions 95 et 96 sont encore valables en supposant les exposants réels.

7.5 Fonctions trigonométriques réciproques

Les généralités sur les fonctions réciproques montrent que celles-ci servent à résoudre une équation du type $f(x) = y$ d'inconnue x pour un certain paramètre y. Modulo l'hypothèse de bijectivité, on obtient que la seule solution d'une telle équation est $x = f^{-1}(y)$.

D'un intérêt particulier sont les équations trigonométriques, i.e faisant intervenir les fonctions tan, sin, cos etc. Certaines d'entre elles pourront être résolues grâce aux fonctions réciproques arctan, arcsin, arccos, etc.

Le lecteur doit cependant être conscient que la périodicité des fonctions trigonométriques usuelles est un obstacle à leur inversion.

7.5.1 La fonction arctan

La fonction tan est définie par $\tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$ en tout point x tel que $\cos x \neq 0$. Elle est donc définie sur

$$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

tan est impaire et π-périodique et l'on a la proposition suivante qui résume ses propriétés

Proposition 102 *1.* tan, *restreinte à l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur cet intervalle.*

2. Sa dérivée y est donnée par la formule $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$ *et est donc* > 0 *sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

3.

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty,$$

4. $\tan 0 = 0$, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, *etc.*

On en déduit donc que

Théorème 103 *1.* tan *définit une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa bijection réciproque est notée* arctan.

2. arctan *est une fonction strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

3. arctan *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est définie, pour* $x \in \mathbb{R}$, *par*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

4.

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = +\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

5. arctan *est impaire,* $\arctan(0) = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, *etc.*

Concernant la résolution d'équations, on a

Proposition 104 *Soit* $y \in \mathbb{R}$ *fixé.* x *est solution de l'équation* $\tan x = y$ *si et seulement si il existe un nombre relatif* k *tel que* $x = \arctan y + k\pi$.

La proposition suivante, qui se prouve en etudiant la dérivée du membre de gauche, permet de ramener l'étude de $\arctan x$ en $+\infty$ à celle en 0.

Proposition 105 *On a, pour tout* $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

7.5.2 La fonction arcsin

La fonction sin est impaire et 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La proposition suivante résume ses propriétés sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition 106 *1.* sin, *restreinte à l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur cet intervalle.*

2. Sa dérivée, sur cet intervalle, est donnée par la formule $\sin'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. *Cette dérivée est donc* > 0 *sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$.

3. $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = +1$, $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *etc.*

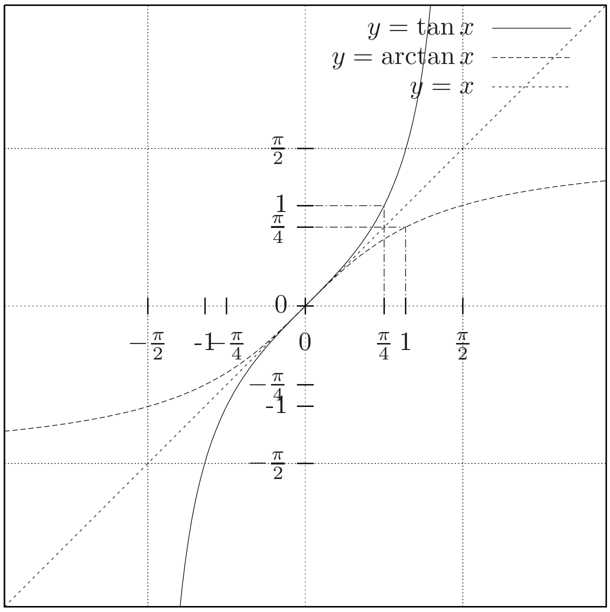

FIG. 7.4 – Les graphes de $y = \tan x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $y = \arctan x$, $x \in]-1, +1[$

On en déduit donc que

Théorème 107 *1.* sin *définit une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1, +1]$. *Sa bijection réciproque est notée* arcsin.

2. arcsin *est une fonction continue strictement croissante de* $[-1, +1]$ *sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$.

3. arcsin *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1, +1[$ *et sa dérivée est définie, pour* $x \in]-1, +1[$, *par*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

4. arcsin *est impaire,* $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, *etc.*

5. Le graphe de arcsin *admet des demi-tangentes verticales aux points* $x = \pm 1$.

Concernant la résolution d'équations, on a

Proposition 108 *Soit* $y \in [-1, +1]$ *fixé.* x *est solution de l'équation* $\sin x = y$ *si et seulement si il existe un nombre relatif* k *tel que* $x = \arcsin y + 2k\pi$ *ou* $x = \pi - \arcsin y + 2k\pi$.

7.5.3 La fonction arccos

La fonction cos est paire et 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La proposition suivante résume ses propriétés sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Proposition 109 *1.* cos, *restreinte à l'intervalle* $[0, \pi]$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur cet intervalle.*

2. Sa dérivée, sur cet intervalle, est donnée par la formule $\cos'(x) = -\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. *Cette dérivée est donc* < 0 *sur l'intervalle* $]0, +\pi[$.

3. $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \pi = -1$ *etc.*

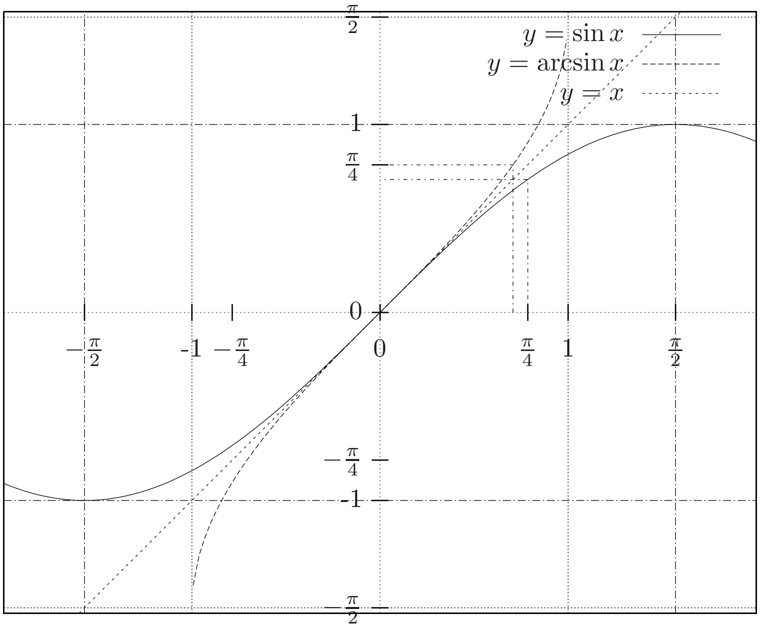

FIG. 7.5 – Les graphes de $y = \sin x$ et $y = \arcsin x$

On en déduit donc que

Théorème 110 *1.* cos *définit une bijection de* $[0, \pi]$ *sur* $[-1, +1]$. *Sa bijection réciproque est notée* arccos.

2. arccos *est une fonction continue strictement décroissante de* $[-1, +1]$ *sur* $[0, \pi]$.

3. arccos *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1, +1[$ *et sa dérivée est définie, pour* $x \in]-1, +1[$, *par*

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

4. $\arccos(1) = 0$, $\arccos -1 = \pi$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, *etc.*

5. Le graphe de arccos *admet des demi-tangentes verticales aux points* $x = \pm 1$.

Concernant la résolution d'équations, on a

Proposition 111 *Soit* $y \in [-1, +1]$ *fixé.* x *est solution de l'équation* $\cos x = y$ *si et seulement si il existe un nombre relatif* k *tel que* $x = \arccos y + 2k\pi$ *ou* $x = -\arccos y + 2k\pi$.

On a la relation suivante entre arcsin et arccos. La preuve en est aisée en dérivant le membre de gauche. Cette relation est à rapprocher de la formule de trigonométrie bien connue $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ valable pour tout réel x.

Proposition 112 *Pour tout* $x \in [-1, +1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

7.6 Transformation polaires/cartésiennes

Dans le plan muni d'un repère othonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on décrit la position d'un point M grâce à ses coordonnées cartésiennes. Il est parfois utile de décrire la position à l'aide de ρ, la distance de M à l'origine et de l'angle θ, défini modulo 2π que fait $\vec{OM}$ avec le vecteur $\vec{i}$ dirigeant

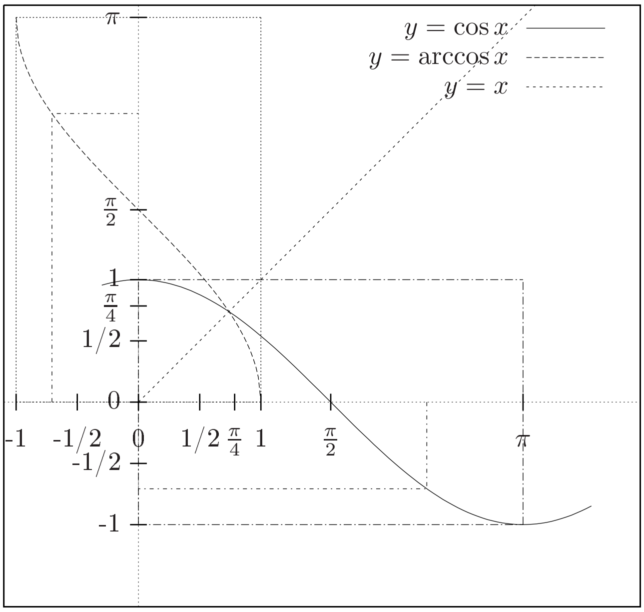

FIG. 7.6 – Les graphes de $y = \cos x$ et $y = \arccos x$

l'axe des abscisses (cet angle n'est pas défini si $M = O$. Dans ce cas, on passe des coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de M à ses coordonnées cartésiennes en posant $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$.

La question à laquelle nous allons répondre ici concerne le passage dans l'autre sens : i.e connaissant les coordonnées cartésiennes de M, déterminer ses coordonnées polaires. La détermination de ρ ne pose pas de problème, si $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ alors $x^2 + y^2 = \rho^2$ et donc $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le problème est de calculer θ. Si M n'est pas sur l'axe des ordonnées, on a $x \neq 0$ et en faisant le bon quotient on a alors

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

Cette formule suggère l'utilisation de la fonction arctan.

Trois cas principaux se dégagent :

(i) Si $x > 0$, l'angle θ, qui sur le schéma doit être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ est pris égal à $\theta = \arctan\frac{y}{x}$

(ii) Si $x < 0$ et $y > 0$, l'angle θ, qui sur le schéma doit être compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π est pris égal à $\theta = \pi + \arctan\frac{y}{x}$, dont la tangente vaut bien $\frac{y}{x}$

(iii) Si $x < 0$ et $y < 0$, l'angle θ, qui sur le schéma doit être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$ est pris égal à $\theta = -\pi + \arctan\frac{y}{x}$, dont la tangente vaut bien $\frac{y}{x}$

Concernant les points de l'axe des ordonnées, on pose

(iv) $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$ et $y > 0$, ce qui est la limite naturelle de θ lorsque $y > 0$ est fixé et que x tend vers 0 par valeurs positives ou négatives.

(v) $\theta = -\frac{\pi}{2}$ si $x = 0$ et $y < 0$, ce qui est la encore la limite naturelle de θ lorsque $y < 0$ est fixé et que $x \to 0$.

Ce faisant, nous avons assigné à tout point M de coordonnées (x, y) sauf à ceux vérifiant $y = 0$, $x \leq 0$ un couple $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$. Une vérification que nous serons capable de mener après le chapitre sur les fonctions de 2 variables montre que ρ, ainsi que θ, dépendent continuement du couple (x, y) dans le plan privé du demi-axe des abscisses négatives.

Si $x < 0$ est fixé, lorsque y tend vers 0 par valeurs positives, θ tend vers π et lorsque y tend vers 0 par valeurs négatives, θ tend vers $-\pi$. La fonction $\theta(x, y)$ ne peut se prolonger par continuité au plan (même en privant celui-ci de l'origine)

En résumé, la correspondance coordonnées polaires–coordonnées cartésiennes que nous venons d'expliciter établit une bijection continue et de réciproque continue[1] entre $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0),\, x \leq 0\}$

L'élimination du demi-axe des abscisses négatives est nécéssaire pour éviter de choisir si ces points doivent avoir un angle π ou $-\pi$.

Si nous avions eu à nous concentrer sur un problème où les points sont proches de ce demi-axe négatifs, il est nécéssaire d'utiliser d'autres conventions pour l'angle θ. Un e option est d'éliminer le demi-axe des réels positifs et de considérer $\theta \in]0, 2\pi[$.

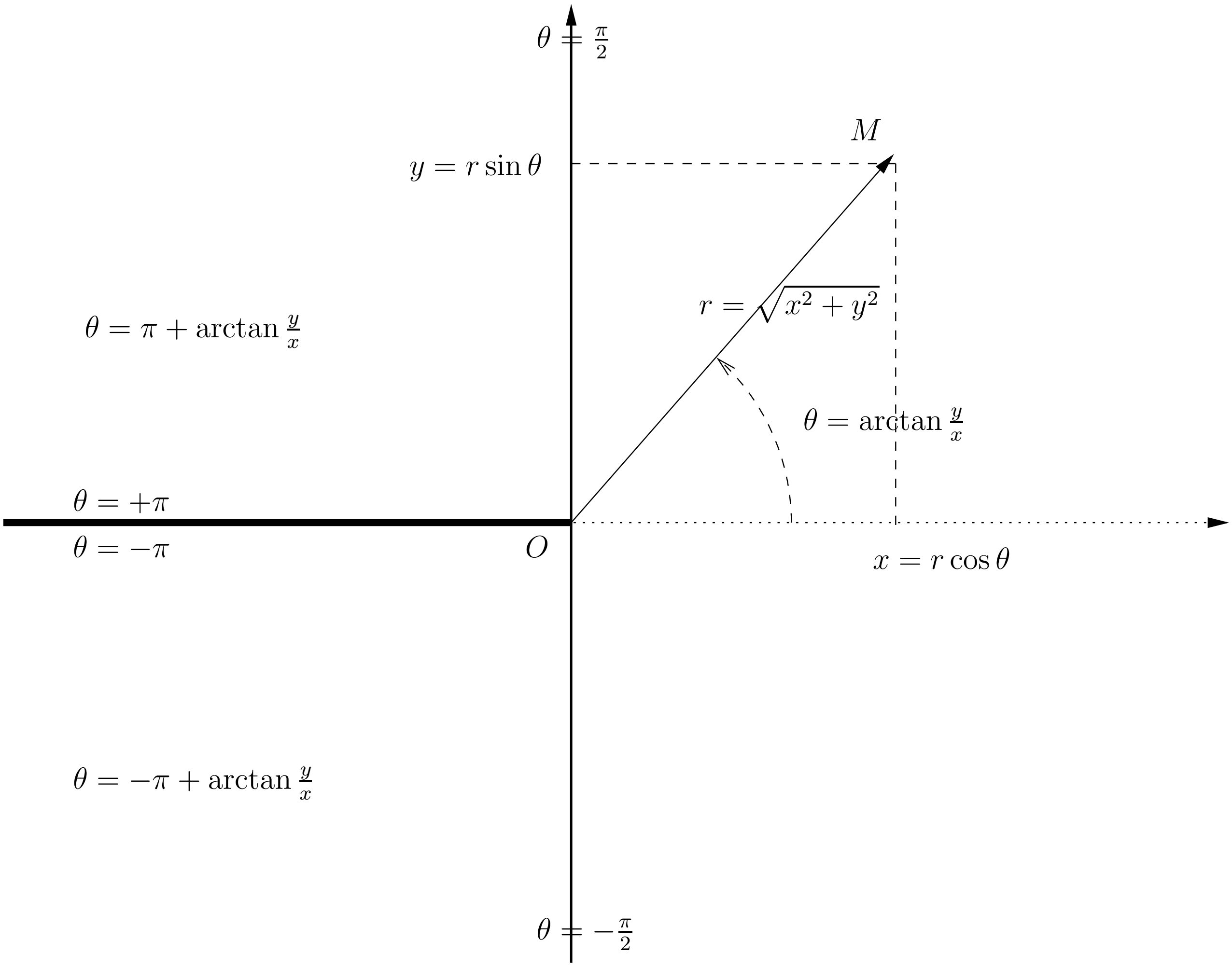

FIG. 7.7 – Passage polaires-cartesiennes

[1]Nous verrons dans le chapitre sur les fonctions de 2 variables ce que cela signifie

Chapitre 8

Courbes paramétrées planes

8.1 Généralités

On se place dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Ce plan est alors identifié à $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des couples de réels, via le mécanisme des coordonnées cartésiennes.

8.1.1 Définition

Définition 113 – *Un* **paramétrage de courbe plane** *ou, plus simplement, une* **courbe paramétrée plane** *est la donnée de deux fonctions réelles de variable réelle x et y définies, continues sur un même intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. C'est aussi la donnée d'une fonction continue*[1] $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

– *A chaque $t \in I$, on associe le point $M(t)$ de coordonnées $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. L'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit I*

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)),\ t \in I\}$$

est appelé la **courbe plane**[2] *associée à ce paramétrage.*

Exemples et Remarques

1. La droite. Donner un paramétrage de la droite D passant par le point $A = (1, 1)$, de vecteur directeur $u = (-2, 3)$.
   Donner un autre paramétrage de cette même droite.
2. Le cercle. Même exercice avec le cercle de centre 0 de rayon 1. En utilisant le fait que le cercle de centre $C = (-1, 2)$, de rayon 3 est l'image par une homothétie de centre O suivie d'une translation du cercle précédent, déterminer un paramétrage de ce cercle.
3. Le graphe d'une fonction continue. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, son graphe Γ est la courbe paramétrée dont un paramétrage est
   $$x(t) = t,\ y(t) = f(x(t)),\ t \in I$$
4. Si Γ est la courbe paramétrée par $(x(t), y(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ et si ϕ est une bijection continue d'un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ sur I alors Γ est aussi la courbe paramétrée par $(x(\phi(s), y(\phi(s)),\ s \in J$.

8.1.2 Vecteur vitesse et tangente

Dans les exemples qui vont nous occuper, les fonctions x et y seront,la plupart du temps, des fonctions régulières (i.e. de classe $\mathcal{C}^1$) de $t \in I$.

---

[1] Une fonction à valeurs $\mathbb{R}^2$ est continue si chacune des fonctions coordonnées l'est

[2] ou **courbe géométrique** ou **support de la courbe paramétrée**

Dans une interprétation physique usuelle des courbes paramétrées, la variable t représente le temps et $x(t), y(t)$ sont les coordonnées d'un point mobile $M(t)$ (cf le chapitre **??**).

Si $t \neq t_0$, la vitesse moyenne du mobile entre les instants t et t_0 est donnée par le vecteur $\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ qui a $(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}, \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0})$ pour coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Lorsque $t \to t_0$, ce vecteur vitesse moyenne tend, au sens ou chacune de ses coordonnées tend, vers $\vec{v}(t_0) := (x'(t_0), y'(t_0))$. Ce vecteur est appelée le vecteur **vitesse instantanée** ou **vecteur vitesse** de M à l'instant t_0.

Lorsque $\vec{v}(t_0) \neq 0$, la droite passant par le point $M(t_0)$, de vecteur directeur $\vec{v}(t_0)$, donnée paramétriquement par

$$x_T(s) = x(t_0) + (s - t_0)x'(t_0),\ y_T(s) = y(t_0) + (s - t_0)y'(t_0),$$

est appelée la **tangente** à Γ au point $M(t_0)$, à l'instant t_0.

Une équation cartésienne de la tangente à la courbe paramétrée à l'instant t_0 est donc

$$(X - x(t_0)).y'(t_0) - (Y - y(t_0)).x'(t_0) = 0 \text{ d'inconnue } (X, Y) \in \mathbb{R}^2$$

Dans le cas du paramétrage naturel d'un graphe de fonction, on retrouve la notion de tangente à un graphe déjà rencontrée.

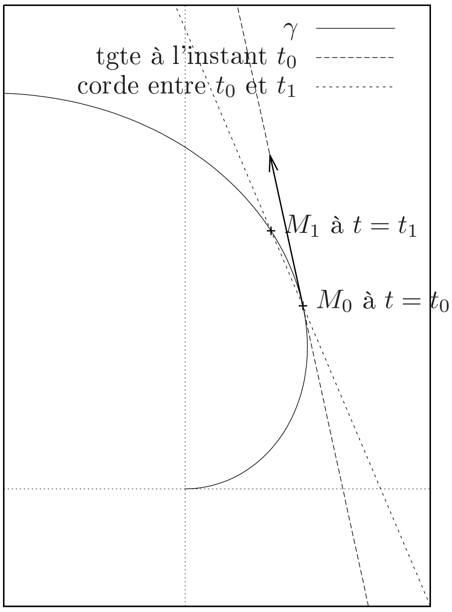

FIG. 8.1 – Une courbe paramétrée, le point M_0 atteint à l'instant $t = t_0$, sa tangente et une corde

Exemples et Remarques

1. Si ϕ est une bijection $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ sur $I \subset \mathbb{R}$, $(x(t), y(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ et $(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) = (x(\phi(s)), y(\phi(s)))$, $s \in J$ sont alors deux paramétrages d'une même courbe Γ. On a alors, par le théorème de dérivation des fonctions composées, si $t_0 = \phi(s_0)$, que

$$\vec{v}(t_0) = \phi'(s).\vec{\tilde{v}}(s_0).$$

Si $\phi'(s_0) \neq 0$, la tangente à Γ en $M(t_0)$ à l'instant t_0 est alors égale à la tangente à Γ en $\tilde{M}(s_0)$ à l'instant s_0. Cela donne un début de définition intrinsèque, i.e. indépendant du paramétrage choisi, de la tangente à une courbe paramétrée.

2. Il se peut que $\vec{v}(t_0) = 0$ mais que la limite de $\frac{1}{(t-t_0)^n}\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$ lorsque $t \to t_0$ pour un certain entier n existe et est non nulle. Par extension, on dira aussi que cette limite est un vecteur tangent à la courbe à l'instant t_0.
   Nous verrons un exemple de ce phénomène dans l'un des exemples de la partie suivante.

8.1.3 Distance parcourue entre deux instants

Définition 114 *Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in I$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soit $v(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$. Soient $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$. On définit la* **distance** *parcourue entre les instants t_0 et t_1 par la formule*

$$D(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\ dt$$

Exemples et Remarques

1. La quantité $v(t)$ est la longueur du vecteur vitesse à l'instant t. C'est ce que l'on appelle la **vitesse instantanée**. Si on imagine une voiture suivant la courbe $\gamma(t), t \in I$, $v(t)$ est ce que l'on peut lire sur le compteur de vitesse de cette voiture. D'une certaine manière, on "oublie" l'information de direction contenue dans le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. Si l'on pense qu'une intégrale est un genre de somme, la quantité $\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1} v(t)\ dt$ est en quelque sorte la "moyenne" des vitesses instantanées sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$: il s'agit donc de la vitesse moyenne sur cet intervalle de temps, i.e la distance parcourue par le mobile entre les instants t_0 et t_1 divisée par la durée $t_0 - t_1$ de cet intervalle de temps.
2. Prenons l'exemple d'un segment géométrique $L = [AB]$ où A a pour coordonnées (x_A, y_A), B a pour coordonnées (x_B, y_B). Ce segment est naturellement paramétré par

   $$\gamma(t) = ((1-t)x_A + tx_B, (1-t)y_A + ty_B),\ t \in [0, 1]$$

   On a

   $$\vec{v}(t) = (x_B - x_A, y_B - y_A),\ v(t) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$$

   D'après la définition, la distance parcourue entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ est donc

   $$D(0, 1) = \int_0^1 \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\ dt = AB$$

   Dans ce cas, on voit donc que la distance parcourue entre ces deux instants est exactement la longueur du segment, ce qui est finalement rassurant ! !
   Un calcul similaire montre que la distance parcourue entre l'instant 0 et l'instant $t \in [0, 1]$ quelconque est $D(0, t) = t.AB$, ce qui est exactement la longueur du segment $A\gamma(t)$.
3. Traitons maintenant l'exemple d'un cercle ou d'une partie de cercle. Nous allons voir que les distances calculées à l'aide de deux paramétrages distincts ont au bout du compte la même valeur
   (a) Paramétrage trigonométrique du cercle. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $(0, 0)$, de rayon 1. Soit $\gamma_0(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ le paramétrage usuel de ce cercle. On a

   $$\vec{v_0}(t) = (-\sin t, \cos t),\ v_0(t) = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = 1$$

   La distance parcourue par le mobile $\gamma_0(t)$ entre les instants 0 et $\frac{\pi}{4}$ est donc

   $$D_0(0, \frac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\ dt = \frac{\pi}{4}$$

   La trajectoire de $\gamma_0(t)$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$ est un huitième du cercle $\mathcal{C}$, sa longueur au sens usuel du terme est donc $\frac{\pi}{4}$, ce qui coincide bien avec la distance parcourue.

(b) Posons maintenant $\gamma_1(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$, $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$. Il s'agit d'un autre paramétrage du même cercle $\mathcal{C}$. On a

$$\vec{v_1}(t) = (-2t \sin t^2, 2t \cos t^2),\ v_1(t) = \sqrt{4t^2 \cos^2(t^2) + 4t^2 \sin^2(t^2)} = 2t$$

La distance parcourue par le mobile $\gamma_1(t)$ entre les instants 0 et $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ est donc

$$D_1(0, \sqrt{\frac{\pi}{4}}) = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} 2t\ dt = \left[t^2\right] 0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} = \frac{\pi}{4}$$

La trajectoire de $\gamma_1(t)$ sur l'intervalle $[0, \sqrt{\frac{\pi}{4}}]$ est le même huitième du cercle $\mathcal{C}$ que précédemment et la encore, sa longueur au sens usuel du terme coincide bien avec la distance parcourue.

La proposition suivante indique, à la manière de l'énoncé similaire sur les tangentes, que la distance parcourue sur un arc paramétré est par nature liée à la trajectoire et non à un paramétrage particulier.

Proposition 115 *Soient I et J sont deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $\sigma : I \to J$, une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$, $\gamma_0 : I \to \mathbb{R}^2$ et $\gamma_1 : J \to \mathbb{R}^2$ sont deux arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^1$, de vitesses instantanées respectives $v_0 : I \to \mathbb{R}$ et $v_1 : J \to \mathbb{R}$,*

Si pour tout $t \in I$, $\gamma_1(\sigma(t)) = \gamma_0(t)$ alors, pour $t_0 < t_1$, $t_0, t_1 \in I$, en posant $\sigma(t_0) = s_0 < s_1 = \sigma(t_1)$, on a

$$D_0(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v_0(t)\ dt = \int_{s_0}^{s_1} v_1(s)\ ds = D_1(s_0, s_1)$$

Preuve. Comme pour tout $t \in I$, $\gamma_1(\sigma(t)) = \gamma_0(t)$, en dérivant, on obtient que pour tout $t \in I$, $\sigma'(t).\vec{v}_1(\sigma(t)) = \vec{v}_0(t)$. Comme σ est croissante, $\sigma'(t) \geq 0$ et donc, pour tout $t \in I$,

$$\sigma'(t).v_1(\sigma(t)) = v_0(t)$$

On a donc, par le théorème du changement de variable, Théorème 71, dans les intégrales que

$$\begin{aligned} D_0(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} v_0(t)\ dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sigma'(t).v_1(\sigma(t))\ dt \\ &\overset{s=\sigma(t)}{=} \int_{s_0}^{s_1} v_1(s)\ ds = D_1(s_0, s_1) \end{aligned}$$

◇

8.2 Exemples de tracés – coordonnées cartésiennes

8.2.1 Schéma général

Le but est de tracer une courbe paramétrée donnée par le paramétrage $x(t), y(t)$, $t \in I$.

- On regarde le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité des fonctions x et y
- On regarde si des symétries communes aux fonctions x et y ne permettent pas de réduire le domaine d'étude, quitte à compléter la courbe par des symétries centrales, axiales, des translations...
- On étudie les variations de x et y que l'on regroupe dans un tableau de variations commun à ces deux fonctions avec repérage des limites et de valeurs particulières du paramètre t.

- On repère des points particuliers de la courbe et l'on calcule si besoin les tangentes à ces points : intersections avec les axes de coordonnées, points où les tangentes sont parallèles aux axes, points multiples[3]
- Une classe importante de points particuliers sont les points « singuliers » du paramétrage, où la vitesse s'annule. On verra sur des exemples comment étudier la courbe au voisinage de tels points.
- recherche de droites asymptotes
- On trace la courbe en respectant ces contraintes

8.2.2 $x(t) = 3t^2 - 2$, $y(t) = 3t - t^3$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Les fonctions x et y étant polynomiales, elles sont clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Symétries : on remarque que pour $t \in \mathbb{R}$, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. Cela implique que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et que, pour la tracer, il suffit de la tracer pour $t \geq 0$, le reste de la courbe s'obtenant par la symétrie axiale.
3. Limites : on a
$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \infty \text{ et } \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = -\pm\infty$$
4. Dérivées et variations : on a
$$x'(t) = 6t \text{ et } y'(t) = 3(1-t^2)$$
On obtient donc le tableau de variations suivant sur $[0, +\infty[$

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	6	$+$	
$y'(t)$	3	$+$	0	$-$	
$x(t)$	-2	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Le graphe admet donc une tangente verticale au point $M_0 = (0, 0)$ à l'instant $t = 0$ et une tangente horizontale au point $M_1 = (1, 2)$ à l'instant $t = 1$.
5. Recherche de points doubles : résolvons le système de deux équations à deux inconnues $t, s \in \mathbb{R}$, $t \neq s$
$$\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$$
Les solutions de ce système telles que $t \neq s$ correspondent à un point de la courbe atteint à deux instants distincts. Le système en question est équivalent succesivement à chacun des systèmes suivants
$$\begin{cases} t^2 - s^2 &= 0 \\ 3t - t^3 - (3s - s^3) &= 0 \end{cases}, \begin{cases} s + t &= 0 \\ 3 - (t^2 + st + s^2) &= 0 \end{cases},$$
$$\begin{cases} s &= -t \\ 3 - (t^2 - t^2 + t^2) &= 0 \end{cases}, \begin{cases} s &= -t \\ t &= \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

[3]Ce sont les points de la courbe géométrique en lesquels on passe au moins deux fois, à deux instants différents

Il y a donc un « point double » sur la courbe, atteint aux instants $t = \pm\sqrt{3}$, il s'agit du point $M_{\sqrt{3}} = (7, 0)$. La tangente T en ce point à l'instant $t = \sqrt{3}$ a pour équation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcc} x_T(t) = x(\sqrt{3}) + tx'(\sqrt{3}) & = & 7 + 6\sqrt{3}.t \\ y_T(t) = y(\sqrt{3}) + ty'(\sqrt{3}) & = & -6t \end{array}\right.$$

La tangente S en ce point à l'instant $t = -\sqrt{3}$ est la symétrique de T par rapport à l'axe des abscisses.

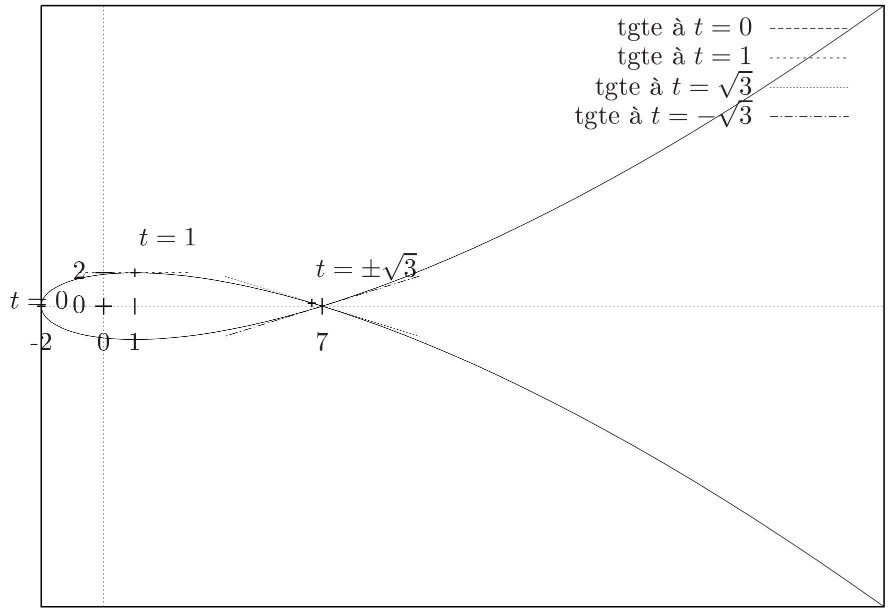

FIG. 8.2 – La courbe $x(t) = 3t^2 - 2$, $y(t) = 3t - t^3$, $t \in \mathbb{R}$

8.2.3 $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Symétries.
   (a) Pour $t \in \mathbb{R}$ on a $x(t + 2\pi) = x(t)$, $y(t + 2\pi) = y(t)$. On peut donc restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$ (ce choix s'explique par le point suivant !)
   (b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. La courbe est donc symétrique par rapport au point 0 : il suffit d'étudier la courbe sur l'intervalle $[0, \pi]$, le reste de la courbe s'obtenant par symétrie centrale.
   (c) Pour $t \in \mathbb{R}$ on $x(\pi - t) = x(t)$, $y(\pi - t) = -y(t)$. La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses et il suffit de l'étudier sur l'intervalle $I = [0, \pi/2]$, le reste de la courbe s'obtenant par symétrie d'axe Ox.
3. Pour $t \in I$, on a

$$x'(t) = \cos t,\ y'(t) = 2\cos 2t$$

Le tableau de variation est donc le suivant

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	1	$+$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+$	0
$y'(t)$	1	$+$	0	$-$	-2
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	1	$+$	0	$-$	-2

4. Recherche des points doubles. Résolvons le système d'équations d'inconnues $t \neq s$, $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & x(s) \\ y(t) & = & y(s) \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sin(t) & = & \sin(s) \\ \sin(2t) & = & \sin(2s) \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{c} \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t = s + 2k\pi \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que} t = \pi - s + 2k\pi \\ \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2t = 2s + 2k\pi \text{ ou il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que} 2t = \pi - 2s + 2k\pi \end{array}\right. ,$$

Ceci est équivalent à l'une des quatre possibilités suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t = s + 2k\pi \\ \text{il existe } \ell \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t = s + \ell\pi \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t = \pi - s + 2k\pi \\ \text{il existe } \ell \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t = s + \ell\pi \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t = s + 2k\pi \\ \text{il existe } \ell \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t = \frac{\pi}{2} - s + \ell\pi \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t = \pi - s + 2k\pi \\ \text{il existe } \ell \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t = \frac{\pi}{2} - s + \ell\pi \end{array}\right.$$

ou encore, il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que l'une des quatre possibilités suivantes est réalisée

$$\begin{array}{llll} (a) & t = s + 2k\pi & \text{et} & t = s + \ell\pi \\ (b) & t = \pi - s + 2k\pi & \text{et} & s = \frac{\pi}{2} + k\pi - \ell\frac{\pi}{2} \\ (c) & t = s + 2k\pi & \text{et} & s = \frac{\pi}{4} + \ell\frac{\pi}{2} - k\pi \\ (d) & t = \pi - s + 2k\pi & \text{et} & \frac{\pi}{2} + \ell\pi = \pi + 2k\pi \end{array}$$

Les cas (a) et (c) correspondent à l'existence d'un entier k tel que $s = t + 2k\pi$: tous les points de la courbe sont points multiples du seul fait de la 2π-périodicité, ce qui n'est pas très intéressant. On se limite donc aux valeurs de t et s comprises entre $-\pi$ et π.
Le cas (d) est impossible : $\frac{\pi}{2}$ n'est pas un multiple entier de π. Il ne reste donc que le cas (b) : il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que

$$t = \frac{\pi}{2} + k\pi + \ell\frac{\pi}{2} = (2k + \ell + 1)\frac{\pi}{2} \text{ et } s = \frac{\pi}{2} + k\pi - \ell\frac{\pi}{2} = (2k - \ell + 1)\frac{\pi}{2}.$$

On a $t - s = \ell\pi$ et donc le fait que $t \neq s$ est équivalent à $\ell \neq 0$. Si l'on se restreint aux t et s compris entre $-\pi$ et π, $t - s$ est donc compris entre -2π et 2π, (k, ℓ) ne peut prendre que les valeurs $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(-1, -1)$ et $(-1, 1)$. (faire un dessin des couples d'entiers vérifiant $-3 \leq 2k - \ell \leq 1$ et $-3 \leq 2k + \ell \leq 1$, $\ell \neq 0$). Les valeurs des couples (t, s) correspondants sont $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, $(-\pi, 0)$ et $(0, -\pi)$.
Pour ces quatre couples (t, s), on a $x(t) = x(s) = 0$ et $y(t) = y(s) = 0$; Le point 0 est donc, modulo la périodicité de la courbe, le seul point multiple de cette courbe.

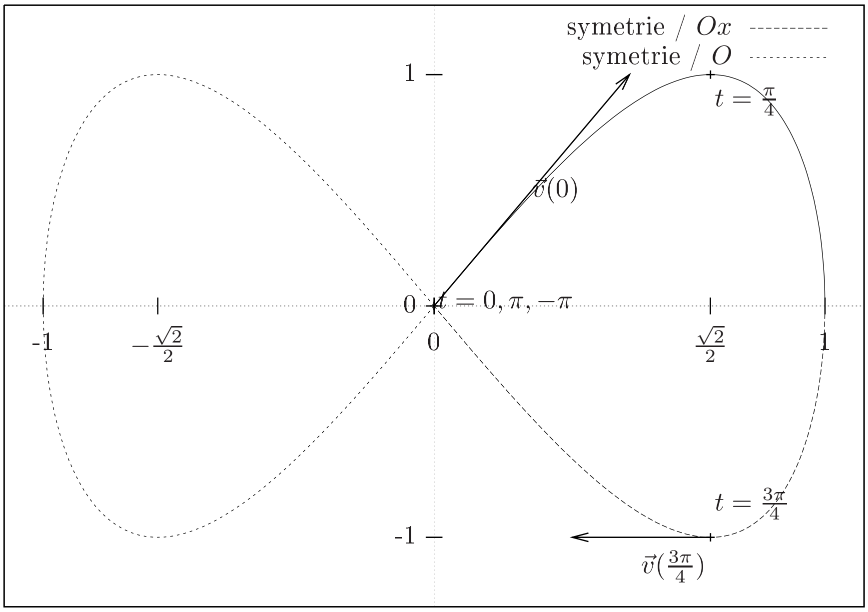

FIG. 8.3 – La courbe $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$

8.2.4 $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$, $t \in \mathbb{R}$.

1. On a $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, la courbe présente donc une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses et il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$ puis de faire agir cette symétrie.
2. $x'(t) = 2t$ et $y'(t) = 3t^2$. Sur $[0, +\infty[$ les deux fonctions x et y sont donc strictement croissantes. La vitesse $v(t)$ est nulle si et seulement si $t = 0$.
3. (La remarque qui tue). On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t = \sqrt[3]{y(t)}$ et donc $x(t) = \sqrt[3]{y(t)}^2$. Cela signifie, par exemple, que la courbe Γ, restreinte aux instants $t \geq 0$ est le graphe de la fonction $y = x^{\frac{3}{2}}$. Ce graphe est bien connu ! On note par exemple la présence d'une demi-tangente verticale en $x = 0, y = 0$.

L'étude de ce type de courbe, $x(t) = t^p$, $y(t) = t^q$, t voisin de 0 avec p et q deux entiers naturels est très importante pour l'étude locale des courbes paramétrées au voisinage d'un **point singulier**. Un point singulier d'une courbe paramétrée est un point atteint à un instant t_0 tel que $v(t_0) = 0$. il s'agit donc de ces instants pour lesquels nous ne sommes pas capables de déterminer une droite tangente géométrique.

Supposons qu'en t_0, x et y admette des développements limités du type

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & x(t_0) + a_p(t - t_0)^p + (t - t_0)^p \epsilon(t - t_0) \\ y(t) & = & y(t_0) + b_q(t - t_0)^q + (t - t_0)^q \epsilon(t - t_0) \end{array}$$

avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$ et $p \neq q$.

Au voisinage de t_0, la courbe paramétrée par $x(t), y(t)$ « ressemble » à celle, plus simple, paramétrée par

$$\begin{array}{rcl} \tilde{x}(t) & = & x(t_0) + a_p(t - t_0)^p \\ \tilde{y}(t) & = & y(t_0) + b_q(t - t_0)^q \end{array}$$

Il est cependant assez exceptionnel qu'après un développement limité nous nous retrouvions exactement dans cette situation avec $p \neq q$. Le cas suivant se gère grâce à un changement de coordonnées. Supposons que nous ayons deux vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ non colinéaires (*a fortiori* non nuls) tels que, après développement limité on ait

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & x(t_0) + x_I(t-t_0)^p + a_{p+1}x_I(t-t_0)^{p+1} + \cdots + a_{q-1}x_I(t-t_0)^{q-1} + x_J(t-t_0)^q + (t-t_0)^q\epsilon(t-t_0) \\ y(t) & = & y(t_0) + y_I(t-t_0)^p + a_{p+1}y_I(t-t_0)^{p+1} + \cdots + a_{q-1}y_I(t-t_0)^{q-1} + y_J(t-t_0)^q + (t-t_0)^q\epsilon(t-t_0) \end{array}$$

où $I = (x_I, y_I)$, $J = (x_J, y_J)$, $a_{p+1}, \ldots, a_{q-1}$ sont des réels quelconques. Donnons nous un nouveau système de coordonnées (X, Y) dont l'origine est le point de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$, l'axe des abscisses soit dirigé par I, celui des ordonnées soit dirigé par J. La courbe paramétrée par $(x(t), y(t))$ dans le repère originel est paramétrée dans ces nouvelles coordonnées par

$$\begin{array}{rcl} X(t) & = & (t-t_0)^p + a_{p+1}(t-t_0)^{p+1} + \cdots + a_{q-1}(t-t_0)^{q-1} + (t-t_0)^q\epsilon(t-t_0) \\ & = & (t-t_0)^p + (t-t_0)^p\epsilon(t-t_0) \\ Y(t) & = & (t-t_0)^q + (t-t_0)^q\epsilon(t-t_0) \end{array}$$

On se retouve donc ramenés à la situation antérieure.

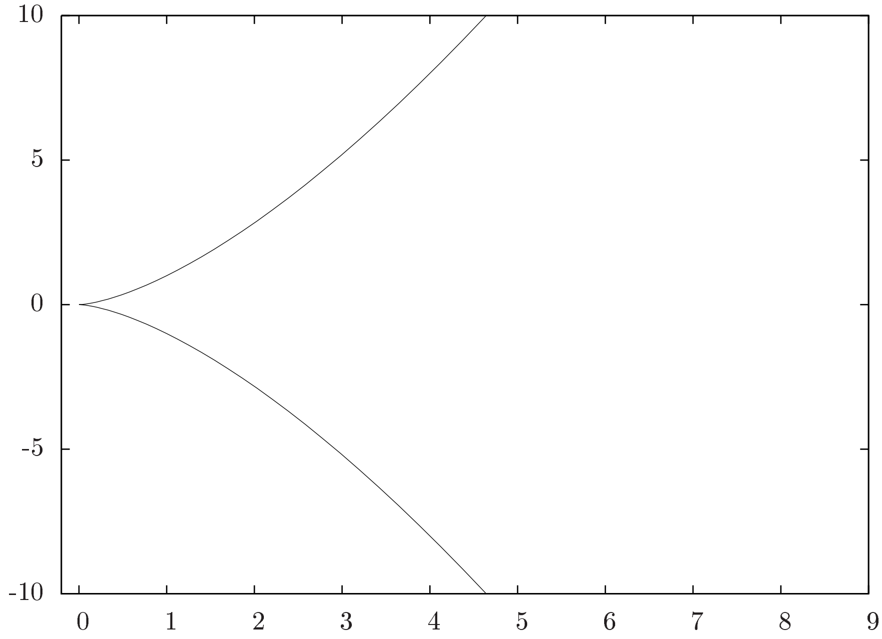

FIG. 8.4 – La courbe $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$, $t \in \mathbb{R}$

8.3 Exemples de tracés – coordonnées polaires

8.3.1 Courbes en polaires : généralités

Passage d'un système de coordonnées à l'autre

Considérons deux fonctions continues $r(t)$ et $\theta(t)$ d'une variable réelle t, définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.

La courbe paramétrée définie en coordonnées polaires par le système paramétrique

$$\rho = r(t), \theta = \theta(t),\ t \in I$$

est par définition la courbe paramétrée définie en coordonnées cartésiennes par le système paramétrique

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t),\ y(t) = r(t)\sin\theta(t),\ t \in I$$

Remarquons que si $r(t)$ et $\theta(t)$ sont des fonctions régulières (par exemple de classe $\mathcal{C}^1$), sur I alors $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions ayant au moins le même degré de régularité (dans l'exemple, elles seront au moins de classe $\mathcal{C}^1$).

Réciproquement, étant donnée une courbe paramétrée donnée en coordonnées cartésiennes par le système paramétrique $x(t), y(t),\ t \in I \subset \mathbb{R}$, on peut en donner une définition polaire par la correspondance coordonnées cartésiennes–coordonnées polaires décrite dans la partie précédente.

Le fait que, par exemple, $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, montre qu'en général, on ne peut espérer que $r(t)$ soit automatiquement de classe $\mathcal{C}^1$ si $x(t)$ et $y(t)$ le sont. Les instants $t \in D$ où $x(t) = y(t) = 0$ posent en effet problème lors de la dérivation.

Le problème de la régularité est encore plus prégnant lors de la détermination de l'angle $\theta(t)$. D'une part, lorsque $r(t) = 0$, l'angle n'est pas défini et d'autre part, si la courbe fait « plus d'un tour autour de 0 », la fonction $\theta(t)$ risque d'exhiber une discontinuité due au problème du choix de l'angle déjà mentionné.

Expression de la vitesse

Posons quelques notations couramment utilisées en physique. Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose[4]

$$u_r = (\cos\theta, \sin\theta),\ u_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

(u_r, u_θ) forme une base orthonormée et

le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est donc égal à ru_r. En dérivant et en utilisant les règles de dérivation d'un produit et d'une composée, on obtient que

$$v = r'.u_r + r\theta'.u_\theta$$

Le carré de la vitesse est donc

$$|v|^2 = r'^2 + r^2\theta'^2$$

Le rayon dépend de l'angle

Nous allons concentrer nos efforts dans la suite sur les courbes paramétrées données par une équation de la forme

$$\rho = r(\theta),\ \theta \in I$$

où r est une fonction régulière définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Par ceci, on entend les courbes définies en coordonnées polaires par le système paramétrique

$$\rho = r(t),\ \theta = t,\ t \in I$$

L'exemple le plus simple est donné par le cercle de centre 0, de rayon r_0. Il est défini par l'équation paramétrique

$$r = r_0,\ \theta \in \mathbb{R}$$

.

En restreignant le domaine de variation de θ, on obtient une partie du cercle. Par exemple, si $\theta_0 < \theta_1$, la courbe définie par l'équation paramétrique

$$r = r_0,\ \theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

est l'arc du cercle de centre 0, de rayon r_0 constitué des points dont l'argument varie entre θ_0 et θ_1.

[4]les r, θ en indice n'ont rien à voir avec les fonctions ou variables portant ces déjà noms, les vecteurs u_r et u_θ dépendent seulement de l'angle θ

Les droites ne passant pas par 0 ont une équation polaire du type

$$r = \frac{a}{\cos(\theta - \theta_0)}$$

Si l'on note H le projeté orthogonal de O sur une telle droite. On a $OH = a$ et l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OH})$ est θ_0.

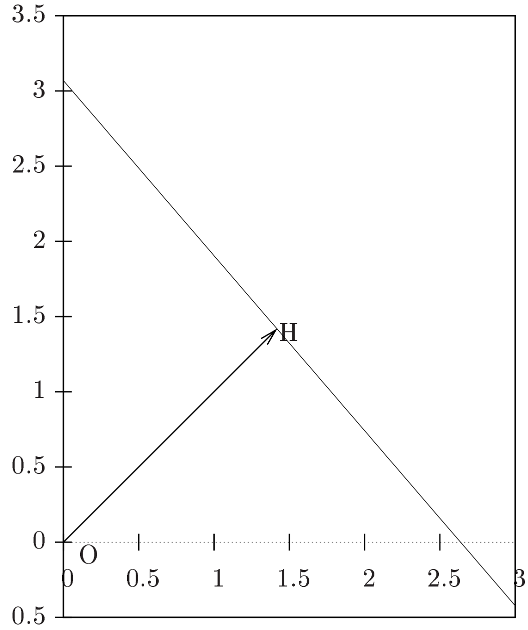

FIG. 8.5 – La droite $r = \frac{2}{\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$.

8.3.2 La cardioïde : $r = 2(1 - \cos\theta)$.

1. r est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule exactement aux point θ tels qu'il existe une entier relatif k tel que $\theta = k2\pi$.
2. Symétries. On a $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$. Il suffit donc d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur 2π pour obtenir toute la courbe géométrique. On a par ailleurs $r(-\theta) = r(\theta)$, ce qui démontre que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Il suffit d'étudier r sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour reconstituer la courbe en faisant agir la symétrie.
3. On a $r'(\theta) = 2\sin\theta$. r' est donc strictement positif sur $]0, \pi[$, r est donc strictement croissant sur $[0, \pi]$, r y croit de 0 jusque 4. Le carré de la vitesse est $r(\theta)^2 + r'(\theta)^2 = 8(1 - \cos\theta)$. La vitesse s'annule donc uniquement lorsque $\theta = 0$.
4. Pour étudier la situation au voisinage de θ, revenons en coordonnées cartésiennes et effectuons un développement limité de chacune des coordonnées : on a

$$\begin{aligned} x(\theta) &= 2(1 - \cos\theta)\cos\theta = \theta^2 + \theta^2\epsilon(\theta) \\ y(\theta) &= 2\sin\theta(1 - \cos\theta) = \sin 2\theta = \theta^3 + \theta^3\epsilon(\theta) \end{aligned}$$

On admet qu'au voisinage de $\theta = 0$, la courbe « ressemble »[5] à la courbe donnée par les

[5] par exemple au niveau du positionnement de la courbe par rapport à sa tangente ou demi-tangente

premiers termes non triviaux de chacun des développements limités :

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \theta^2 \\ y(\theta) &= \theta^3 \end{aligned}$$

Cette courbe a été étudiée dans la partie précédente. Elle présente en 0 une demi-tangente horizontale et un point de rebroussement.

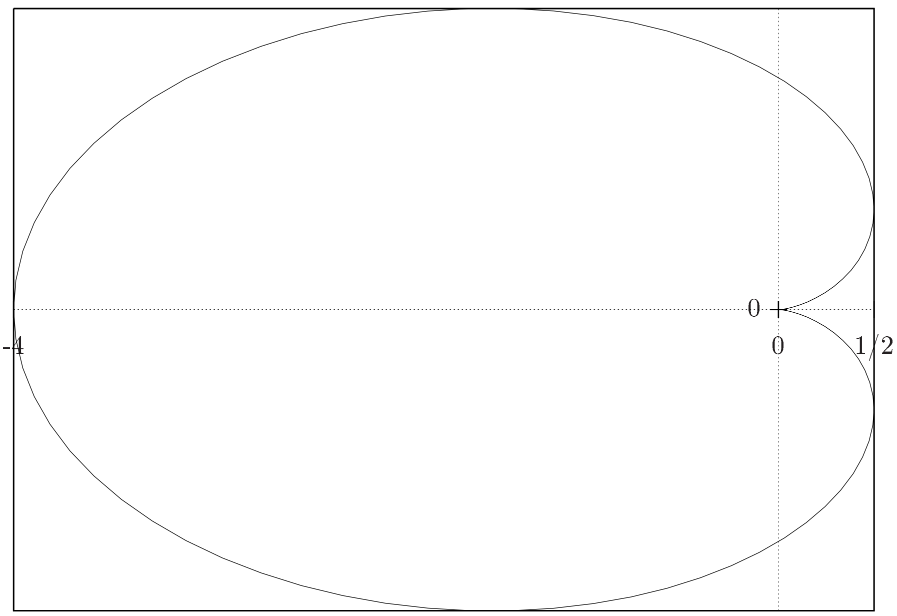

FIG. 8.6 – La courbe $r = 2(1 - \cos\theta)$.

8.3.3 Coniques en polaires : $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$.

Lorsque l'on étudie le mouvement des planètes, ou plus généralement le mouvement de deux corps en interaction gravitationnelle, en se plaçant dans un repère centré au centre de gravité des deux corps, on aboutit, après quelques calculs non triviaux au fait que le mouvement de l'un de ces corps est régi par la courbe paramétrée en polaires $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ où $p > 0$ et $e > 0$, θ_0 sont des paramètres dépendant des conditions physiques (masse des corps en présence, vitesse initiale, etc...). Notre objectif ici est de faire une étude mathématique de ces courbes paramétrées. Nous obtiendrons alors une description en coordonnées polaires des coniques. Ces courbes étaient connues dès l'antiquité grecque car elles apparaissant lorsque l'on sectionne un cône par un plan.

Quitte à faire une rotation des axes, on peut supposer que $\theta_0 = 0$ et quitte à faire une homothétie de centre 0, on peut supposer $p = 1$. Ne serait-ce qu'au niveau du domaine de définition de la fonction r, on voit qu'il y a trois cas à distinguer au niveau du paramètre e qui est appelé l'excentricité de la conique.

1. $0 < e < 1$: le domaine de définition est $D = \mathbb{R}$. r est toujours positif. La courbe obtenue sera une **ellipse**.
2. $e = 1$: le domaine de définition est $D = \mathbb{R}$ privé des points de la forme $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. r est toujours positif. La courbe obtenue sera une **parabole**
3. $e > 1$: le domaine de définition est $D = \mathbb{R}$ privé des points de la forme $\arccos(-\frac{1}{e}) + 2k\pi$ et des points de la forme $-\arccos(-\frac{1}{e}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. r change de signe. La courbe obtenue sera une **hyperbole**

Au niveau des symétries, comme $r(\theta+2\pi) = r(\theta)$, il suffit d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur 2π. Par ailleurs $r(-\theta) = r(\theta)$, la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses et il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Équation cartésienne. En posant, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a donc

$$r + er\cos\theta = 1$$

et, après manipulations algébriques simples, il reste

$$y^2 + (1-e^2)x^2 + 2e.x = 1$$

Nous verrons qu'il s'agit d'une équation cartésienne de la courbe géométrique paramétrée par $r = \frac{1}{1+e\cos\theta}, \theta \in D$.

Le cas de l'ellipse

La fonction r est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \pi]$ et l'on a

$$r'(\theta) = \frac{e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

r' s'annule donc uniquement en $\theta = 0$ et en $\theta = \pi$. Pour ces valeurs de l'angle, la vitesse est orthogonale au rayon vecteur $\overrightarrow{OM_\theta}$. Le carré de la vitesse est

$$r^2 + r'^2 = \frac{(1+e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^4} > 0$$

Cette vitesse ne s'annule pas et donc, on obtient une tangente en θ à la courbe paramétrée en prenant la droite dirigée par $ru_\theta + r'u_r$.

Le cas de la parabole

La fonction r est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Par 2π-périodicité, la courbe est intégralement décrite lorsque θ décrit $]-\pi, +\pi[$.

Elle est contenue dans l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant $x = \frac{1-y^2}{2}$. C'est une parabole.

Comme lorsque θ décrit $]-\pi, +\pi[$,

$$y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta) = \tan\frac{\theta}{2}$$

décrit tout $\mathbb{R}$, la courbe géométrique est donc exactement l'ensemble des points du plan vérifiant $y^2 + 2x = 1$.

Le cas de l'hyperbole

Posons $\alpha = \arccos(-\frac{1}{e})$. On étudie donc r sur la réunion d'intervalles $[0, \alpha[\cup]\alpha, \pi]$.

On a le tableau de variations suivant

θ	0		α		π
			$+\infty$		$\frac{1}{1-e}$
$r(\theta)$		$\nearrow$		$\nearrow$	
	$\frac{1}{1+e}$		$-\infty$		

Les courbes obtenues sont contenues dans l'ensemble des points (x, y) vérifiant

$$y^2 + (1-e^2)x^2 + 2ex = 1$$

Cet ensemble est la réunion des deux graphes

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{1-2ex+(e^2-1)x^2} = \pm\sqrt{e^2-1}\sqrt{\left(x-\frac{e}{e^2-1}\right)^2 - \frac{1}{(e^2-1)^2}} \\ &= \pm\sqrt{e^2-1}\sqrt{\left(x-\frac{1}{e-1}\right)\left(x-\frac{1}{e+1}\right)} \end{aligned}$$

Le fait que $r(\theta) \to \pm\infty$ lorsque θ tend vers α par valeurs positives ou négatives suggère l'existence d'une asymptote parallèle à la droite d'équation (polaire) $\theta = \alpha$.

La « distance » (ici elle a un signe) du point M à cette droite est donnée par

$$d(\theta) = r(\theta)\sin(\theta-\alpha)$$

.

Si, lorsque $\theta \to \alpha$, par exemple par valeurs supérieures, $d(\theta)$ converge vers une valeur $a \neq 0$, on pourra en conclure que la droite d'équation polaire

$$r = \frac{a}{\sin(\theta-\alpha)}$$

est asymptote à la courbe paramétrée lorsque θ tend vers α par valeurs supérieures.

Si $a = 0$, la droite $\theta = \alpha$ est asymptote.

Dans notre cas, on a

$$\begin{aligned} d(\theta) &= r(\theta)\sin(\theta-\alpha) \\ &= \frac{1}{e}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta-\cos\alpha} \\ &= \frac{1}{e}\frac{2\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\alpha}{2}}{-2\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\sin\frac{\theta+\alpha}{2}} \\ &= -\frac{1}{e}\frac{\cos\frac{\theta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\theta+\alpha}{2}} \\ &\to -\frac{1}{e\sin\alpha} = -\pm\frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \end{aligned}$$

Le signe $\pm$ étant celui de e.

.

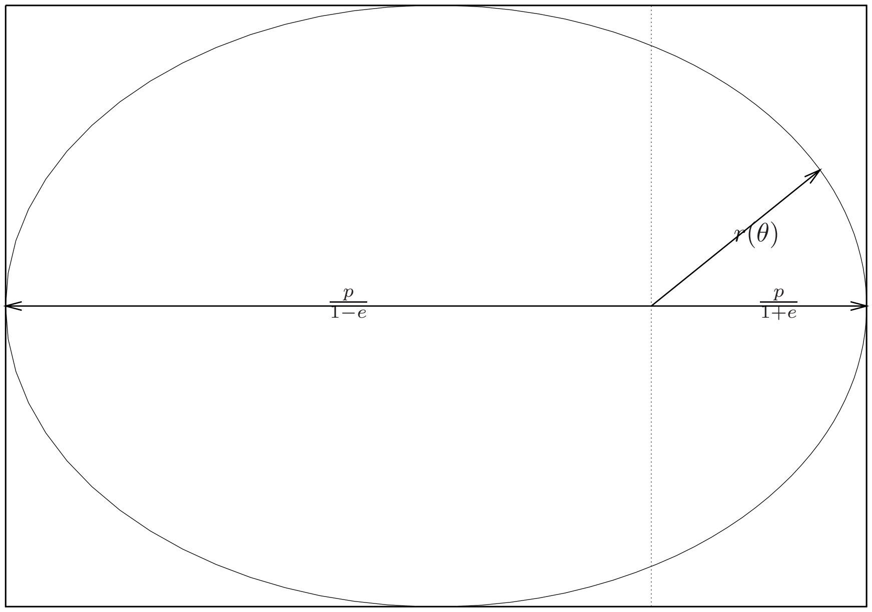

FIG. 8.7 – L'ellipse $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, $p = 1$, $e = 0.5$.

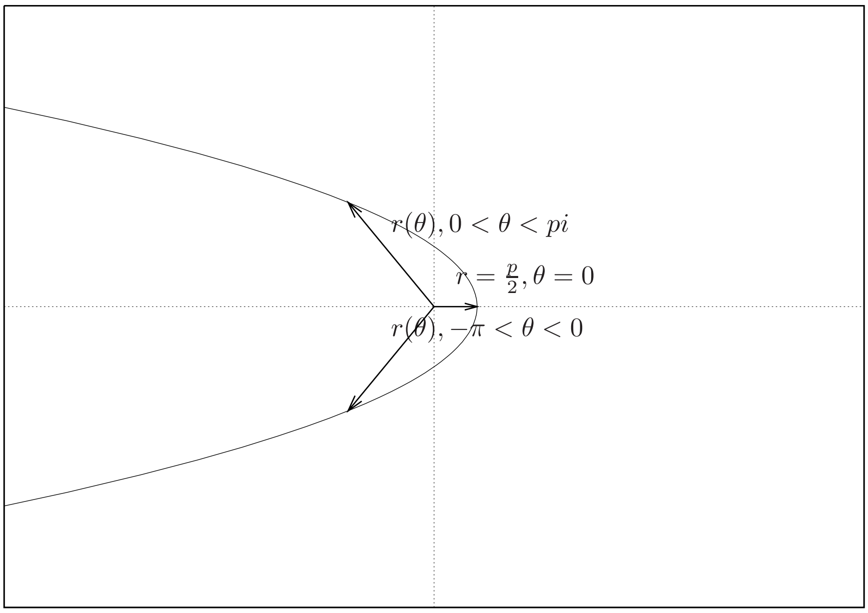

FIG. 8.8 – La parabole $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, $p = 1$, $e = 1$.

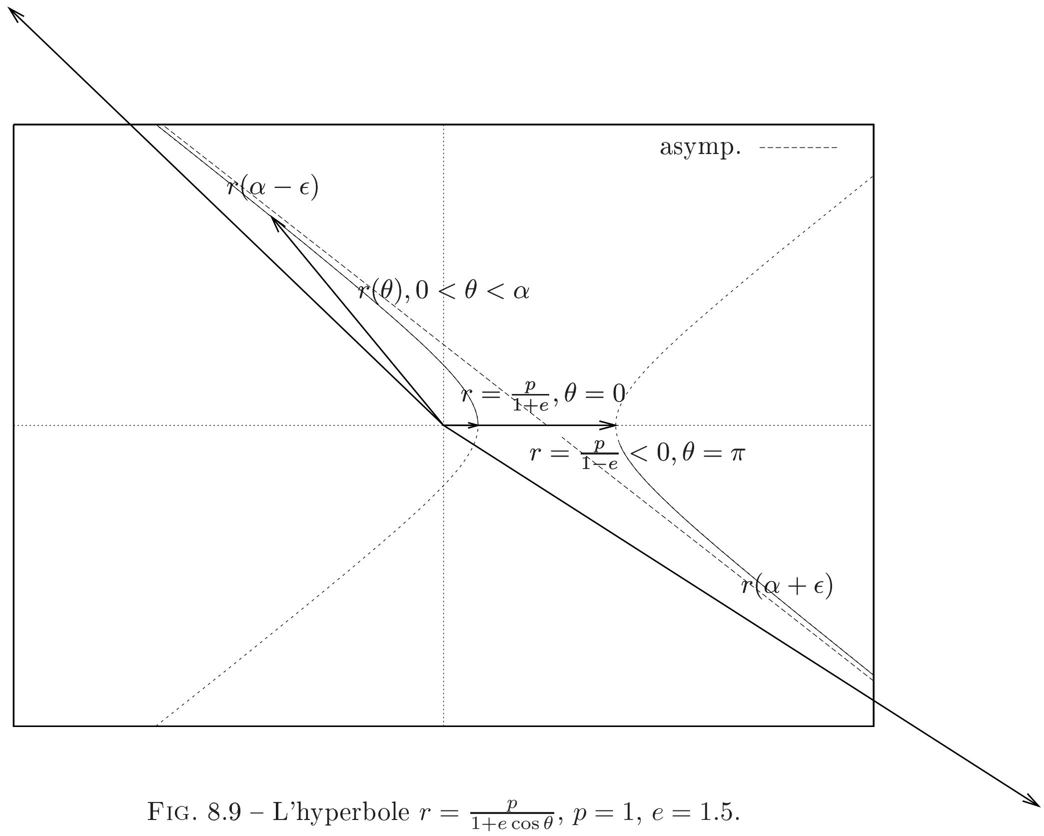

FIG. 8.9 – L'hyperbole $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, $p = 1$, $e = 1.5$.

Chapitre 9

Fonctions réelles de deux variables réelles

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On l'identifie par ce moyen à $\mathbb{R}^2$.

9.1 Généralités

9.1.1 Fonctions, ensemble de définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est un moyen d'associer à tout couple de réels (x, y) de l'ensemble de définition D de f un nombre réel unique noté $f(x, y)$.

Exemples et Remarques

1. Les fonctions constantes. Soit a un réel fixé. La formule $f(x, y) = a$ définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. Les fonctions affines. Soient a, b, c trois réels fixés, la formule $f(x, y) = a.x + b.y + c$ définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Les fonctions de cette forme sont appelées fonctions affines.
3. Les fonctions quadratiques. Soit a_{ij} une famille de nombres réels fixés. La formule
$$f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$$
définit la encore une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
4. Fonctions polynomiales. Elles sont définies par une formule du type
$$f(x, y) = \sum_{i,j \geq 0}^{\text{finie}} a_{ij} x^i . y^j$$
5. Fractions rationnelles : elles sont définies comme étant le quotient de deux fonctions polynomiales, par une formule du type
$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$
Cette formule ne définit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ que sur une partie du plan D sur laquelle Q ne s'annule pas, par exemple
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ Q(x, y) \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ Q(x, y) = 0\}$$
   (a) Supposons que $Q(x, y) = 2x + 3y - 2$. Le domaine de définition naturel de la fonction f définie par la formule
$$f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy - 4}{2x + 3y - 2}$$

est l'ensemble D des points (x, y) tels que $2x + 3y - 2 \neq 0$. C'est la réunion des deux demi-plans ouverts

$$P_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 3y - 2 > 0\} \text{ et } P_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 3y - 2 < 0\}$$

(b) Supposons que $Q(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. La formule

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 17xy + 12}{x^2 + y^2 - 1}$$

définit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ avec

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ Q(x, y) \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ Q(x, y) = 0\}$$

Géométriquement D est le plan, privé du cercle de centre 0 et de rayon 1. Ce cercle est exactement l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

6. On peut évidemment faire intervenir d'autres fonctions élémentaires d'une variable réelle.
   (a) La formule $f(x, y) = \ln(2x^2 - 4x + 2y^2 - 6)$ définit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ si l'on prend

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 - 4x + 2y^2 > 0\}$$

   Comme $2x^2 - 4x + 2y^2 - 6 = 2(x - 1)^2 + y^2 - 8$, l'ensemble D est donc géométriquement la partie à l'extérieur du disque de centre $(1, 0)$, de rayon 2.
   (b) La formule $f(x, y) = \arcsin(x + 2y - 3)$ définit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ sur le domaine D du plan définit par

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x + 2y - 3 \leq 1\}$$

   Il s'agit de la partie de plan comprise, au sens large, entre les deux droites d'équation $x + 2y = 2$ et $x + 2y = 4$.

On voit de ces exemples que la détermination du domaine de définition d'une fonction de deux variables réelles associée à une formule $f(x, y) = ...$ nécessitent la détermination de parties du plan définies par des équations ou des inéquations cartésiennes du type

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \text{ est défini et } g(x, y) = 0\} \text{ ou } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \text{ est défini et } g(x, y) > 0\}$$

pour certaines (autres) fonctions de deux variables g.

9.1.2 Compositions

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles. Avec les types de fonctions que nous avons déjà rencontré, nous pouvons envisager les compositions suivantes :

1. Composition à gauche avec une fonction réelle de variable réelle. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une telle fonction définie sur I une partie de $\mathbb{R}$. La formule $(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$ définit la fonction $g \circ f$ sur l'ensemble

   $$\{(x, y) \in D,\ f(x, y) \in I\}$$

   La fonction $g \circ f$ est définie sur D à partir du moment où $f(x, y) \in I$ pour toute valeur de $(x, y) \in D$.
2. Composition à droite avec un arc paramétré. Soit $g : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie sur une certaine partie I de $\mathbb{R}$. La formule $(f \circ g)(t) = f(g(t))$ définit la fonction $f \circ g$ sur la partie de $\mathbb{R}$

   $$\{t \in I,\ g(t) \in D\}$$

   La fonction $f \circ g$ est définie sur tout I à partir du moment où $g(t) \in D$ pour tout $t \in I$.

9.1.3 Représentations graphiques

Graphe

Définition 116 *Le graphe d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}^2$ est la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$\{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in D\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in D \text{ et } z = f(x, y)\}$$

On peut représenter le graphe d'une telle fonction f comme une surface dans l'espace. On n'insistera pas ce semestre sur ce type de représentation.

9.1.4 Lignes de niveaux

Définition 117 *Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables réelles, $t \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau t est l'ensemble*

$$L_t = \{(x, y) \in D,\ f(x, y) = t\}$$

On peut représenter efficacement une fonction de deux variables en dessinant schématiquement quelques lignes de niveaux pour des valeurs de t bien choisies.

Un des buts de ce cours est de montrer quelques techniques de détermination de ces lignes de niveaux. Commençons par les exemples élémentaires

Fonctions constantes, fonctions affines et droites

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction constante égale à a, les lignes de niveau de f sont de deux types :
(i) Soit $t = a$ et alors $L_t = \mathbb{R}^2$
(ii) Soit $t \neq a$ et alors $L_t = \emptyset$
Cette situation est assez extrême au sens, où, comme nous le verrons plus loin, les lignes de niveau d'une « belle » fonction f sont la plupart du temps des réunions de « belles » courbes paramétrées.

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x, y) = a.x + b.y + c$ est une fonction affine non constante (ce qui équivaut à $(a, b) \neq (0, 0)$) alors ses lignes de niveaux sont toutes des droites. En effet, soit $t \in \mathbb{R}$,

$$L_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a.x + b.y = t - c\}$$

L_t est donc la droite d'équation cartésienne (en (x, y)) $a.x + b.y = t - c$.

Fonctions quadratiques : les coniques

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$$

est une fonction quadratique, non affine (ce qui équivaut à $(a_{20}, a_{11}, a_{02}) \neq (0, 0, 0)$), les lignes de niveau de f sont des **coniques**, que celles-ci soient non dégénérées (« vraies » ellipses, hyperboles ou paraboles) ou dégénérées (vide, un point isolé ou réunion de deux droites).

Examinons d'abord un certain nombre de cas modèles.

1. Cercle et ellipses : $f(x, y) = x^2 + y^2$.
   La ligne de niveau L_t de la fonction f est,
   (a) Si $t > 0$, le cercle de centre 0 de rayon $\sqrt{t}$
   (b) Si $t < 0$, vide
   (c) Si $t = 0$, le point $(0, 0)$

   Une ellipse (non dégénérée) est, par définition, l'image d'un cercle par une transformation affine bijective du plan. Une telle transformation est déterminée par la donnée de six nombres réels a, b, c, d, e, f vérifiant $ad - bc \neq 0$. Cette transformation associe à tout point (x, y) du plan le point (x', y') dont les coordonnées sont calculées de la façon suivante

$$\begin{aligned} x' &= a.x + b.y + e \\ y' &= c.x + d.y + f \end{aligned}$$

Il est équivalent de dire qu'il existe un autre repère du plan (en général non orthonormé), (O', I, J) tel que l'ellipse est l'ensemble des points de coordonnées (X, Y) dans ce repère vérifiant $X^2 + Y^2 = r^2$ pour un certain $r > 0$.

2. Hyperboles : $f(x, y) = x.y$, $g(x, y) = x^2 - y^2$
   Si $t \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau L_t de f est l'ensemble des points (x, y) vérifiant $x.y = t$.
   (a) Si $t \neq 0$, il s'agit du graphe de la fonction $x \neq 0 \mapsto y = \frac{t}{x}$. Ce graphe est une hyperbole non dégénérée.
   (b) Si $t = 0$, il s'agit de la réunion des deux droites d'équation respectives $x = 0$ et $y = 0$.

   Concernant les lignes de niveau M_t de g, un petit calcul pour se ramener au cas précédent s'impose. On a
   $$x^2 - y^2 = (x + y).(x - y)$$
   Posons $X = x+y$, $Y = x-y$. X, Y sont les coordonnées du point M dans un nouveau repère $(O', \vec{I}, \vec{J})$ déterminé comme ceci.
   (a) Le point O' vérifie $X = 0, Y = 0$, on a donc (en résolvant le système d'équations) $x = 0$, $y = 0$. Ce point O' est donc le point O.
   (b) Au vecteur $\vec{I}$ correspond un point I tel que $\vec{I} = \vec{O'I}$ où I est déterminé par $X = 1$, $Y = 0$. Il s'agit donc du point de coordonnées $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$
   (c) Au vecteur $\vec{J}$ correspond un point J tel que $\vec{J} = \vec{O'J}$ où J est déterminé par $X = 0$, $Y = 1$. Il s'agit donc du point de coordonnées $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$

   M_t est donc l'ensemble des points vérifiant $X.Y = t$. Pour représenter M_t, on est donc ramenés au cas précédent, mais dans le repère $(O', \vec{I}, \vec{J})$.
   On peut aussi voir M_t comme étant l'image de L_t par une certaine transformation affine du plan. Posons r la transformation du plan définie par
   $$x' = \frac{1}{2}(x + y),\ y' = \frac{1}{2}(x - y)$$
   Alors $(x', y') \in M_t$ si et seulement si $x'^2 - y'^2 = t$, c'est à dire si et seulement si $x.y = t$, i.e $(x, y) \in L_t$.
   Il en résulte que tout point de M_t est image par r d'un point de L_t et que, réciproquement, l'image par r de tout point de L_t est un point de M_t.
   Une hyperbole (non dégénérée) est, par définition, l'image de l'hyperbole $xy = 1$ par une transformation affine bijective du plan. Il est équivalent de dire qu'il existe un autre repère du plan (en général non orthonormé), (O', I, J) tel que l'hyperbole est l'ensemble des points de coordonnées (X, Y) dans ce repère vérifiant $X.Y = r$ pour un certain $r \neq 0$.

3. Paraboles : $f(x, y) = y - x^2$.
   Pour $t \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau L_t de cette fonction est l'ensemble des points (x, y) vérifiant $y = x^2 + t$: il s'agit donc du graphe de la fonction $x \mapsto y = x^2 + t$.
   Une parabole est, par définition, l'image de la parabole $y = x^2$ par une transformation affine bijective du plan. Il est équivalent de dire qu'il existe un autre repère du plan (en général non orthonormé), (O', I, J) tel que la parabole est l'ensemble des points de coordonnées (X, Y) dans ce repère vérifiant $Y = X^2$.
   Dans le cas de la ligne de niveau L_t, en posant $X = x$ et $Y = y - t$, L_t est l'ensemble des points vérifiant $Y = X^2$. L_t est donc bien une parabole.

9.1.5 Lignes de niveaux des fonctions quadratiques : une classification

Soit donc
$$f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$$
Une fonction quadratique non affine.

Nous allons voir, sur des exemples, une méthode tout à fait générale permettant de déterminer le type de coniques en jeu. Cette méthode, appelée **réduction de Gauss**, est basée sur l'identité bien connue suivante :

$$x^2 + 2a.x = (x+a)^2 - a^2$$

Elle démontre que, dans tous les cas, on peut choisir deux nouvelles variables, (X, Y), et donc un nouveau repère du plan telles que (C étant à chaque fois une constante) l'un des cas suivants se produit

1. Ellipses : $f(x,y) = \pm(X^2 + Y^2) + C$
2. Hyperboles : $f(x,y) = X^2 - Y^2 + C$
3. Parabole : $f(x,y) = X^2 - Y$
4. Cas dégénérés $f(x,y) = \pm X^2 + C$, $f(x,y) = C$

1. Ellipses : $\Delta = a_{11}^2 - 4a_{20}.a_{02} < 0$, $f(x,y) = \pm(X^2 + Y^2) + C$
   (a) Supposons que
   $$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x + 3y + 3$$
   On a alors, en appliquant notre identité pour « faire rentrer x et y dans les carrés » que
   $$\begin{aligned} f(x,y) &= 2(x^2 - 2x) + 3(y^2 + y) + 3 \\ &= 2((x-1)^2 - 1) + 3((y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) + 3 \\ &= (\sqrt{2}(x-1))^2 + (\sqrt{3}(y + \frac{1}{2}))^2 + \frac{1}{4} \\ &= X^2 + Y^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$
   On a ici posé $X = \sqrt{2}(x-1)$, $Y = \sqrt{3}(y + \frac{1}{2})$.
      i. La nouvelle origine a pour coordonnées le couple (x,y) vérifiant $X = 0, Y = 0$, c'est donc le point de coordonnées $(1, -\frac{1}{2})$.
      ii. Le nouvel axe des abscisses a pour équation $Y = 0$, c'est donc la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.
      iii. Le nouvel axe des ordonnées a pour équation $X = 0$, c'est donc la droite d'équation $x = 1$.

   En ces coordonnées (X, Y), $f(x,y) = X^2 + Y^2 + \frac{1}{4}$. On en déduit que la ligne de niveau L_t,
   $$L_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ X^2 + Y^2 = t - \frac{1}{4}\}$$
   est
      i. Une ellipse non dégénérée si $t > \frac{1}{4}$
      ii. Le point de coordonnées (x,y) avec $X = 0, Y = 0$ si $t = \frac{1}{4}$, i.e. $x = 1, y = -\frac{1}{2}$
      iii. vide si $t < \frac{1}{4}$.

   (b) Présence d'un terme croisé. Supposons que
   $$f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 + 4xy - 4x - y + 7$$
   On applique d'abord notre identité pour faire disparaître ce terme croisé
   $$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 4x - y + 3 \\ &= 2(x^2 + 2xy) + 3y^2 - 4x - 3y + 3 \\ &= 2(x+y)^2 - 2y^2 + 3y^2 - 4x - y + 3 \\ &= 2(x+y)^2 - 2y^2 + 3y^2 - 4(x+y) + 3y + 3 \\ &= 2u^2 + 3v^2 - 4u + 3v + 3 \\ &= X^2 + Y^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

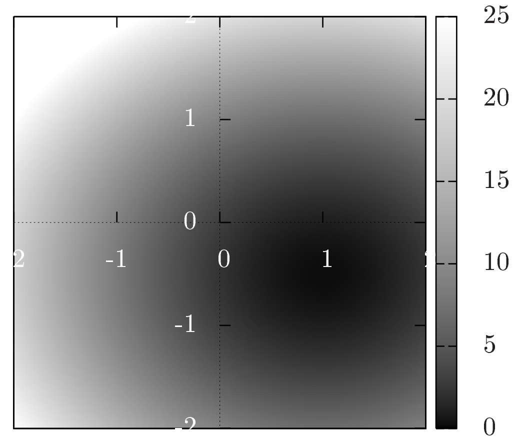

FIG. 9.1 – Lignes de niveau de $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x + 3y + 3$

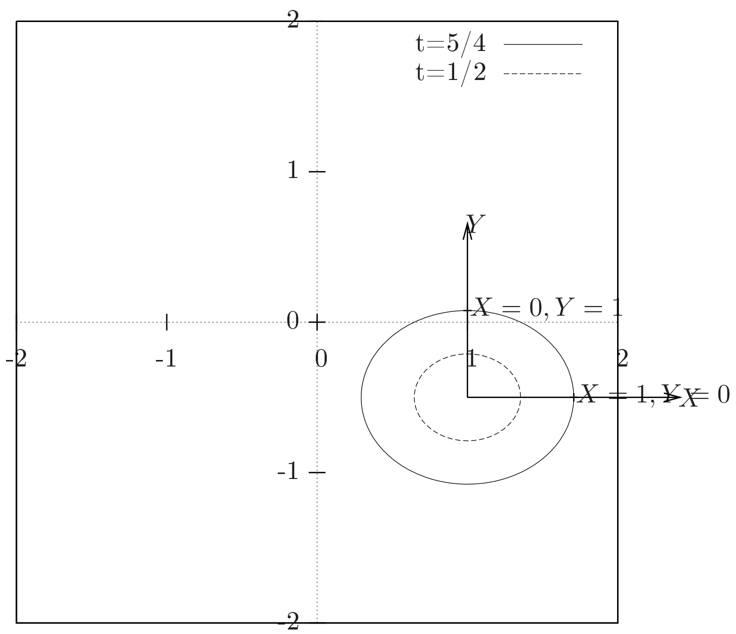

FIG. 9.2 – Quelques lignes de niveau explicites et le nouveau repère.

On a ici posé $u = x + y$, $v = y$, puis, en se ramenant au cas précédent,

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{2}(u-1) = \sqrt{2}(x+y-1) \\ Y &= \sqrt{3}(v+\frac{1}{2}) = \sqrt{3}(y+\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

i. La nouvelle origine a pour coordonnées le couple (x, y) vérifiant $X = 0, Y = 0$, c'est donc le point de coordonnées $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.
ii. Le nouvel axe des abscisses a pour équation $Y = 0$, c'est donc la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.
iii. Le nouvel axe des ordonnées a pour équation $X = 0$, c'est donc la droite d'équation $x + y = 1$.

Les conclusions sur les lignes de niveau de f sont les mêmes que précédemment, cf. figure **??** et suivante.

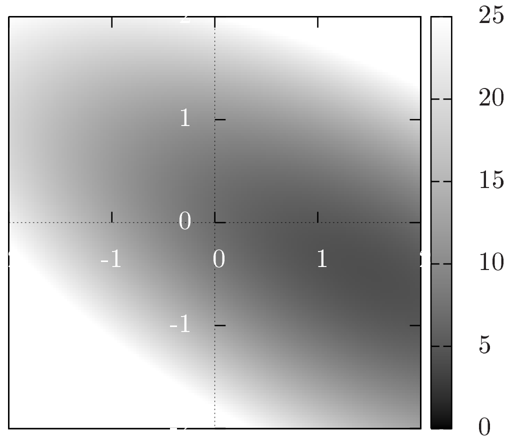

FIG. 9.3 – Lignes de niveau de $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2 + 4xy - 4x - y + 7$

2. Hyperboles : $\Delta = a_{11}^2 - 4a_{20}.a_{02} > 0$, $f(x, y) = X^2 - Y^2 + C$.
   (a) Appliquons la même technique que précédemment à l'exemple

$$f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 - 4x - 3y + 3$$

On a alors, en appliquant notre identité pour « faire rentrer x et y dans les carrés » que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2(x^2-2x) - 3(y^2+y) + 3 \\ &= 2((x-1)^2-1) - 3((y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) + 3 \\ &= (\sqrt{2}(x-1))^2 - (\sqrt{3}(y+\frac{1}{2}))^2 + \frac{7}{4} \\ &= X^2 - Y^2 + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

On a ici posé $X = \sqrt{2}(x-1)$, $Y = \sqrt{3}(y+\frac{1}{2})$, comme dans le premier exemple elliptique.

i. La nouvelle origine a pour coordonnées le couple (x, y) vérifiant $X = 0, Y = 0$, c'est donc le point de coordonnées $(1, -\frac{1}{2})$.
ii. Le nouvel axe des abscisses a pour équation $Y = 0$, c'est donc la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.
iii. Le nouvel axe des ordonnées a pour équation $X = 0$, c'est donc la droite d'équation $x = 1$.

En ces coordonnées (X, Y), $f(x, y) = X^2 - Y^2 + \frac{7}{4}$. On en déduit que la ligne de niveau L_t,

$$L_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ X^2 + Y^2 = t - \frac{7}{4}\}$$

est

i. Une hyperbole non dégénérée si $t \neq \frac{7}{4}$
ii. La réunion des deux droites d'équations respectives $X = Y$ et $Y = X$, autrement dit, les droites d'équations

$$\sqrt{2}(x-1) - \sqrt{3}(y + \frac{1}{2}) = 0 \text{ et } \sqrt{2}(x-1) + \sqrt{3}(y + \frac{1}{2}) = 0$$

Ces deux droites sont les asymptotes des hyperboles L_t, $t \neq \frac{7}{4}$.

(b) Présence d'un terme croisé/ absence de x^2. Supposons que

$$f(x, y) = 2y^2 + 4xy - 4x - y + 3$$

On applique d'abord notre identité pour faire disparaître ce terme croisé

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2y^2 + 4xy - 4x - y + 3 \\ &= 2(y^2 + 2xy) - 4x - y + 3 \\ &= 2(x+y)^2 - 2x^2 - 3x - (y + x) + 3 \end{aligned}$$

On pose alors $u = x + y$, $v = x$

$$\begin{aligned} &= 2u^2 - 2v^2 - u - 3v + 3 \\ &= 2(u^2 - \frac{1}{2}u) - 2(v^2 + \frac{3}{2}v) + 3 \\ &= 2(u - \frac{1}{4})^2 - 2\frac{1}{4^2} - 2(v + \frac{3}{4})^2 + 2\frac{9}{16} + 3 \\ &= X^2 - Y^2 + \frac{31}{8} \end{aligned}$$

On a ici posé $u = x + y$, $v = y$, puis, en se ramenant au cas précédent,

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{2}(u - \frac{1}{4}) = \sqrt{2}(x + y - \frac{1}{4}) \\ Y &= \sqrt{2}(v + \frac{3}{4}) = \sqrt{2}(x + \frac{3}{4}) \end{aligned}$$

i. La nouvelle origine a pour coordonnées le couple (x, y) vérifiant $X = 0, Y = 0$, c'est donc le point de coordonnées $(-\frac{3}{4}, 1)$.
ii. Le nouvel axe des abscisses a pour équation $Y = 0$, c'est donc la droite d'équation $x = -\frac{3}{4}$.
iii. Le nouvel axe des ordonnées a pour équation $X = 0$, c'est donc la droite d'équation $x + y = \frac{1}{4}$.

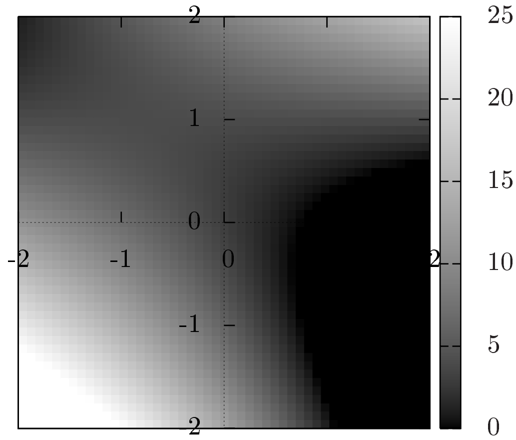

FIG. 9.4 – Lignes de niveau de $f(x,y) = 2y^2 + 4xy - 4x - y + 3$

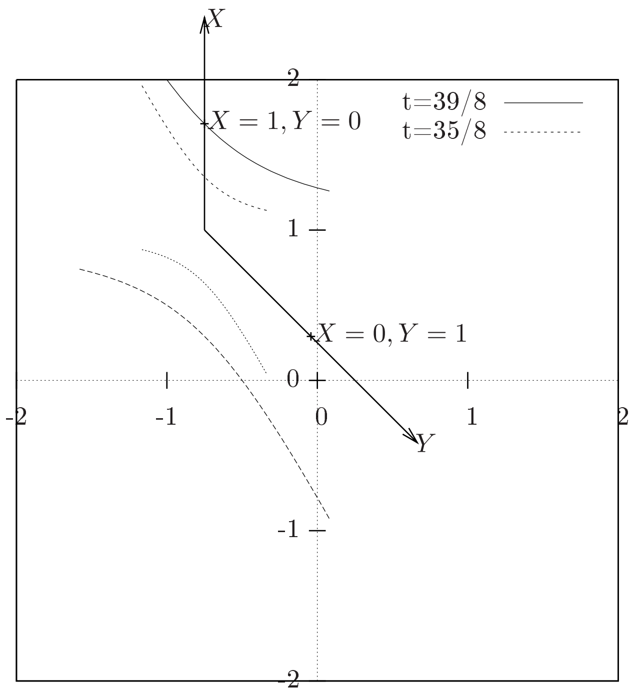

FIG. 9.5 – Quelques lignes de niveau explicites et le nouveau repère.

Les conclusions sur les lignes de niveau de f sont sur le même modèle que précédemment, la valeur $t = \frac{31}{8}$ étant la seule valeur pour laquelle la conique dégénère en une union de deux droites sécantes.

(c) Absence de x^2 et y^2. Comme f n'est pas supposée affine, on a donc $a_{11} \neq 0$. Regardons l'exemple $f(x,y) = -3xy + x + 2y + 1$. On change ici d'astuce en constatant que $xy = u^2 - v^2$ si $u + v = x$ et $u - v = y$, c'est à dire $u = \frac{1}{2}(x+y)$ et $v = \frac{1}{2}(x-y)$ On a donc

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= -3xy + x + 2y + 1 \\
&= -3(u^2 - v^2) + (u+v) + 2(u-v) + 1 \\
&= -3u^2 + 3v^2 + 3u - v + 1 \\
&= -3(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} + 3(v - \frac{1}{6})^2 - \frac{1}{12} + 1 \\
&= X^2 - Y^2 + \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

On a ici posé

$$\begin{aligned}
Y &= \sqrt{3}(u - \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y - 1) \\
X &= \sqrt{3}(v - \frac{1}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - y - \frac{1}{3})
\end{aligned}$$

La discussion est maintenant identique à ce qui a déjà été fait.

3. Paraboles et cas dégénérés : $\Delta = a_{11}^2 - 4a_{20}.a_{02} = 0$, $f(x,y) = X^2 - Y$.
Il peut se produire parfois des annulations désagréables. Regardons par exemple le cas de

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 10y + 7$$

On a, en éliminant le terme croisé xy que

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 10y + 7 \\
&= (x + 2y)^2 + 2(x + 2y) + 6y + 7 \\
&= (u + 1)^2 - 1 + 6y + 7 \\
&= X^2 - Y
\end{aligned}$$

On a ici posé $u = 2x + y$,

$$\begin{aligned}
X &= u + 1 = 2x + y + 1 \\
Y &= -6(y + 1)
\end{aligned}$$

(a) Le point dont les coordonnées vérifient $X = 0, Y = 0$ est le point $(0, -1)$

(b) Le nouvel axe des abscisses a pour équation $Y = 0$, soit $y = -1$.

(c) Le nouvel axe des ordonnées a pour équation $X = 0$, soit $2x + y = -1$.

Dans ce système de coordonnées, L_t est l'ensemble des points vérifiant $Y = X^2 - t$, il s'agit donc d'une parabole pour toutes les valeurs de t.

4. Droites parallèles : $\Delta = a_{11}^2 - 4a_{20}.a_{02} = 0$, $f(x,y) = X^2 + C$
Finalement, le cas de

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 4y + 7$$

se traite de façon similaire, en ayant posé $X = 2x + y + 1$, il reste

$$f(x,y) = X^2 + 6$$

L'ensemble L_t est donc l'ensemble des (x,y) tels que $X^2 = t - 6$.

(a) si $t > 6$, il s'agit de la réunion des deux droites (parallèles) d'équations $X = \pm\sqrt{t-6}$, ou encore $2x + y + 1 = \pm\sqrt{t-6}$

(b) si $t = 6$, il s'agit de la droite d'équation $2x + y + 1 = 0$

(c) si $t < 6$, L_t est vide.

9.2 Limites et continuité

9.2.1 Boules, voisinages et parties ouvertes

Nous allons définir la notion de limite de $f(x, y)$ lorsque le couple (x, y) tend vers un certain couple fixé $z_0 = (x_0, y_0)$. Pour cela nous allons copier la définition que nous avions en une variable réelle.

Les disques ouverts $D(z_0, \epsilon)$ de centre z_0, de rayon ϵ vont jouer en deux variable un rôle identique à celui que jouait en une variable l'intervalle ouvert $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$, centré en x_0, de rayon ϵ.

Si $z = (x, y)$, on pose $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, la distance de z à 0. On lira $|z|$, le **module** de z, ou sa **norme**. On remarque que si $z = (x, y)$, $z_0 = (x_0, y_0)$, alors

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

est la distance entre z et z_0.

Le disque ouvert $D(z_0, \epsilon)$ de centre $z_0 = (x_0, y_0)$, de rayon ϵ est

$$D(z_0, \epsilon) = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |z - z_0| < \epsilon\}$$

Soit z_0 un point, une partie V de $\mathbb{R}^2$ est dite **voisinage de** z_0 s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$D(z_0, \epsilon) \subset V$$

Exemples et Remarques

1. Un demi-plan ouvert P est voisinage de chacun de ses points. Un tel demi-plan est défini par trois nombres a, b, c, $(a, b) \neq (0, 0)$ par

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a.x + b.y + c < 0\}$$

2. Un disque ouvert est voisinage de chacun de ses points.
3. Si V est l'intersection d'un nombre fini de demi-plans ouverts ou de disques ouverts alors V est voisinage de chacun de ses points.
4. Il en est de même si V est réunion d'un nombre fini de tels objets « ouverts ».

9.2.2 Définition

Définition 118 *Soit $z_0 \in \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $D \cup \{z_0\}$ est voisinage de z_0.*

1. *On dit que f a pour limite ℓ en z_0, ce que l'on note*

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} f(z) = \ell \text{ ou } f(z) \overset{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}}{\longrightarrow} \ell$$

si, pour tout voisinage U de ℓ dans $\mathbb{R}$, il existe un voisinage V de z_0, contenu dans $D \cup \{z_0\}$ tel que si $z \in V$, $z \neq z_0$ alors $f(z) \in U$.

2. *Si f est définie en z_0, on dit que f est continue en z_0 si*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Proposition 119 (DL d'ordre 0) *Dans le même contexte que précédemment, f admet pour limite ℓ en z_0 si et seulement si il existe une fonction ϵ, définie au voisinage de $(0,0)$, de limite 0 en 0 telle que, pour tout z voisin de z_0, $z \neq z_0$,*

$$f(z) = \ell + \epsilon(z - z_0)$$

Remarques

1. On a, comme dans le cas d'une variable, unicité de la limite de f en z_0 sous réserve que cette limite existe.
2. Si f admet une limite en un point z_0, la fonction f est bornée sur un certain voisinage de z_0.
3. Pour prouver qu'un fonction $\epsilon(h,k)$ a pour limite 0 en 0, il suffit de démontrer une majoration du type
$$|\epsilon(h,k)| \leq \eta(\sqrt{h^2 + k^2})$$
pour une certaine fonction η d'une variable réelle, de limite 0 en 0.
4. Dans le cas de deux variables, nous n'avons pas de notion de limite à droite ou à gauche en un point car cela n'a pas grand sens. On peut en revanche définir la limite en un point suivant une partie A de $\mathbb{R}^2$ comme suit

   Définition 120 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $z_0 \in \mathbb{R}^2$, $A \subset D$, $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que tout voisinage de z_0 rencontre A en au moins un point. On dit que f a pour limite ℓ en z_0* **en suivant** *A, ce que l'on note*

   $$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z) = \ell \text{ ou } f(z) \overset{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}}{\to} \ell$$

   si, pour tout voisinage U de ℓ dans $\mathbb{R}$, il existe un voisinage V de z_0, tel que si $z \in V \cap A$, alors $f(z) \in U$.

   La définition de limite déjà donnée rentre dans ce cadre en prenant $A = D \setminus \{z_0\}$. Cette définition a un sens pour les fonctions d'une variable réelle, la limite à droite est en fait la limite suivant A en prenant $A =]x_0, x_0 + \delta[$ pour une certaine valeur de $\delta > 0$. La condition imposée sur A n'est la que pour garantir l'unicité de la limite suivant A, sous réserve d'existence. Nous ne nous servirons pas de cette notion cette année.

Exemples et Remarques

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction constante, elle est continue en chaque $z_0 \in \mathbb{R}^2$.
2. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction affine ou quadratique, elle est continue en chaque $z_0 \in \mathbb{R}^2$.

Définition 121
1. *Une partie D de $\mathbb{R}^2$ est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points.*
2. *Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue sur D si f est continue en tout $z_0 \in D$.*

Exemples et Remarques

1. Les demi-plans ouverts, les disques ouverts sont des parties ouvertes
2. Une intersection d'un nombre fini de parties ouvertes est ouverte
3. Une réunion de parties ouvertes est ouvertes
4. Pour démontrer, ce que l'on ne vous demandera pas de faire, qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est ouverte, il suffit de trouver une fonction continue $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) > 0\}$$
Disques et demi-plans ouverts rentrent dans ce cadre.

9.2.3 Opérations

Les règles sur les opérations et les limites dans ce cadre sont les mêmes que les règles que nous avons énoncées pour le cas des fonctions d'une variable réelle. Nous nous focalisons sur le cas des fonctions continues sur un ensemble ouvert.

Opérations algébriques

Proposition 122 *Soient D un domaine ouvert, $f, g : D \to \mathbb{R}$, deux fonctions continues alors*

1. *$f + g$, $f.g$ sont continues sur D.*
2. *l'ensemble $D' = \{(x, y) \in D,\ g(x, y) \neq 0\}$ est ouvert et la fonction $f/g : D' \to \mathbb{R}$ définie par la formule $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur D'.*

Exemples et Remarques

1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
2. Une fraction rationnelle est continue sur son domaine de définition, qui est ouvert.

Composition

La encore, les résultats d'une variable réelle se transposent : la continuité se comporte bien vis à vis des compositions

Proposition 123 *Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D.*

1. *Composition à gauche. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Si $f(x, y) \in I$ pour tout $(x, y) \in D$, la fonction $g \circ f$ est une fonction définie, continue sur D.*
2. *Composition à droite. Soit $g : I \to \mathbb{R}^2$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Si $g(t) \in D$ pour tout $t \in I$, la fonction $f \circ g$ est une fonction définie, continue sur I.*

9.3 Dérivabilité

9.3.1 DL d'ordre 1

En une variable réelle, la notion de développement limité d'ordre 1 en un point donné est intimement liée à la dérivabilité de la fonction en ce point. Le but est de comparer, localement, au voisinage du point considéré la fonction avec une fonction affine. Il en est de même en deux variables.

Définition 124 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $z_0 = (x_0, y_0)$, D voisinage de z_0. On dit que f admet un DL d'ordre 1 en z_0, ou de façon plus courte, que f est* **différentiable en** *z_0, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, une fonction ϵ, définie au voisinage de $0 = (0, 0)$, de limite 0 en 0 telle que, pour $z = (x, y)$, voisin de z_0, on a*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b.(y-y_0) + |(x-x_0, y-y_0)|\epsilon(x-x_0, y-y_0) \\ f(z) &= f(z_0) + < \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, z - z_0 > + |z - z_0|\epsilon(z - z_0) \end{aligned}$$

ou encore, telle que pour tout (h, k) suffisamment voisin de $(0, 0)$, on a

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + a.h + b.k + |(h,k)|\epsilon(h,k) \\ f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + < \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} > + |(h,k)|\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

Si f admet un DL d'ordre 1 en z_0, le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ s'appelle le gradient de la fonction f en z_0. On le note $\nabla f(z_0)$, à lire « nabla » de f ou gradient de f en z_0.

Exemples et Remarques

1. Fonctions affines. Si $f(x,y) = a.x + b.y + c$ alors f admet un DL d'ordre 1 en tout $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$f(x_0 + k, y_0 + h) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$$
Le gradient de f en z_0 est donc le vecteur indépendant de z_0
$$\nabla f(z_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
2. Fonctions quadratiques. Si $f(x,y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$, on a
$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= 2a_{20}x_0.h + a_{11}x_0.k + a_{11}y_0.h + 2a_{02}y_0.k + a_{20}h^2 + a_{11}hk + a_{02}k^2 \\ &= 2a_{20}x_0.h + a_{11}x_0.k + a_{11}y_0.h + 2a_{02}y_0.k + |(h,k)|\epsilon(h,k) \end{aligned}$$
car $|a_{20}h^2 + a_{11}hk + a_{02}k^2| \leq C(h^2 + k^2)$ et donc $a_{20}h^2 + a_{11}hk + a_{02}k^2 = \sqrt{h^2 + k^2}\epsilon(h,k)$ où ϵ est une fonction de limite nulle en 0. Cela démontre que f admet un DL d'ordre 1 en tout $z_0 = (x_0, y_0)$ et que le gradient de f en z_0 est
$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2a_{20}x_0 + a_{11}y_0 \\ 2a_{02}y_0 + a_{11}x_0 \end{pmatrix}$$
Nous verrons un peu plus loin comment retrouver facilement cette formule grâce au mécanisme des dérivées partielles.

9.3.2 Dérivées partielles

Une façon naturelle d'analyser une fonction de deux variables consiste à « geler » une variable et à étudier la fonction d'une variable réelle obtenue en laissant libre l'autre variable.

Définition 125 (Fonctions partielles) *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $(x_0, y_0) \in D$*

1. *La première fonction partielle $f_{|y=y_0}$ est définie par la formule $f_{|y=y_0}(x) = f(x, y_0)$. Si D est voisinage de (x_0, y_0) alors le domaine de définition de $f_{|y=y_0}$ est voisinage, dans $\mathbb{R}$, de x_0.*
2. *La deuxième fonction partielle $f_{|x=x_0}$ est définie par la formule $f_{|x=x_0}(y) = f(x_0, y)$. Si D est voisinage de (x_0, y_0) alors le domaine de définition de $f_{|x=x_0}$ est voisinage, dans $\mathbb{R}$ de y_0.*

Remarque. Il s'agit en fait de regarder les restrictions de f sur les droites respectivement d'équation $x = x_0$ et $y = y_0$. On a pour cela recours à un paramétrage de chacune de ces droites.

Définition 126 *Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, $(x_0, y_0) \in D$*

– *Si la première fonction partielle $f_{|y=y_0}$ est dérivable en x_0, on appelle dérivée partielle*[1]

[1] Dans cette partie, conformément à l'usage en physique et contrairement à l'usage que nous nous sommes fixés jusqu'à présent, les deux variables d'une fonction f vont porter des noms privilégiés. Dans la plupart des exemples suivants, la première variable s'appelera 'x', la deuxième 'y'.

Si on définit une fonction g par une formule du type $g(u,v) = ...$ pour (u,v), on considérera que sa première variable s'appelle u et la deuxième s'appelle v, on laisse au lecteur le soin d'interpréter correctement les expressions
$$\frac{\partial g}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial v}$$
Si nous avions voulu nous conformer à notre usage que les arguments d'une fonction ne portent pas de nom privilégiés, il faudrait, pour noter respectivement les première et deuxième dérivées partielles de f, écrire
$$\partial_1 f \text{ et } \partial_2 f$$
Cette notation n'est pas toujours très parlante aussi nous ne l'utiliserons pas.

de f par rapport à la première variable en (x_0, y_0) le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{df_{|y=y_0}}{dx}(x_0)$$

– *Si la deuxième fonction partielle $f_{|x=x_0}$ est dérivable en y_0, on appelle dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable en (x_0, y_0) le nombre*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{df_{|x=x_0}}{dy}(y_0)$$

Exemples et Remarques

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rcl} f_{y=y_0}(x) & = & x^2 + 3y_0.x - y_0^2 \\ f_{x=x_0}(y) & = & x_0^2 + 3y.x_0 - y^2 \end{array}$$

En dérivant la première égalité, (y_0 est un paramètre dans ce cas), on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{df_{|y=y_0}}{dx}(x_0) = 2x_0 + 3y_0$$

Pour la deuxième égalité, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{df_{|x=x_0}}{dy}(y_0) = 3x_0 - 2y_0$$

Dans la pratique, on accélère l'écriture en omettant les indices $_0$. Pour obtenir une expression de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, on dérive l'expression de $f(x, y)$ en considérant que y est une constante.

2. Si $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - 2y^2)$ définie sur l'ellipse remplie ouverte $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 < 1\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2x}{1 - x^2 - 2y^2}, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-4y}{1 - x^2 - 2y^2}$$

Proposition 127 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $z_0 \in D$. Si f est différentiable en z_0 alors les deux dérivées partielles de f en (x_0, y_0) existent et*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Preuve. On ne traite que le premier cas. On a

$$\begin{array}{rcl} f_{|y=y_0}(x_0 + h) & = & f(x_0 + h, y_0) \\ & = & f(x_0, y_0) + < \nabla f(z_0), \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} > + |h|\epsilon(h, 0) \\ & = & f(x_0, y_0) + h < \nabla f(z_0), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} > + |h|\epsilon(h, 0) \end{array}$$

Cette expression fourni clairement un développement limité d'ordre 1 de $f_{|y=y_0}$ au voisinage de x_0. $f_{|y=y_0}$ est donc dérivable en x_0 et

$$\frac{df_{|y=y_0}}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) =< \nabla f(z_0), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

De la même façon, $f_{|x=x_0}$ est dérivable en y_0 et

$$\frac{df_{|x=x_0}}{dy}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =< \nabla f(z_0), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$\diamond$

9.3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert du plan

Nous introduisons maintenant une classe de fonctions définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$ dont la différentiabilité en chaque point de D sera facilement vérifiable.

Définition 128 *Soit D une partie ouverte de D, on dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D (ce que l'on note $f \in \mathcal{C}^1(D)$) si*

1. *f est continue sur D*
2. *Les deux dérivées partielles de f existent en chaque point de D*
3. *Ces fonctions dérivées partielles, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, sont continues sur D.*

Opérations algébriques

Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine ouvert se comportent bien vis à vis des opérations algébriques, plus précisément

Proposition 129 *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$*

1. *$f + g$ et $f.g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D*
2. *Si g ne s'annule pas sur D, f/g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D*

On a de plus les formules, pour la dérivation partielle par rapport à la première variable

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial(f.g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}.g + f.\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial(f/g)}{\partial x} = \frac{1}{g^2}\left(g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Les formules correspondantes pour la dérivation par rapport à la deuxième variable étant similaires.

Composition à gauche

Proposition 130 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $f(z) \in I$ pour tout $z \in D$, la fonction $g \circ f$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et on a les formules*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g \circ f}{\partial x}(x, y) &= g'(f(x, y)).\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\
\frac{\partial g \circ f}{\partial y}(x, y) &= g'(f(x, y)).\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)
\end{aligned}$$

Exemple

Montrons que la fonction f définie par

$$f(x, y) = \ln(1 - (x^2 + 3y^2))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition naturel,

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 - (x^2 + 3y^2) > 0\}$$

Cet ensemble est une ellipse ouverte centrée en $(0, 0)$. Admettons qu'il est ouvert. f est la composée $g \circ h$ avec

$$\begin{aligned}
h(x, y) &= 1 - (x^2 + 3y^2) \\
g(t) &= \ln t
\end{aligned}$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]0, +\infty[$ (c'est la fonction ln usuelle !) ; la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D (car c'est un polynôme en deux variables) et prend ses valeurs dans I (D a été défini pour cela) $f = g \circ h$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g \circ h}{\partial x}(x,y) &= g'(h(x,y)).\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1-(x^2+3y^2)}.(-2x) \\
\frac{\partial g \circ h}{\partial y}(x,y) &= g'(h(x,y)).\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1-(x^2+y^2)}.(-6y)
\end{aligned}$$

Différentiabilité et fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Nous admettons le théorème suivant, qui est un théorème de Taylor-Young à l'ordre 1

Théorème 131 *Si $f \in \mathcal{C}^1(D)$ alors f est différentiable en chaque point (x,y) de D et l'on a*

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

9.3.4 Dérivées d'ordre 2 et DL d'ordre 2

Définition 132 *Soit D une partie ouverte de D, on dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D (ce que l'on note $f \in \mathcal{C}^2(D)$) si*

1. *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D*
2. *Les deux dérivées partielles de f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.*
3. *Les dérivées partielles secondes sont définies par*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}$$

Ces quatre fonctions sont continues sur D.

Les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur un domaine ouvert se comportent bien vis à vis des opérations algébriques, plus précisément

Proposition 133 *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$*

1. *$f + g$ et $f.g$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur D*
2. *Si g ne s'annule pas sur D, f/g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur D*

Proposition 134 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $f(z) \in I$ pour tout $z \in D$, la fonction $g \circ f$ est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.*

Exemples et Remarques

1. Si f est affine, toutes ses dérivées partielles secondes sont nulles.
2. Si f est quadratique, de la forme

$$f(x,y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2a_{20}x + a_{11}y & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2a_{20} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= a_{11}x + 2a_{02}y & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2a_{02} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= a_{11} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= a_{11}
\end{aligned}$$

Le phénomène suivant est assez étonnant

Théorème 135 (Schwarz) *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont égales sur D.*

Illustrons ceci par l'exemple de la partie 9.3.3.

$$f(x,y) = \ln(1-(x^2+3y^2))$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition naturel,

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1-(x^2+3y^2) > 0\}$$

En effet, f est la composée $g \circ h$ avec

$$\begin{array}{rcl} h(x,y) & = & 1-(x^2+3y^2) \\ g(t) & = & \ln t \end{array}$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I =]0,+\infty[$ (c'est la fonction ln usuelle !) ; la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D (car c'est un polynôme en deux variables) et prend ses valeurs dans I. $f = g \circ h$ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur D. On a

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{1}{1-(x^2+3y^2)}.(-2x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & \dfrac{-2(1-x^2-3y^2)+2x.(-2x)}{(1-(x^2+3y^2))^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & = & \dfrac{-12x.y}{(1-(x^2+3y^2))^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \dfrac{1}{1-(x^2+y^2)}.(-6y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & \dfrac{-6(1-(x^2+3y^2))+6y.(-6y)}{(1-(x^2+y^2))^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & = & \dfrac{-12y.x}{(1-(x^2+3y^2))^2} \end{array}$$

On dispose enfin d'une formule de Taylor à l'ordre 2.

Théorème 136 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, $(x_0,y_0) \in D$, il existe alors une fonction ϵ de limite nulle en $(0,0)$ telle que, pour (h,k) voisin de $(0,0)$*

$$\begin{array}{rcl} f(x_0+h, y_0+k) & = & \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{partie cste.}} + \\ & & + \underbrace{h.\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k.\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\text{partie linéaire}} + \\ & & + \underbrace{\dfrac{1}{2}\left(h^2.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + k^2.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) + 2hk.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)}_{\text{partie quadratique}} + \\ & & + \underbrace{(h^2+k^2)\epsilon(h,k)}_{\text{reste}} \end{array}$$

Illustrons ceci par l'exemple de la partie 9.3.3 en $(0,0)$.
On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= -2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= -6 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= 0
\end{aligned}$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 donne que, pour (x,y) voisin de $(0,0)$,

$$f(x,y) = -x^2 - 3y^2 + (x^2 + y^2)\epsilon(x,y)$$

pour une certaine fonction ϵ de limite 0 en $(0,0)$.

9.4 Dérivation des fonctions composées

Nous avons traité le cas des compositions à gauche par une fonction de variable réelle. Nous examinons maintenant le cas d'une composition à droite par un arc paramétré.

9.4.1 Formules

Théorème 137 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I. Si $\gamma(t) \in D$ pour tout $t \in I$, la fonction $f \circ \gamma$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et l'on a, pour $t \in I$*

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)'(t) &= < \nabla f(\gamma(t))), \gamma'(t) > \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)).x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).y'(t)
\end{aligned}$$

Exemples et Remarques Si f et γ sont de classe $\mathcal{C}^2$ alors $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$. La formule précédente montre qu'en effet, $(f \circ \gamma)'$ est de classe $\mathcal{C}^1$, du fait du même théorème. La formule pour $(f \circ \gamma)''$ est donc

$$(f \circ \gamma)'' = \frac{\partial f}{\partial x}.x'' + \frac{\partial f}{\partial y}.y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.x'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.y'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.x'.y'$$

Preuve. On fixe $t_0 \in I$. On va chercher à faire un DL d'ordre 1 de $f \circ \gamma$ au voisinage de t_0. L'hypothèse donne que, γ admet un DL d'ordre 1 en t_0. On a donc

$$\begin{aligned}
x(t_0 + \tau) &= x(t_0) + \tau.x'(t_0) + \tau\epsilon_1(\tau) \\
y(t_0 + \tau) &= y(t_0) + \tau.y'(t_0) + \tau\epsilon_2(\tau) \\
\gamma(t_0 + \tau) &= \gamma(t_0) + \tau.\gamma'(t_0) + \tau\epsilon(\tau)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, f est différentiable en $z_0 = (x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ et donc, il existe η, une fonction de limite nulle en 0 telle que, pour (h, k) voisin de 0,

$$f(x_0 + h, y_0 + k)) = f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} > + |(h, k)|\eta(h, k)$$

En substituant

$$\begin{aligned} h &= \tau.x'(t_0) + \tau\epsilon_1(\tau) = x(t_0 + h) - x_0 \\ k &= \tau.y'(t_0) + \tau\epsilon_2(\tau) = y(t_0 + h) - y_0 \end{aligned}$$

dans l'égalité précédente (cette substitution est légitime car, lorsque τ est suffisamment voisin de 0, (h, k) est suffisamment voisin de $(0, 0)$), on obtient

$$f(x(t_0 + \tau), y(t_0 + \tau)) \quad = \quad f(x_0, y_0) + \tau. < \nabla f(x_0, y_0), \gamma'(t_0) > + |\tau|\tilde{\eta}(\tau)$$

où $\tilde{\eta}$ tend vers 0 en 0. Ceci montre que $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et la dérivée à la forme annoncée. La formule de cette dérivée montre qu'elle est continue par les théorèmes continuité de composées et de produits.

◇

9.4.2 Gradient et tangentes aux lignes de niveau

Ce que montre le théorème précédent, c'est que si $\gamma(t), t \in I$ est une courbe paramétrée contenu dans une ligne de niveau de f (et donc *a fortiori* si γ est un paramétrage d'un morceau de ligne de niveau de f), on a alors

$$< \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) >= 0$$

En d'autres termes, $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal à la tangente en t à la courbe γ.

9.4.3 Le théorème des fonctions implicites

Dans la section précédente, on a vu que si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ et si la ligne de niveau de f passant par (x_0, y_0) est une courbe paramétrée admettant une tangente en ce point alors l'équation de cette tangente est

$$(X - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (Y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Le théorème suivant, que nous admettrons, bien qu'il soit démontrable avec les outils dont nous disposons nous dispense du deuxième type d'hypothèse.

Théorème 138 (Fonctions implicites) *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. $(x_0, y_0) \in D$. Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, alors il existe un intervalle U, voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$, un intervalle V, voisinage de y_0 dans $\mathbb{R}$, une fonction $\phi : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telle que $L_{f(x_0, y_0)} \cap (U \times V)$ est le graphe de la fonction ϕ.*

Par ailleurs, si $x \in U$, on a

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

Exemples et Remarques

1. On a, par définition de $L_{f(x_0, y_0)}$ que $x \in U, y \in V$ et $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ équivaut à $y = \phi(x)$. En particulier $y_0 = \phi(x_0)$.
2. Une fois que l'on sait que le graphe de ϕ, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est contenu dans la ligne de niveau, la formule de la dérivée est claire : il suffit de dériver par rapport à x la relation

$$f(x, \phi(x)) = \text{Cste}$$

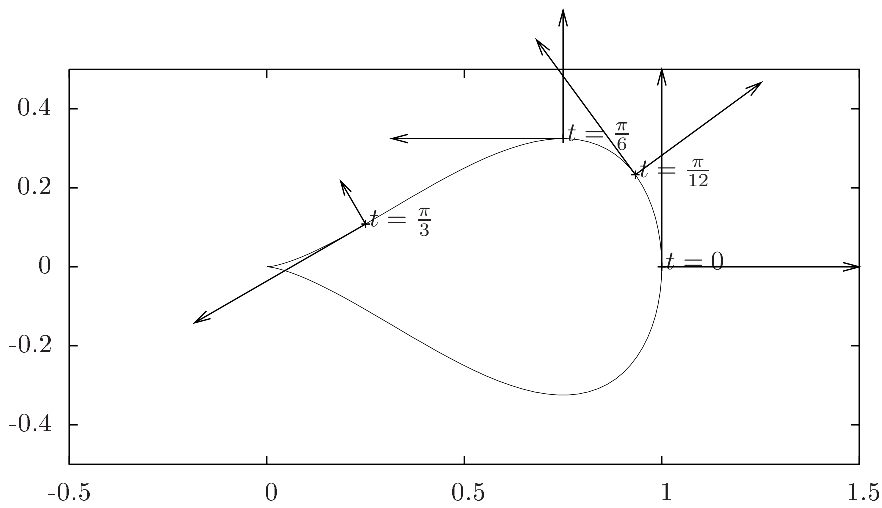

FIG. 9.6 – La fonction $f(x,y) = x^4 + y^2 - x^3$, la ligne de niveau 0 est paramétrée par $\gamma(t) = (\cos^2(t), \cos^3 t \sin t), t \in \mathbb{R}$. On a marqué, pour diverses valeurs de t, la tangente à la courbe et le gradient de f en $\gamma(t)$.

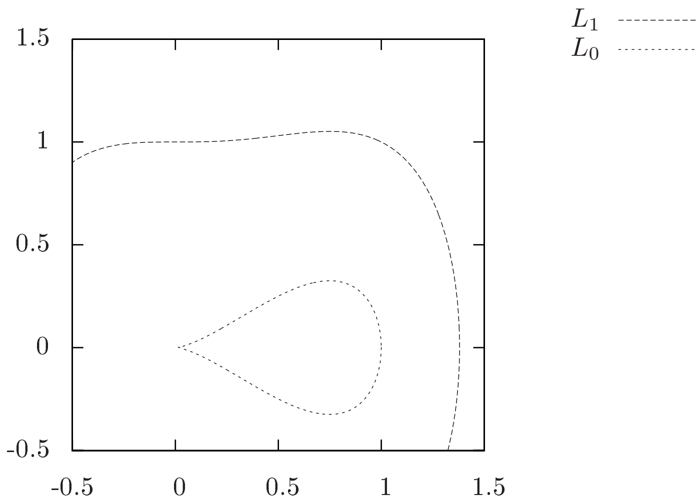

FIG. 9.7 – La fonction $f(x,y) = x^4 + y^2 - x^3$, son point critique en $(0,0)$, les lignes de niveau 0 et 1. En chaque point $\neq (0,0)$ la ligne de niveau de f passant par ce point est, au voisinage du point, le graphe d'une fonction lisse $y = \phi(x)$ ou $x = \psi(y)$; Ce n'est clairement pas le cas en $(0,0)$.

3. On a un énoncé analogue en supposant que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. La ligne de niveau passant par (x_0, y_0) est alors localement le graphe $x = \psi(y)$ d'une certaine fonction ψ.
4. Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ alors l'une des deux dérivées partielles est non nulle et, dans tous les cas, $L_{f(x_0,y_0)}$ est au voisinage de (x_0, y_0) une courbe géométrique admettant un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$, régulier[2]
5. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme le montre la formule.

9.5 Recherche d'extrema locaux

Comme pour les fonctions de une variable, on dispose du critère d'annulation de la dérivée pour repérer les extrema locaux d'une fonction de deux variables.

9.5.1 Extrema locaux et points critiques

Définition 139 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in D$.*

1. *On dit que f admet un* **maximum local** *en $z_0 = (x_0, y_0)$ s'il existe $D(z_0, \epsilon)$ un disque ouvert centré en z_0 tel que pour tout $z \in D(z_0, \epsilon) \cap D$, $f(z) \leq f(z_0)$. La valeur de ce maximum local est $f(z_0)$.*
2. *f admet un* **minimum local** *en $z_0 = (x_0, y_0)$ s'il existe $D(z_0, \epsilon)$ un disque ouvert centré en z_0 tel que pour tout $z \in D(z_0, \epsilon) \cap D$, $f(z) \leq f(z_0)$. La valeur de ce minimum local est $f(z_0)$.*
3. *f admet un* **extremum local** *en $z_0 = (x_0, y_0)$ s'il elle y admet un maximum local ou un minimum local.*

Théorème 140 *Soit $f : D \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Si f admet un extremum local en $z_0 = (x_0, y_0)$, on a alors*

$$\nabla f(z_0) = 0$$

Preuve. La fonction partielle $f_{|y=y_0}$ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un certain voisinage de x_0. Sa dérivée s'annule donc en x_0 et l'on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

Le même raisonnement implique que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

et finalement, le vecteur $\nabla f(z_0)$ est nul. $\diamond$

Exemples et Remarques Comme en une variable il s'agit d'une condition nécessaire.

Un point z_0 tel que $\nabla f(z_0) = 0$ s'appelle un **point critique** de la fonction f. Ce que dit le théorème c'est que les extrema locaux d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D sont à rechercher en examinant les points critiques de cette fonction. Une étude supplémentaire au voisinage du point critique est alors nécessaire pour affirmer le caractère de maximum ou de minimum local.

9.5.2 Conditions suffisantes à l'ordre 2

Pour les fonctions d'une variable réelle, nous avons à notre disposition le critère suivant pour conclure à l'extrémalité d'un point critique

Proposition 141 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et x_0 un point critique de f : $f'(x_0) = 0$*

[2] i.e. sans point singulier

1. *Si $f''(x_0) > 0$, la fonction f admet un minimum local en x_0.*
2. *Si $f''(x_0) < 0$, la fonction f admet un maximum local en x_0.*

Preuve. Écrivons le développement de Taylor à l'ordre 2 de f en x_0.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h^2 \left(\frac{1}{2} f''(x_0) + \epsilon(h)\right)$$

pour tout h voisin de 0, $\epsilon(h)$ étant une certaine fonction de limite nulle en 0. Cela montre que si $f''(x_0) \neq 0$, pour $h \neq 0$, h voisin de 0 alors $f(x_0 + h) - f(x_0)$ est du même signe que $f''(x_0)$, ce qui entraîne la conclusion de la proposition. $\diamond$

Pour les fonctions de deux variables, on a, par une méthode similaire le résultat suivant

Théorème 142 *Soit D une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et $z_0 = (x_0, y_0)$ un point critique de f : $\nabla f(z_0) = 0$*

1. *(Elliptique 1) Si $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, la fonction f admet un minimum local en z_0.*
2. *(Elliptique 2) Si $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, la fonction f admet un maximum local en z_0.*
3. *(Hyperbolique) Si $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, la fonction f n'admet pas d'extremum local en z_0.*

Exemples et Remarques

1. Ce théorème ne permet de conclure que si la quantité $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est non nulle, c'est à dire lorsque les lignes de niveau de la partie quadratique du développement de Taylor-Young a pour lignes de niveau de vraies ellipses ou hyperboles.
2. Un théorème plus fort dit que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si l'on est dans les hypothèses du théorème, alors au voisinage de z_0, les lignes de niveau de f 'ressemblent' à des petites ellipses (dans les cas 'elliptiques') ou de petites hyperboles (dans le cas 'hyperbolique')

Preuve. La preuve est basée sur un développement de Taylor de f en z_0 à l'ordre 2. Avant de faire ceci, nous devons regarder le cas d'une fonction quadratique en 0 Supposons que, a, b et c sont trois réels fixés et que

$$f(x, y) = a.x^2 + 2.bx.y + c.y^2$$

Posons $\Delta = b^2 - ac$.

Si $a \neq 0$, $\Delta < 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}yx + \frac{c}{a}y^2\right) \\ &= a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}y^2\right) \\ &= a\left(X^2 + Y^2\right) \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$X = x + \frac{b}{a}y,\ Y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{a}y$$

(X, Y) est le couple de coordonnées de (x, y) dans un autre repère $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$. Si $a > 0$, on en déduit que le minimum (absolu) de f est 0, il n'est atteint qu'en $O = (0, 0)$. Pour $a > 0$, il s'agit d'un maximum.

On a de plus

Lemme 143 *1. Si $a > 0$, il existe une constante $a_+ > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(x, y) \geq a_+(x^2 + y^2)$$

2. Si $a < 0$, il existe une constante $a_- < 0$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) \leq a_-(x^2 + y^2)$$

Preuve. Écrivons, en coordonnées polaires, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. On a $x^2 + y^2 = r^2$ et, en posant $h(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$,

$$f(x, y) = r^2(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta) = r^2 h(\theta)$$

La fonction h est une fonction continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 2\pi]$. Elle y admet un maximum a_- et un minimum a_+. On a donc

$$a_+(x^2 + y^2) \leq f(x, y) \leq a_-(x^2 + y^2)$$

Le calcul précédent montre que h est constamment du signe de a, de ceci on déduit que si $a > 0$ alors $a_+ > 0$ et que si $a < 0$ alors $a_- < 0$, ce qui donne les inégalités cherchées. $\diamond$

Si $\Delta > 0$, le même calcul donne

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}yx + \frac{c}{a}y^2\right) \\ &= a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}y^2\right) \\ &= a\left(X^2 - Y^2\right) \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$X = x + \frac{b}{a}y,\ Y = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}y$$

(X, Y) sont les coordonnées de (x, y) dans un autre repère $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$. Si $a > 0$, on en déduit que la restriction de f à la droite d'équation $X = 0$ admet un maximum absolu strict en $(0, 0)$ alors que la restriction de f à la droite d'équation $Y = 0$ admet un minimum absolu strict. En tout état de cause, dans tout disque centré en 0, il y a deux points z_+ et z_- tels que

$$f(z_-) < f(0) < f(z_+)$$

f n'admet donc ni minimum ni maximum local en 0.

Le théorème est donc vérifié pour les fonctions quadratiques.

Supposons maintenant f de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et écrivons le développement de Taylor à l'ordre 2 de f en $z_0 = (x_0, y_0)$.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0) = \left(a.h^2 + 2b.hk + c.k^2\right) + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k)$$

pour tout (h, k) voisin de 0, $\epsilon(h, k)$ étant une certaine fonction de limite nulle en 0 et avec

$$a = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ b = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),\ c = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Si $\Delta = b^2 - ac < 0$, (ce qui force $a \neq 0$ et $c \neq 0$, a et c de même signe), on est en position pour appliquer le lemme précédent.

1. Si $a > 0$, il existe $a_+ > 0$ tel que, pour tout (h,k), $a.h^2 + 2b.hk + c.k^2 > a_+(h^2+k^2)$ et donc

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0) \geq (h^2+k^2)(a_+ + \epsilon(h,k))$$

   Pour (h,k) appartenant à un certain voisinage de 0, $a_+ + \epsilon(h,k) > 0$, ce qui implique que $f(x_0+h, y_0+k) > f(x_0)$ pour $(h,k) \neq (0,0)$ et donc f admet un minimum local (strict) en (x_0, y_0).
2. Pour $a < 0$, le même raisonnement avec a_- donne que f admet en (x_0, y_0) un maximum local (strict).

Dans le cas $\Delta > 0$ quitte à introduire de nouvelles variables H et K, fonctions linéaires de (h,k), on est dans la situation où

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0) = H^2 - K^2 + (H^2+K^2)\epsilon(H,K)$$

Si (h,k) appartiennent à la droite $H = 0$,

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0) = K^2(-1+\epsilon(0,K))$$

et f n'admet pas de maximum local en (x_0, y_0).

La situation sur la droite $K = 0$ montre que f n'admet pas de minimum local en (x_0, y_0) d'où la conclusion du théorème. $\diamond$

Chapitre 10

Intégrales et primitives

10.1 Intégrale et aire

Il est bien connu que l'intégrale d'une fonction **positive** sur un segment $[a, b]$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de la fonction au-dessus de l'intervalle $[a, b]$ entretiennent des rapports étroits[1] Nous exprimons dans cette partie ce lien. Il est à noter que la notion d'aire d'une partie de plan est, à ce stade, assez primitive. On sait ce qu'est l'aire d'un triangle, d'un parallélogramme et de toute figure polygonale pour laquelle on dispose d'une « décomposition en triangles » et on a l'« intuition » de ce qu'est l'aire d'un disque.

10.1.1 Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue, positive, sur un intervalle $[a, b]$. Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut alors « approximer » la région comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de f au dessus de $[a, b]$ par l'une des réunions suivantes de rectangles ou de trapèzes.

L'aire de ces approximations est respectivement

$$\begin{aligned}
S_n^g &= \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}).\frac{b-a}{n} \\
S_n^d &= \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1)\frac{b-a}{n}).\frac{b-a}{n} \\
T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a + k\frac{b-a}{n}) + f(a + (k+1)\frac{b-a}{n})}{2}.\frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}(S_n^g + S_n^d)
\end{aligned}$$

S_n^g, S_n^d, T_n sont des exemples de sommes de Riemann[2] associées à la fonction f et à la subdivision régulière $\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, b\}$ de l'intervalle $[a, b]$.

On a alors le théorème fondamental que nous allons démontrer dans les parties suivantes

Théorème 144 *Soit f une fonction continue, positive, sur un intervalle $[a, b]$ alors les suites S_n^g, S_n^d et T_n convergent vers $\int_a^b f(t)\ dt$*

Module d'uniforme continuité

Définition 145 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. On dit que f admet un* **module d'uniforme continuité** *sur I s'il existe une fonction $\omega : [0, +\infty[\to$*

[1] Dans certains ouvrages, on trouve même ceci comme **définition** de ladite intégrale

[2] On pose $t_k = a + k.\frac{b-a}{n}$ pour $k = 0, \dots, n$, $\delta_n t = t_{k+1} - t_k = \frac{b-a}{n}$, l'écart entre deux t_k consécutifs. Remarquer la similitude de notation entre $S_n^g = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k).\delta_n t$ et $\int_a^b f(t)\ dt$

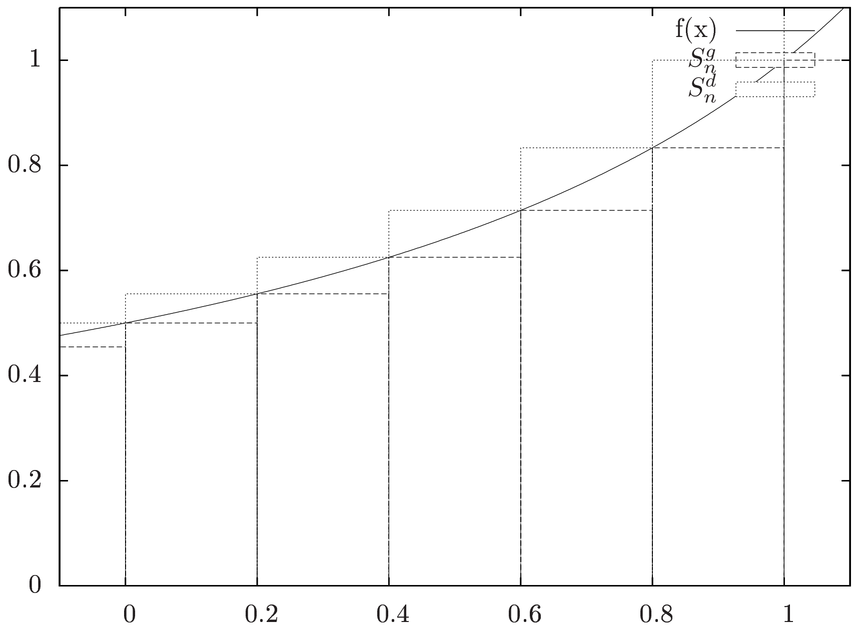

FIG. 10.1 – S_n^g, S_n^d, T_n est la moyenne de ces deux nombres ($n = 5$)

$[0, +\infty[$, *croissante et de limite nulle en* 0 *telle que*

$$\textit{pour tous } x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$$

Une telle fonction ω sera appelée un module d'uniforme continuité pour f sur l'intervalle I.

Exemples et Remarques

1. Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un module d'uniforme continuité alors, clairement, f est continue sur I.
2. La fonction $f(x) = x^2$ n'admet pas de module d'uniforme continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier. En effet, si c'était le cas, il existerait une fonction ω telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $\epsilon > 0$, on a

$$|2.x\epsilon + \epsilon^2| = |(x + \epsilon)^2 - x^2| \leq \omega(\epsilon)$$

   Si nous fixons $\epsilon > 0$ et laissons x tendre vers $+\infty$, le membre de gauche de cette inégalité tend vers $+\infty$ alors que le membre de droite est une constante : ceci n'est pas possible.
3. La fonction $f(x) = x^2$ admet un module d'uniforme continuité sur l'intervalle $[-1, 1]$. En effet, si x, $y \in [-1, 1]$, on a

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2|x - y| \text{ car } |x + y| \leq 2$$

   La fonction $\omega(\epsilon) = 2\epsilon$ définie pour $\epsilon \geq 0$ est donc un module d'uniforme continuité pour f sur l'intervalle $[-1, 1]$.
4. Le même raisonnement, en utilisant de plus le théorème des accroissements finis (cf. théorème 60) pour évaluer l'accroissement $|f(x) - f(y)|$ donne que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ alors elle y admet un module d'uniforme continuité ω. On peut prendre, si M est un majorant de $|f'|$ sur $[a, b]$, la fonction $\omega(\epsilon) = M\epsilon$.
5. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $I = [0, 10]$ admet un module d'uniforme continuité sur $[0, 10]$: Il s'agit d'évaluer $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|$ par une fonction de $|x - y|$. L'homogénéité du problème

(i.e. la façon dont une telle inégalité varie lorsque l'on remplace x, y par $t.x$, $t.y$ avec t un petit paramètre positif suggère une majoration du type

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq C\sqrt{|x-y|}$$

Nous prouvons que l'inégalité précédente avec $C=1$ est vraie pour tous $x, y \in [0,+\infty[$. La fonction $\omega(\epsilon)=\sqrt{\epsilon}$ est donc un module d'uniforme continuité pour $\sqrt{.}$ sur $[0,10]$.
Étudions d'abord le cas $y=1$. Soit $h(x)=|\sqrt{x}-1|/\sqrt{|x-1|}$ pour $x \geq 0$. Cette fonction positive est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $I_0=]0,1[$ et $I_+=]1,+\infty[$.
Sur I_0, $h(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ et donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1-x}{(1+\sqrt{x})\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x}}{(1+\sqrt{x})} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

De même, sur I_+,

$$h(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1} \leq 1$$

On a donc que pour tout $x \geq 0$, $x \neq 1$

$$|\sqrt{x}-\sqrt{1}| \leq C\sqrt{|x-1|}$$

et la validité de cette inégalité pour $x=1$ est évidente. Soit maintenant $y>0$, on a, en appliquant le cas précédent, que

$$\begin{aligned} |\sqrt{x}-\sqrt{y}| &= \sqrt{y}|\sqrt{\frac{x}{y}}-1| \\ &\leq \sqrt{y}\sqrt{|\frac{x}{y}-1|} \\ &\leq \sqrt{|x-y|} \end{aligned}$$

et finalement cette inégalité est claire lorsque $y=0$.
Nous venons donc de montrer que $\omega(\epsilon=\sqrt{\epsilon}$ est un module d'uniforme continuité pour la fonction $\sqrt{}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

6. Plus généralement, et **c'est un théorème difficile** (le Théorème de Heine), toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $I=[a,b]$ y admet un module d'uniforme continuité. D'une manière générale, on ne peut trouver de formule très simple pour un tel module d'uniforme continuité ω.

Preuve du théorème sur les sommes de Riemann

Nous nous plaçons dans les notations du théorème 144 et soit ω un module d'uniforme continuité pour f sur $[a,b]$. Nous démontrons le théorème pour S_n^d, la preuve pour S_n^g étant similaire et nous remarquons que sachant que S_n^d et S_n^g converge vers la même limite, leur moyenne, T_n converge aussi vers cette limite.

Du fait de la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t)\ dt$$

et donc par inégalité triangulaire

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt - S_n^d\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t)\ dt - f(a+k\frac{b-a}{n}).\frac{b-a}{n}\right|$$

Il s'agit de remarquer que

$$f(a+k\frac{b-a}{n}).\frac{b-a}{n} = \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(a+k\frac{b-a}{n})\ dt$$

et donc que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t)\ dt - f(a+k\frac{b-a}{n}).\frac{b-a}{n}\right| &\leq \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} |f(t) - f(a+k\frac{b-a}{n})|\ dt \\
&\leq \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} \omega(\frac{b-a}{n})\ dt \\
&= \frac{b-a}{n}\omega(\frac{b-a}{n})
\end{aligned}$$

On a utilisé ici que

$$|f(t) - f(a+k\frac{b-a}{n})| \leq \omega(\frac{b-a}{n})$$

lorsque $t \in \left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]$ car alors

$$|t-(a+k\frac{b-a}{n})| \leq \frac{b-a}{n}$$

et la fonction ω est croissante. En sommant ces n inégalités pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient que

$$\left|\int_a^b f(t)\ dt - S_n^d\right| \leq (b-a)\omega(\frac{b-a}{n})$$

Lorsque $n \to \infty$, le membre de gauche de cette inégalité tend clairement vers 0, ce qui achève la démonstration[3] et donne de plus une **estimation de la vitesse de convergence** de S_n^d vers $\int_a^b f(t)\ dt$.

10.1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

L'intégrale d'une fonction f positive et continue sur un segment $[a,b]$ correspond donc à l'idée que nous nous faisons de l'aire comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses. Par ailleurs, la règle de Chasles, se traduit en ces termes géométriques par le fait que l'aire de l'union de deux

[3]Soit $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ des points de $[a,b]$ formant une subdivision $\mathcal{T}$ de l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles. Le **pas** de cette subdivision est par définition le nombre $h_{\mathcal{T}} = \max_{k=0,\ldots,n-1}|t_{k+1}-t_k|$. Donnons nous aussi une famille de n réels, $\tau_0,\ldots,\tau_{n-1}$ avec $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. La somme de Riemann associée à la subdivision $\mathcal{T}$ e la famille $(\tau_0,\ldots,\tau_n)$ est

$$S_{\mathcal{T}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(t_{k+1}-t_k)$$

. La démonstration précédente donne l'estimation

$$|S_{\mathcal{T}} - \int_a^b f(t)\ dt| \leq (b-a)\omega(h_{\mathcal{T}})$$

et la convergence vers $\int_a^b f(t)\ dt$ d'une suite de ces sommes de Riemann associées à une suite de subdivisions lorsque le pas des subdivisions tend vers 0.

formes géométriques dont l'intersection est un segment est égale à la somme des aires de chacune de ces formes géométriques.

Si f est une fonction positive sur un segment $[a, b]$, continue par morceaux[4] L'aire comprise entre le graphe et l'axe des abscisses devrait alors être naturellement

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\ dt$$

Si f est une fonction continue par morceaux, quels que soient les valeurs positives ou négatives qu'elle peut prendre, nous définissons

$$\int_a^b f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\ dt$$

où $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, forme une **subdivision associée à** f et $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\ dt$ est entendu comme étant l'intégrale de t_k à t_{k+1} de la fonction $\tilde{f}$ valant f sur $]t_k, t_{k+1}[$, $\tilde{f}(t_k) = \lim_{t \to t_k^+} f(t)$ et $\tilde{f}(t_{k+1}) = \lim_{t \to t_{k+1}^-} f(t)$.

La règle de Chasles montre que pour une fonction f continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, la valeur de $\int_a^b f(t)\ dt$ **ne dépend pas** de la subdivision associée choisie pour effectuer le calcul[5]

Pour calculer effectivement l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, il s'agit de décomposer l'intervalle en sous intervalles sur lesquels f est continue et de calculer chacune des intégrales sur ces sous-intervalles.

Les propositions 64, 65, 66, 68 et 69 sont encore valables dans le cas de fonctions f, g continue par morceaux.

Par contre la proposition 67 est **fausse** dans ce cadre, elle devient

Proposition 146 *Si $a < b$, f est positive ou nulle sur $[a, b]$, f est continue par morceaux sur I, et*

$$\int_a^b f(t)\ dt = 0$$

alors f est nulle sur $[a, b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points[6].

Le théorème 144 concernant les sommes de Riemann reste vrai pour les fonctions continues par morceaux. Sa preuve est cependant plus compliquée dans ce cas[7].

10.2 Techniques de calcul

Dans cette partie, nous essayons de donner des techniques permettant de calculer, ou tout au moins de simplifier certaines expressions intégrales. Nous nous plaçons dans le cas où les fonctions à intégrer (les **intégrandes**) sont de forme spéciale. Les méthodes utilisées sont essentiellement l'intégration par parties, le changement de variable et naturellement la reconnaissance visuelle de dérivées.

---

[4] Par cela nous entendons, et c'est une définition, qu'il existe des points $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, formant une **subdivision associée à** f, tels que f est continue sur chacun des intervalles $]t_k, t_{k+1}[$, k variant de 0 à $n-1$ et que f admet une limite à gauche et à droite en chacun des t_k (droite en a, gauche en b).

[5] Remarquons que nous n'avons pas exclu des subdivisions associées à f qui ne sont pas « économiques ». Il n'y a par exemple aucune raison pour que les points t_k d'une telle subdivision soient des points de discontinuité de f, par contre, il doit être clair que tous les points de discontinuité de f font partie des points de la subdivision.

[6] qui sont points de discontinuité de f

[7] Il s'agit de séparer des intervalles sur lesquels f est continue des points de discontinuité. Le traitement au voisinage des points de discontinuité utilise le fait que f est globalement bornée.

10.2.1 Fractions rationnelles

Le but de cette section est de décrire une méthode permettant de calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle ou une primitive d'une telle fonction sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Cette technique est basée sur deux faits :

1. on peut décomposer toute fraction rationnelle en « éléments simples »
2. on dispose de techniques permettant d'intégrer ces éléments simples.

A titre d'exemple préparatoire, nous présentons cette méthode pour le calcul d'une primitive sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ de

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}$$

f est clairement continue sur l'intervalle I et l'on est donc assurés de l'existence d'une telle primitive. Nous cherchons ici à en obtenir une formule explicite.

On a, pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right) && (10.1) \\ &= \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} && (10.2) \end{aligned}$$

On peut trouver facilement une primitive pour chacun des termes de cette somme et on en déduit qu'un primitive de f sur I est

$$\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

Décomposition en éléments simples

Le lecteur perplexe doit ici se demander d'où sort la décomposition (10.2) qui fait le travail demandé d'une façon aussi miraculeuse, s'il est possible de trouver de telles décompositions pour n'importe quelle fraction rationnelle. La réponse tient en le résultat suivant que nous admettons[8].

Définition 147 *Les* **éléments simples** *pour les fractions rationnelles sont les fonctions de l'un des trois types suivants*

1. *Les monômes, de la forme $S(x) = \lambda.x^n$ où λ est un réel non nul, n un entier naturel. On prend la convention usuelle que x^0 est la fonction constante égale à 1.*
2. *Les éléments de première espèce de la forme $S(x) = \frac{\alpha}{(x+a)^n}$ où α est un réel non nul, b un réel quelconque, n un entier naturel > 0.*
3. *Les éléments de deuxième espèce de la forme $S(x) = \frac{\beta.x+\gamma}{(x^2+b.x+c)^n}$ où β, γ est un couple de réels non nul, b, c deux réels quelconques vérifiant $b^2 - 4c < 0$, n un entier naturel > 0.*

Si S_1 et S_2 sont deux éléments simples et que, pour tout x de leur ensemble de définition commun, $S_1(x) = S_2(x)$ alors S_1 et S_2 sont du même type et leurs nombres caractéristiques (λ, n pour les monômes, α, a, n pour les éléments de première espèce, β, γ, b, c, n pour ceux de seconde espèce) sont égaux.

Théorème 148 (Décomposition en éléments simples) *Soit $f = \frac{N}{D}$ une fraction rationnelle avec N et D deux fonctions polynomiales, D n'étant pas identiquement nulle. Il existe alors un unique ensemble d'éléments simples $\{S_k(x),\ k = 1, \dots, K\}$ tel que*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} S_k(x)$$

[8] et qui sera démontré dans le cours sur les polynômes et fractions rationnelles

Exemples et Remarques

1. Dans l'exemple introductif, la famille des éléments simples associés à f comporte deux membres
$$S_1(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \text{ et } S_2(x) = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$$
S_1 est de première espèce avec $n = 1$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $a = 1$ et S_2 est de seconde espèce avec $n = 1$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$, $b = 0$ et $c = 1$. La partie unicité du théorème signifie que si l'on dispose d'un ensemble $\{\tilde{S}_k(x),\ k = 1, \ldots, \tilde{K}\}$ d'éléments simples tels que
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\tilde{K}} \tilde{S}_k(x)$$
pour tous x tels que l'expression précédente à un sens alors le nombre $\tilde{K}$ de ces éléments simples vaut 2, et, **quitte à renuméroter**,
$$S_1(x) = \tilde{S}_1(x) \text{ et } S_2(x) = \tilde{S}_2(x).$$

2. Pour mener à bien une décomposition d'une fraction $f = \frac{N}{D}$, nous pouvons ajouter les précisions suivantes
   (a) Si le degré de N est inférieur au degré de D, il n'y aura aucun monôme dans la décomposition en éléments simples de f. On peut toujours se ramener à ce cas en effectuant une division Euclidienne de N par D. Par exemple, si
   $$N(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 2 \text{ et } D(x) = 1 + x + x^2 + x^3 = (x+1)(x^2+1),$$
   en effectuant la dite division Euclidienne, on obtient
   $$N(x) = (x-2)D(x) + x$$
   et donc
   $$f(x) = x - 2 + \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}$$
   Comme nous avons déjà effectué la décomposition en éléments simples de cette dernière fraction, on obtient alors la décomposition de f
   $$f(x) = x - 2 + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$$
   (b) Si le degré de N est inférieur au degré de D et si D est sous forme factorisée
   $$D(x) = P_1^{n_1} \ldots P_K^{n_K}.Q_1^{m_1} \ldots Q_L^{m_L}$$
   avec la convention usuelle que si l'entier K (resp. L) vaut 0, il n'y a aucun polynôme de type P (resp. Q) où
      i. les K polynômes P_k (tous distincts) sont de la forme
      $$P_k(x) = x + a_k$$
      pour un certain réel a_k
      ii. les L polynômes Q_ℓ (tous distincts) sont de la forme
      $$Q_\ell(x) = x^2 + b_\ell.x + c_\ell$$
      pour certains réels b_ℓ, c_ℓ vérifiant $b_\ell^2 - 4c_\ell < 0$
      iii. les entiers naturels n_k, m_ℓ sont tous > 0.

alors

i. les éléments simples de première espèce de la décomposition de f sont de la forme

$$S_{1,k,n}(x) = \frac{\alpha_{k,n}}{P_k(x)^n}$$

pour des réels $\alpha_{k,n} \neq 0$ et certains exposants $n > 0$, inférieurs à n_k.
Il y a donc au plus $n_1.n_2.\dots.n_K$ tels éléments simples.

ii. les éléments simples de seconde espèce de la décomposition de f sont de la forme

$$S_{2,k,n}(x) = \frac{\beta_{\ell,n}.x + \gamma_{\ell,n}}{Q_\ell(x)^n}$$

pour des couples de réels $(\beta_{\ell,n}, \gamma_{\ell,n}) \neq 0$ et certains exposants $n > 0$, inférieurs à m_ℓ. Il y a donc au plus $m_1.m_2.\dots.m_\ell$ tels éléments simples.

3. Dans notre exemple introductif, $N(x) = x$ et $D(x) = \underbrace{(x+1)}_{P_1(x)^{n_1}}\underbrace{(x^2+1)}_{Q_1(x)^{m_1}}$ et donc la décomposition de f relève du point précédent. Nous savons donc que *a priori*, il existe des réels α_1, β_1 et γ_1 tels que
$$f(x) = \frac{\alpha_1}{P_1(x)} + \frac{\beta_1.x + \gamma_1}{Q_1(x)}$$
Il ne reste plus qu'à faire un travail d'identification[9] de ces coefficients pour nous permettre de retrouver la décomposition de l'introduction.

4. **Exercice résolu.** Donner la forme de la décomposition en éléments simples de
$$f(x) = \frac{x^2+3}{x(x+1)^3(1+x^2)^2}$$
On a $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ avec $N(x) = x^2 + 3$ et $D(x) = x(x+1)^3(1+x^2)^2$ Cette décomposition relève du cas décrit précédemment et l'on peut dire qu'il existe des réels α_1, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{2,3}$, $\beta_{1,1}$, $\gamma_{1,1}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ tels que
$$f(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_{2,1}}{x+1} + \frac{\alpha_{2,2}}{(x+1)^2} + \frac{\alpha_{2,3}}{(x+1)^3} + \frac{\beta_{1,1}.x + \gamma_{1,1}}{1+x^2} + \frac{\beta_{1,2}.x + \gamma_{1,2}}{(1+x^2)^2}$$
Il s'agirait maintenant d'identifier ces 8 coefficients. Si nous mettions au même dénominateur le membre de droite et identifiions le numérateur (qui sera de degré ≤ 7) ainsi obtenu avec le numérateur du membre de gauche, nous aurions alors à résoudre un système de 8 équations linéaires à 8 inconnues[10]
On trouve
$$f(x) = \frac{3}{x} + \frac{-\frac{15}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{5}{2}}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{\frac{3}{4}.x - \frac{5}{4}}{1+x^2} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{(1+x^2)^2}$$

5. Toute fraction rationnelle peut, au moins théoriquement, se mettre sous la forme traitée précédemment : il suffit pour cela de factoriser le dénominateur en utilisant la connaissance des racines réelles et complexes conjuguées de ce polynôme. Par exemple, nous avons
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^4} &= \frac{1}{(x-e^{i\frac{\pi}{4}})(x-e^{i\frac{3\pi}{4}})(x-e^{i\frac{5\pi}{4}})(x-e^{i\frac{7\pi}{4}})} \\
&= \frac{1}{(x-e^{i\frac{\pi}{4}})(x-e^{i\frac{3\pi}{4}})(x-e^{-i\frac{3\pi}{4}})(x-e^{-i\frac{\pi}{4}})} \\
&= \frac{1}{(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)}
\end{aligned}$$

[9] Dans ce cas précis, en réduisant le membre de droite au même dénominateur et en identifiant les coefficients du numérateur, on obtient que $\alpha_1 + \gamma_1 = 0$, $\beta_1 + \gamma_1 = 1$ et $\alpha_1 + \beta_1 = 0$

[10] L'auteur conçoit peu de demander un tel effort à de pauvres étudiants et il est conscient qu'un tel problème devrait se résoudre en moins de 10mn avec une machine...

La décomposition en éléments simples de cette fraction est donc de la forme

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\beta_+.x+\gamma_+}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{\beta_-.x+\gamma_-}{1-\sqrt{2}x+x^2}$$

Il y a donc quatre coefficients à trouver. Nous pouvons réduire le nombre de ces coefficients par la remarque que la fonction à gauche est paire et l'on a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^4} &= \frac{1}{1+(-x)^4}\\ &= \frac{-\beta_+.x+\gamma_+}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \frac{-\beta_-.x+\gamma_-}{1+\sqrt{2}x+x^2}\end{aligned}$$

et l'on donc une « autre » décomposition de $\frac{1}{1+x^4}$ en éléments simples. Comme nous savons que cette décomposition est unique, on en déduit que

$$\beta_- = -\beta+ \text{ et } \gamma_- = \gamma_+$$

Nous n'avons donc plus que deux inconnues

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^4} &= \frac{\beta_+.x+\gamma_+}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{-\beta_+.x+\gamma_+}{1-\sqrt{2}x+x^2}\\ &= \frac{(\beta_+.x+\gamma_+)(1-\sqrt{2}x+x^2)+(-\beta_+.x+\gamma_+)(1+\sqrt{2}x+x^2)}{1+x^4}\\ &= \frac{\beta_+.x.(-2\sqrt{2}x)+2\gamma_+(1+x^2)}{1+x^4}\\ &= \frac{2(-\sqrt{2}\beta_+ + \gamma_+)x^2+2\gamma_+}{1+x^4}\end{aligned}$$

et donc $\gamma_+ = \frac{1}{2} = \gamma_-$, $\beta_+ = \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\beta_-$ et finalement

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{-x+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2}$$

Intégration des éléments simples

Monômes et éléments de première espèce Ces éléments ne posent guère de problèmes : nous savons comment

1. calculer une primitive d'un monôme $f(x) = \lambda.x^n$ par la formule $F(x) = \frac{\lambda}{n+1}x^{n+1}$
2. calculer une primitive d'un élément de première espèce $S_1(x) = \frac{\alpha}{(x+a)^n}$ par l'une des formules

$$\alpha \ln|x+a| \text{ si } n=1 \text{ ou } \frac{\alpha}{1-n}\frac{1}{(x+a)^{n-1}} \text{ si } n>1$$

et donc nous savons, dans tous les cas, calculer une primitive d'un élément simple ou d'un monôme.

Éléments de deuxième espèce On peut aussi donner des formules pour les primitives des éléments de deuxième espèce mais il y a plus de calculs que dans le cas précédent.

1. Il s'agit d'abord de se rendre compte[11] que pour calculer une primitive d'un élément simple du type

$$\frac{\beta.x+\gamma}{(x^2+b.x+c)^n}$$

[11] Voici la justification de cette assertion, il faut en tirer les conclusions que l'on se sert de la mise sous forme canonique d'un trinôme de discriminant négatif et de la formule du changement de variables. Une primitive de

avec $\Delta = b^2 - 4c < 0$, il suffit de savoir calculer des primitives de

$$S_{2,0,n} = \frac{1}{(1+x^2)^n} \text{ et } S_{2,1,n} = \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

2. Une primitive de $S_{2,1,n} = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ est donnée par l'une des formules

$$\frac{1}{2}\ln|x^2+1| \text{ si } n = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \text{ si } n > 1$$

3. Il s'agit maintenant de montrer que l'on peut toujours donner une formule élémentaire pour une primitive de $S_{2,0,n} = \frac{1}{(1+x^2)^n}$. Notons

$$\Sigma_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$$

la primitive de $S_{2,0,n}$ s'annulant en 0.

   (a) Le cas $n = 1$ est bien connu, on a $\Sigma_1(x) = \arctan(x)$.

   (b) Les cas $n > 1$ se calculent par récurrence sur n. On a

$$\begin{aligned}
\Sigma_n(x) &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt \\
&= \int_0^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^n}\, dt - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\, dt \text{ (Astuce !)} \\
&= \Sigma_{n-1}(x) - \int_0^x t\frac{t}{(1+t^2)^n}\, dt \\
&\overset{\text{ipp}}{=} \Sigma_{n-1}(x) + [t\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}]_0^x - \frac{1}{2(n-1)}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}\, dt \\
&= \frac{2n-3}{2n-2}\Sigma_{n-1}(x) + \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}
\end{aligned}$$

4. Nous venons donc de montrer, quitte à faire des calculs d'une certaine complexité, que l'on peut toujours donner une formule pour une primitive d'un élément simple de seconde espèce. Faire un de ces calculs à la main peut s'avérer hasardeux mais il est clair que les mécanismes présentés peuvent s'implémenter en machine.

$\frac{\beta.x+\gamma}{(x^2+b.x+c)^n}$ (car cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant jamais) est

$$\int_0^x \frac{\beta.u+\gamma}{(u^2+b.u+c)^n}\, du$$

On a, par la méthode bien connue de mise sous forme canonique d'un trinôme, que

$$u^2 + b.u + c = (u+\frac{b}{2})^2 + \frac{-\Delta}{4} = \frac{-\Delta}{4}\left(\left(\frac{2u+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1\right)$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\beta.u+\gamma}{(u^2+b.u+c)^n}\, du &= \frac{1}{\left(\frac{-\Delta}{4}\right)^n}\int_0^x \frac{\beta.u+\gamma}{\left(\left(\frac{2u+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right)^n}\, du \\
&= \frac{1}{\left(\frac{-\Delta}{4}\right)^n}\int_0^x \frac{\beta.\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\left(\frac{2u+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + \gamma - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}b}{\left(\left(\frac{2u+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right)^n}\, du \\
&\overset{t=\frac{2u+b}{\sqrt{-\Delta}}}{=} \int_{\frac{b}{\sqrt{-\Delta}}}^{\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}} \frac{\beta'.t+\gamma'}{(1+t^2)^n}\, dt
\end{aligned}$$

pour certaines constantes β' et γ' dont l'expression fait intervenir β, γ, b et $\sqrt{-\Delta}$. La continuation du calcul dépend alors de la connaissance de primitives de $\frac{1}{(1+t^2)^n}$ et $\frac{t}{(1+t^2)^n}$

5. **Exercice résolu.** Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt &= \int_0^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}\,dt - \int_0^x t\frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt \\
&= \arctan x - \left[[-t.\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}]_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}
\end{aligned}$$

6. **Exercice résolu.** Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de

$$\frac{1}{1+x^4}$$

et déterminer

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$$

Grâce à la décomposition en éléments simple que nous avons donnée de $\frac{1}{1+x^4}$, on voit qu'il suffit de calculer une primitive $S(x)$ de

$$\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

La dérivée du dénominateur est $2.x+\sqrt{2}$, en écrivant

$$\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Calculons

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,dt &= \int_0^x \frac{1}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\,dt \\
&= 2\int_0^x \frac{1}{(\sqrt{2}t+1)^2+1}\,dt \\
&\overset{u=\sqrt{2}t+1}{=} \sqrt{2}2\int_1^{\sqrt{2}x+1} \frac{1}{u^2+1}\,du \\
&= \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x+1) - \sqrt{2}\arctan(1)
\end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ est donc

$$S(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ est donc

$$\tilde{S}(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) - \frac{1}{2}\arctan(-\sqrt{2}x+1)$$

Finalement, une primitive de $\dfrac{1}{1+x^4}$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(S(x)+\tilde{S}(x))$ c'est-à-dire

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)-\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x+1)-\arctan(-\sqrt{2}x+1)\Big)$$

On a donc

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\arctan(\sqrt{2}x+1)-\arctan(-\sqrt{2}x+1)\right)$$

Lorsque $x\to\infty$, le ln de l'expression précédente tend vers 0, la première arctan tend vers $\frac{\pi}{2}$ et la seconde vers $-\frac{\pi}{2}$. On en déduit que

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

10.2.2 Polynômes et fractions rationnelles en $\cos$ et $\sin$

Polynômes en $\cos$ et $\sin$

Un polynôme en cos et sin (ou polynôme trigonométrique) est une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{k,\ell\geq 0} a_{k,\ell}\cos^k x\sin^\ell x$$

Notre but est de décrire plusieurs techniques permettant de calculer une intégrale (et donc une primitive d'une telle fonction). On voit rapidement, par linéarité, qu'il suffit de savoir calculer l'intégrale d'une fonction du type $\cos^k x\sin^\ell x$. Plusieurs techniques s'offrent à nous, que l'on peut évidemment combiner

1. La linéarisation d'une expression trigonométrique
2. des changements de variables
3. des intégrations par parties astucieuses.

Linéarisation Le principe de la linéarisation d'un polynôme trigonométrique est basé sur le fait suivant : étant donnée une expression du type $\cos^k x\sin^\ell x$ avec $k,\ell\geq 0$, on peut la transformer en une combinaison linéaire de fonctions du type $\cos\lambda x$ et $\sin\mu x$ avec $0\leq\lambda,\mu\leq k+\ell$[12] Il est alors facile de déterminer une primitive d'une telle fonction[13].

Les outils de base pour effectuer cette transformation sont les formules d'Euler et le binôme de Newton et nécessitent donc de passer en complexes.

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\end{aligned}$$

[12]Ce procédé est une illustration élémentaire du fait bien connu en physique qu'une fonction 2π- périodique s'exprime comme combinaison linéaire de telles fonctions.

[13]Si $\mu>0$, $\lambda>0$, une primitive de $\cos\mu x$ est $\frac{1}{\mu}\sin\mu x$ et une primitive de $\sin\lambda x$ est $-\frac{1}{\lambda}\cos\lambda x$

Utilisons ce principe pour retrouver les formules de l'angle double du cos. On a

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \left(\frac{1}{2}((e^{ix}+e^{-ix}))\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}+2e^{ix}e^{-ix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Une primitive de $\cos^2$ est donc $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$.
De même,

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \left(\frac{1}{2i}((e^{ix}-e^{-ix}))\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}-2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Une primitive de $\sin^2$ est donc $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$.

Exercice résolu. Linéariser $\cos^3 x\sin^2$ et en donner une primitive.
On a

$$\begin{aligned}
\cos^3 x\sin^2 x &= -\frac{1}{32}(e^{ix}+e^{-ix})^3.(e^{ix}-e^{-ix})^2 \\
&= -\frac{1}{32}(e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x})(e^{i2x}+e^{-i2x}-2) \\
&= -\frac{1}{32}\left(e^{i5x}+3e^{i3x}\right)+3e^{ix}+e^{-ix} \\
&\quad e^{ix}+3e^{-ix}+3e^{-i3x}+e^{-i5x} \\
&\quad -2e^{i3x}-6e^{ix}-6e^{-ix}-2e^{-i3x}\Big) \\
&= -\frac{1}{16}\left(\cos 5x+3\cos 3x+3\cos x+\cos x\right. \\
&\quad \left.-2\cos 3x-6\cos x\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(\cos 5x+\cos 3x-2\cos x\right)
\end{aligned}$$

Une primitive en est donc

$$-\frac{1}{80}\sin 5x-\frac{1}{48}\sin 3x+\frac{1}{8}\sin x$$

Changement de variables Dans certain cas, notamment lorsque k et ℓ sont de différentes parités, il peut être astucieux de remarquer que $\sin^2=1-\cos^2$ et de faire un changement de variable $u=\cos x$ ou $u=\sin x$.

Par exemple, supposons que le problème est de calculer

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin^2 x\ dx$$

On a $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x$ et donc

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\sin^2 x \cos x \; dx \\
&\underset{u = \sin x,\, du = \cos x.dx}{=} \int_0^1 (1 - u^2)u^2 \; du \\
&= \int_0^1 u^2 - u^4 \; du \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Notons que la primitive calculée précédemment nous donne pour I

$$I = \frac{1}{8} + \frac{1}{48} - \frac{1}{80} = \frac{32}{240} = \frac{2}{15}$$

Fractions rationnelles en $\cos$ et $\sin$

L'objet de cette partie est de décrire une technique pour calculer intégrales et primitives de fonctions du type $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ où $N(x)$ et $D(x)$ sont deux polynômes trigonométriques du type de la partie précédente. Les calculs se déroulent bien évidemment sur un intervalle ou la fonction $D(x)$ ne s'annule pas.

On peut toujours se ramener pour ces fonctions au calcul d'une intégrale d'une fraction rationnelle en effectuant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.

En effet, on a alors les formules

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\
\sin x &= \frac{2t}{1 + t^2} \\
dx &= \frac{2}{1 + t^2} \; dt
\end{aligned}$$

On ne peut évidemment effectuer ce changement de variable que sur un intervalle fermé où $\tan \frac{x}{2}$ est bien définie et, si l'intervalle donné ne possède pas cette caractéristique, il faudra alors couper en morceaux.

D'autres changements de variables du type $t = \sin x$, $t = \cos x$ ou $t = \tan x$ peuvent être plus intéressants que celui-ci, malheureusement ceux-ci ne fonctionne pas à tous les coups[14].

Exemples et Remarques

1. **Exercice résolu.** Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$.
   Cette intégrale est bien définie car $\cos x$ ne s'annule lorsque x décrit $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction $tan \frac{x}{2}$ est bien définie sur cet intervalle et l'on a donc, par le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \\
&= 2\int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{1}{1 + t^2}(1 + t^2).\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= 2\int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{1}{1 - t^2} \; dt
\end{aligned}$$

[14] On dispose d'un critère pour avoir qu'un tel changement de variable va fonctionner ou pas : il s'agit des **règles de Bioche** et le lecteur intéressé pourra se reporter à l'un des ouvrages où celles-ci sont décrites

Il s'agit maintenant d'évaluer cette intégrale de fraction rationnelle. On a

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}$$

$$2\int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \left[\ln\frac{1+t}{1-t}\right]_0^{\tan\frac{\pi}{8}}$$

et donc

$$I = \frac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}}$$

Si l'on suit une autre méthode, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\ dx}{\cos^2 x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\ dx}{1-\sin^2 x} \end{aligned}$$

On peut donc poser naturellement $u = \sin x$ pour obtenir que

$$I = \int_0^{\sin\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{1-\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

Les deux réponses sont écrites différemment mais désignent bien évidemment le même nombre. En effet, si $\alpha = \tan\frac{\pi}{8}$, on a

$$\begin{aligned} 1+\sin\frac{\pi}{4} &= 1+\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha^2} \\ 1-\sin\frac{\pi}{4} &= 1-\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha^2} \\ \ln\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{1-\sin\frac{\pi}{4}} &= \ln\frac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} = 2\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Notons que l'un ou l'autre de ces changements de variables permettent de calculer une primitive de $\frac{1}{\cos x}$ sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. En effet, on a, pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{1}{\cos u}\,du \\ &\overset{t=\sin u}{=} \int_0^{\sin x} \frac{1}{1-t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1+t}{1-t}\right]_{t=0}^{t=\sin x} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \\ &= \ln\frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} \\ &= \ln\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Pour les dernières égalités, qui sont les formules classiques que l'on peut trouver dans certaines tables de primitives, on a utilisé le fait que $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$ et donc, par les formules de l'angle double

$$\begin{aligned} 1 + \sin x &= 1 - \cos(x + \frac{\pi}{2}) = 2\sin^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \\ 1 - \sin x &= 1 + \cos(x + \frac{\pi}{2}) = 2\cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

et de plus, le fait que

$$\frac{\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})} > 0$$

car lorsque x décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ décrit $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Pour illustrer le fait que le changement de variable doit être bien défini sur tout l'intervalle d'intégration, nous allons observer ce que donne l'évaluation, par cette méthode de changement de variable de

$$I = \int_{2\frac{\pi}{3}}^{4\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

Cette intégrale est bien définie car $1 + \sin x$ est continue est ne s'annule pas sur l'intervalle $\left[2\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}\right]$.

On a, en menant le calcul comme d'habitude et sans précautions, c'est-à-dire en posant $t = \tan\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, que

$$I = 2\int_{t=\tan\frac{\pi}{3}}^{t=\tan 2\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{(1+t)^2}$$

Le principal problème de ce résultat est que l'intégrale de droite n'est tout simplement pas définie : $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ et $\tan 2\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, l'intervalle d'intégration contient donc le point $t_0 = -1$ en lequel la fonction $\frac{1}{(1+t)^2}$ n'est pas définie.

Le problème vient de ce que, lorsque, x décrit l'intervalle $\left[2\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}\right]$, x « passe » par la valeur π pour laquelle $\tan\frac{x}{2}$ n'est pas définie.

Pour répondre correctement à la question, nous cherchons par cette méthode de calcul, une primitive de $\frac{1}{1+\sin x}$ sur l'intervalle en question. Cherchons tout d'abord une primitive de cette fonction sur l'intervalle $\left[2\frac{\pi}{3}, \pi\right[$. Soit donc x dans cet intervalle et calculons

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{2\frac{\pi}{3}}^{x} \frac{1}{1+\sin u}\,du \\ &= 2\int_{\tan\frac{\pi}{3}}^{\tan\frac{x}{2}} \frac{dt}{(1+t)^2} \\ &= -2\left[\frac{1}{1+t}\right]_{t=\tan\frac{\pi}{3}}^{t=\tan\frac{x}{2}} \\ &= -2\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}} + C \end{aligned}$$

Comme on pouvait s'y attendre, cette formule n'a pas grand sens pour $x = \pi$. Simplifions donc l'expression de $F(x)$ (on oublie la constante C, on cherche une primitive !). On a

$$F(x) = -2\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}} = -2\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})}$$

Ce qui est étonnant avec l'une ou l'autre de ces formules, c'est que non seulement elle donne une primitive de $\frac{1}{1+\sin x}$ sur l'intervalle $\left[2\frac{\pi}{3}, \pi\right[$ mais aussi qu'elle définit une fonction (que l'on appelle encore F) dont le domaine de définition contient $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right[$, i.e l'un des intervalles les plus larges possibles sur lequel $\frac{1}{1+\sin x}$ est définie, continue. Il s'avère, en le vérifiant par dérivation simple, que $F(x)$ est primitive de $\frac{1}{1+\sin x}$ sur cet intervalle.
Notre intégrale I vaut donc

$$I = \left[-\sqrt{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\right]_{2\frac{\pi}{3}}^{4\frac{\pi}{3}} = -2\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) = 2\sqrt{3}$$

On pourrait être tenté de conclure que l'erreur que nous avons faite lors du premier calcul de I est transparente : le changement de variable n'est pas autorisé et l'on aboutit à une intégrale qui n'est pas définie. Les choses sont en fait un peu plus subtiles que le montre le traitement similaire de

$$J = \int_{2\frac{\pi}{3}}^{4\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\, dx$$

En remarquant que $\cos^2 x = 1 - \sin^2$, on a que

$$J = \int_{2\frac{\pi}{3}}^{4\frac{\pi}{3}} 1 - \sin x\, dx = \frac{2\pi}{3}$$

Si on mène le calcul en posant $t = \tan\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et donc

$$\frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{(1-t)^2}{(1+t^2)}$$

$$J \quad = \quad 2\int_{t=\tan\frac{\pi}{3}}^{t=\tan 2\frac{\pi}{3}} \frac{(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\, dt$$

Le principal problème de ce résultat est que l'intégrale de droite, qui est tout à fait bien définie, est strictement négative (la fonction à intégrer est continue, positive, non nulle et $\tan 2\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} < \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$)[15] alors que J doit être clairement positif.
Là encore, le problème vient de ce que, lorsque, x décrit l'intervalle $\left[2\frac{\pi}{3}, 4\frac{\pi}{3}\right]$, x « passe » par la valeur π pour laquelle $\tan\frac{x}{2}$ n'est pas définie.

[15]Le membre de droite vaut

$$2\int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} - \frac{2t}{(1+t^2)^2}\, dt = 2[\arctan t]_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} + 2[\frac{1}{1+t^2}]_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} = -\frac{4\pi}{3}$$