

BASES DU RAISONNEMENT

P. Pansu 2007, S. Lelièvre 2008

Rappel du programme officiel

Logique, différents types de raisonnement.
Ensembles, éléments.
Fonctions et applications.
Produit, puissances.
Union, intersection, somme disjointe.
Cardinalités.
Relations.
Ensembles ordonnés, diagramme de Hasse.

1 Vocabulaire de la logique

1.1 Assertions

Les assertions du monde mathématique sont celles qui peuvent se traduire par une formule où interviennent les ensembles de nombres (entiers, réels, ...), des constantes (0, 1, ...), des variables (x, a, \dots), les opérations (+, \times , ...), les relations ($=, \leq, \dots$), et les symboles $\forall, \exists, \in, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, et qui respectent la syntaxe.

Exemple 1 *Les formules $(1 > 0)$, $(1 = 0)$, $(x > 1)$ sont des assertions.*

Les assertions $(1 > 0)$ et $(1 = 0)$ sont complètes, elles ont une signification indépendante de tout contexte : la première est vraie, la seconde fausse.

L'assertion $(x > 1)$ n'est pas complète, car elle contient une variable libre x , et on ne peut pas répondre à la question « *l'assertion $(x > 1)$ est elle vraie ?* », car la réponse dépend de x .

Définition 2 *Une assertion est complète si toutes les variables sont quantifiées par un quantificateur \forall ou \exists .*

- $(\forall x \in E)$ se lit « *quel que soit x appartenant à E* », ou « *pour tout x dans E* ».
- $(\exists x \in E)$ se lit « *il existe un élément de E tel que* ».

Exemple 3 *$(\forall x \in \mathbf{R})(x > 1)$ est une assertion complète. Elle est évidemment fausse, mais c'est son droit.*

1.2 Traduction

Le jeu mathématique consiste à établir si des assertions complètes sont vraies ou fausses. Il faut savoir convertir en formules mathématiques des énoncés du langage courant et inversement.

Exercice 4 *Ecrire sous forme de formule mathématique l'assertion suivante. « Pour tout rationnel strictement positif, il existe un entier naturel strictement plus grand que lui. »*

Solution de l'exercice 4. *Propriété archimédienne des rationnels.*

$$(\forall x \in \mathbf{Q}) \left((x > 0) \Rightarrow ((\exists n \in \mathbf{N}) (n > x)) \right).$$

Exercice 5 *Traduire en langage courant l'assertion exprimée par la formule*

$$(\forall x \in \mathbf{N}) (\forall x' \in \mathbf{N}) \left(((x \neq 0) \text{ et } (x' \neq 0)) \Rightarrow \right. \\ \left. ((\exists y \in \mathbf{N}) (\exists q \in \mathbf{N}) (\exists q' \in \mathbf{N}) ((y = qx) \text{ et } (y = q'x') \text{ et } (y \neq 0))) \right).$$

Solution de l'exercice 5. *Multiple commun.*

Deux entiers strictement positifs possèdent un multiple commun non nul.

1.3 Dictionnaire

Ci-dessous, une liste de termes mathématiques avec leur description en langage courant.

Négation. C'est dire le contraire. La négation de « j'ai 18 ans » est « je n'ai pas 18 ans ». On note « non \mathcal{P} » la négation de l'assertion \mathcal{P} .

Et. Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des assertions, $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$ est l'assertion qui est vraie lorsque \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont toutes les deux vraies. *J'ai 18 ans et je suis étudiant à l'IFIPS.*

Ou. Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des assertions, $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$ est l'assertion qui est vraie sauf si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont toutes les deux fausses. C'est donc un *ou* au sens large, non exclusif. C'est le *ou* de « mon père ou ma mère viendra me chercher à la gare » et non celui de « je dois choisir entre prendre le RER ou la voiture ».

Implication. Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des assertions, l'assertion $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ exprime l'idée que si \mathcal{P} est vraie, alors \mathcal{Q} doit être vraie aussi, sans qu'il y ait pour autant une relation de cause à effet. Par exemple, *j'ai mon permis de conduire* implique *j'ai plus de 18 ans*, même si ce n'est pas d'obtenir le permis de conduire qui m'a fait vieillir.

Equivalence. Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des assertions, l'assertion $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ exprime l'idée que \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont vraies simultanément. Autrement dit,

$$(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) \text{ signifie } ((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})).$$

Par conséquent, démontrer une équivalence, c'est démontrer deux implications. Sauf dans des situations très simples d'application immédiate de règles, on a en général intérêt à les démontrer séparément.

Réciproque. Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des assertions. La *réciproque* de l'implication $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$, c'est l'assertion $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$. Elles sont vraies toutes les deux si et seulement si $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie.

Exercice 6 *Quelle est la réciproque de l'assertion « tout professeur a été étudiant » ?*

Solution de l'exercice 6. *Réciproque.*

Toute personne ayant été étudiant est professeur.

Contraposée. Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont des assertions. On appelle l'assertion $(\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$ la *contraposée* de $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Proposition 7 *Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} des assertions. L'assertion $((\text{non } \mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{P}))$ est synonyme de $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.*

Preuve. Donnée en exercice plus loin.

Remarque 8 *Les symboles \forall , \exists , \Rightarrow , \Leftrightarrow ne sont pas des abréviations à insérer dans un texte. Ils n'ont leur place que dans des formules mathématiques.*

1.4 Ambiguïtés du langage courant

Ci-dessous, une liste de termes du langage courant et leur traduction (parfois problématique) en formule mathématique.

Si. La phrase « *les étudiants viennent voir le prof s'ils n'ont rien compris* » peut avoir plusieurs sens suivant le contexte. Pour le prof surmené qui manque de temps après un cours, ça peut vouloir dire : « *ne viennent me voir aujourd'hui que les étudiants qui n'ont rien compris* ». Pour un prof qui travaille dans des conditions normales, ça devrait vouloir dire : « *tout étudiant qui ne comprend pas devrait venir me voir* ». La version speedée se traduit par

vient me voir aujourd'hui \Rightarrow n'a rien compris.

La version cool par

n'a rien compris \Rightarrow vient me voir aujourd'hui,

c'est-à-dire, la réciproque. On nage en pleine confusion.

En mathématiques, pour éviter toute confusion, « *si \mathcal{P} , alors \mathcal{Q}* » est synonyme de $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$, tandis que « *\mathcal{P} si et seulement si \mathcal{Q}* » est synonyme de $(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q})$.

Pour. A la question « *pour quelles valeurs de a a-t-on $a^2 < a$?* », je réponds « *pour $0 < a < 1$* ». Est-ce que ça veut dire $(0 < a < 1) \Rightarrow (a^2 < a)$?
ou plutôt $(a^2 < a) \Rightarrow (0 < a < 1)$?
ou $(a^2 < a) \Leftrightarrow (0 < a < 1)$?

Pour être précis, je dois répondre « *on a $a^2 < a$ si et seulement si $0 < a < 1$* ».

Contraire. Traduire par négation ?

« - J'ai dit que le groupe jaune est convoqué à 14 h cet après-midi.

- Non, vous avez dit le contraire, vous avez dit que c'est le groupe rouge. »

Le « contraire » de $(\forall x \in \{\text{étudiants}\})(x \in \{\text{jaune}\}) \Rightarrow (\text{rendez-vous} = 14 \text{ h})$ serait donc $(\forall x \in \{\text{étudiants}\})(x \notin \{\text{jaune}\}) \Rightarrow (\text{rendez-vous} = 14 \text{ h})$? Rien à voir avec une négation.

Eviter d'utiliser le mot *contraire*.

Il faut ou il suffit ?

« - Comment je vais montrer que $((x^2 + x + 1 < y) \Rightarrow (\frac{1}{x^2 + x + 1} > \frac{1}{y}))$?

- Tu sais prendre l'inverse d'une inégalité entre nombres positifs ?

- Ben oui.

- Y faut donc que tu montres d'abord que $x^2 + x + 1$ est toujours positif. »

En réalité, il *suffit* que $x^2 + x + 1 > 0$ pour que l'implication à démontrer soit vraie. En effet,

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R}) \left((x^2 + x + 1 > 0) \Rightarrow ((x^2 + x + 1 < y) \Rightarrow (\frac{1}{x^2 + x + 1} > \frac{1}{y})) \right).$$

Si $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, il *suffit* que \mathcal{P} soit vraie pour que \mathcal{Q} soit vraie, et il *faut* que \mathcal{Q} soit vraie pour que \mathcal{P} soit vraie. On dit parfois que \mathcal{P} est une *condition suffisante* pour \mathcal{Q} , et que \mathcal{Q} est une *condition nécessaire* pour \mathcal{P} .

Par exemple, *avoir au moins 18 ans* est une condition nécessaire pour *avoir le permis de conduire*, mais ce n'est pas suffisant.

Exercice 9 Dans \mathbf{Q} , être positif ou nul est-il

- une condition nécessaire,
- une condition suffisante,
- une condition nécessaire et suffisante

pour être un carré ? Et si on remplace \mathbf{Q} par \mathbf{R} ? par \mathbf{C} ?

Solution de l'exercice 9. Condition nécessaire ou suffisante.

Sur \mathbf{Q} , c'est une condition nécessaire (car un carré est toujours positif ou nul) mais non suffisante (car 2 n'est pas le carré d'un rationnel, bien qu'il soit positif ou nul).

Sur \mathbf{C} c'est une condition suffisante, puisque tout nombre complexe est le carré d'un nombre complexe, mais ce n'est pas nécessaire (que signifie positif pour un nombre complexe?).

Sur \mathbf{R} , c'est une condition nécessaire et suffisante.

1.5 Opérations sur les assertions

On rassemble une série de recettes qui rendent les exercices en partie mécaniques.

1.5.1 Règles relatives à la négation

- non $(x < y)$, c'est $(x \geq y)$.
- Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'une variable libre x . Alors non $((\forall x \in E) \mathcal{P}(x))$, c'est $(\exists x \in E)(\text{non } \mathcal{P}(x))$.
- Pour toute assertion, non $(\text{non } \mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Une assertion \mathcal{P} est vraie si et seulement si non \mathcal{P} est fausse. On peut donc voir la négation comme une « porte logique » qui échange vrai et faux. On peut le représenter par la petite table

\mathcal{P}	V	F
non \mathcal{P}	F	V

Fin du cours n° 1

Exercice 10 *Ecrire la formule \mathcal{P} qui dit que le carré de tout nombre réel est positif ou nul, ainsi que sa négation.*

Solution de l'exercice 10. *Négation à un quantificateur.*

$$\mathcal{P} : (\forall x \in \mathbf{R}) (x^2 \geq 0), \quad \text{non } \mathcal{P} : (\exists x \in \mathbf{R}) (x^2 < 0).$$

Exercice 11 *Ecrire sous forme de formule mathématique l'assertion « tout réel possède un opposé » ainsi que sa négation.*

Solution de l'exercice 11. *Négation à deux quantificateurs.*

$$(\forall x \in \mathbf{R}) (\exists y \in \mathbf{R}) (x + y = 0).$$

Sa négation est

$$(\exists x \in \mathbf{R}) (\forall y \in \mathbf{R}) (x + y \neq 0).$$

1.5.2 Règles relatives à la conjonction (et)

On peut le voir le *et* comme la « porte logique » qui retourne vrai exactement lorsque \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont vraies. Cela donne la table

$(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$	(V,V)	(V,F)	(F,V)	(F,F)
\mathcal{P} et \mathcal{Q}	V	F	F	F

Règles : Si \mathcal{P} , \mathcal{Q} et \mathcal{R} sont des assertions,

- $(\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}) = (\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P})$,
- $((\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q})$ et $\mathcal{R}) = (\mathcal{P}$ et $(\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}))$, ce qu'on peut donc écrire $(\mathcal{P}$ et \mathcal{Q} et $\mathcal{R})$ sans ambiguïté.

1.5.3 Règles relatives à la disjonction (ou)

On peut le voir le *ou* comme la « porte logique » qui retourne vrai exactement lorsque l'une des assertions \mathcal{P} et \mathcal{Q} est vraie, ou lorsque les deux sont vraies. Cela donne la table

$(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$	(V,V)	(V,F)	(F,V)	(F,F)
\mathcal{P} ou \mathcal{Q}	V	V	V	F

Règles : si \mathcal{P} , \mathcal{Q} et \mathcal{R} sont des assertions,

- non (\mathcal{P} et \mathcal{Q}) = (non \mathcal{P}) ou (non \mathcal{Q}),
- non (\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) = (non \mathcal{P}) et (non \mathcal{Q}),
- (\mathcal{P} ou (\mathcal{Q} ou \mathcal{R})) = ((\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) ou \mathcal{R}) ce qu'on peut donc écrire (\mathcal{P} ou \mathcal{Q} ou \mathcal{R}),
- (\mathcal{P} et (\mathcal{Q} ou \mathcal{R})) = ((\mathcal{P} et \mathcal{Q}) ou (\mathcal{P} et \mathcal{R})),
- (\mathcal{P} ou (\mathcal{Q} et \mathcal{R})) = ((\mathcal{P} ou \mathcal{Q}) et (\mathcal{P} ou \mathcal{R})).

Exemple 12 (non($0 < x < 1$)) \Leftrightarrow (($x \leq 0$) ou ($x \geq 1$)).

Exercice 13 Ecrire la table de vérité de l'opération qui à des assertions \mathcal{P} et \mathcal{Q} associe l'assertion ((non \mathcal{P}) ou \mathcal{Q}).

Solution de l'exercice 13. Table de $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \mapsto ((\text{non}\mathcal{P}) \text{ ou } \mathcal{Q})$.

$(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$	(V,V)	(V,F)	(F,V)	(F,F)
(non \mathcal{P}) ou \mathcal{Q}	V	F	V	V

1.5.4 Règles relatives à l'implication

L'implication peut être vue comme la porte logique qui retourne faux exactement quand \mathcal{P} est vraie mais \mathcal{Q} fausse.

Cela correspond à la table

$(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$	(V,V)	(V,F)	(F,V)	(F,F)
$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	V	F	V	V

Proposition 14 Quelles que soient les assertions \mathcal{P} et \mathcal{Q} , l'assertion ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) est équivalente à l'assertion ((non \mathcal{P}) ou \mathcal{Q}). Par conséquent, sa négation est

$$\text{non}(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } (\text{non}\mathcal{Q})).$$

Exercice 15 Ecrire la négation de la formule 4 qui exprime le fait qu'un rationnel strictement positif a toujours un entier naturel au-dessus de lui.

Solution de l'exercice 15. Négation d'une implication.

$$(\exists x \in \mathbf{Q}) ((x > 0) \text{ et } (\forall n \in \mathbf{N})(n \leq x)).$$

Exercice 16 Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} des assertions. Les assertions ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) et ((non \mathcal{Q}) \Rightarrow (non \mathcal{P})) sont équivalentes.

Solution de l'exercice 16. Contraposition.

$$((\text{non } \mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{P})) \Leftrightarrow (\mathcal{Q} \text{ ou } (\text{non } \mathcal{P})) \Leftrightarrow ((\text{non } \mathcal{P}) \text{ ou } \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}).$$

2 Différents types de raisonnement

Un théorème n'est rien d'autre qu'une assertion complète, dont on affirme qu'elle est vraie, en s'appuyant sur une démonstration.

Une démonstration de l'assertion \mathcal{P} , c'est la mise en œuvre d'une succession de définitions, de règles ou de théorèmes connus permettant de déduire que \mathcal{P} est vraie. On décrit différentes façons typiques d'organiser une démonstration.

2.1 Raisonnement direct

Exercice 17 *Pour tout rationnel strictement positif, il existe un entier strictement plus grand que lui.*

On aura besoin de l'écriture d'un rationnel sous forme de fraction *irréductible*.

Rappel 18 *Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers. L'ensemble des nombres rationnels est noté \mathbf{Q} . Tout rationnel $r \in \mathbf{Q}$ s'écrit de manière unique $r = \frac{p}{q}$ avec $q > 0$ et p et q n'ont pas de diviseur commun (autre que ± 1).*

Solution de l'exercice 17. *Toujours plus haut.*

Soit $x \in \mathbf{Q}$ et supposons $x > 0$.

Il existe des entiers p et q avec $q > 0$ tels que $x = \frac{p}{q}$ (propriété de \mathbf{Q}).

Comme q est entier strictement positif, $q \geq 1$ (propriété de \mathbf{N}).

Alors $p = xq \geq x$ (règle).

En particulier, $p > 0$ (règle).

D'où $2p > p$ (règle).

Il vient $2p > x$ (règle).

Comme $2p \geq 0$ (règle),

on remarque que $2p \in \mathbf{N}$ (définition de \mathbf{Z}).

On conclut que le double du numérateur $n = 2p$ convient.

2.2 Disjonction de cas

Exercice 19 *En se ramenant au cas des rationnels positifs, montrer que pour tout rationnel, il existe un entier plus grand que lui.*

Solution de l'exercice 19. *Propriété archimédienne de \mathbf{Q} .*

On distingue deux cas.

Ou bien $x \leq 0$. Dans ce cas, l'entier $n = 1$ convient.

Ou bien $x > 0$. Dans ce cas, on applique l'exemple 17, qui fournit l'entier cherché.

2.3 Raisonnement par contraposée

Pour démontrer une assertion du type $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$, il suffit de démontrer sa contraposée $((\text{non } \mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{P}))$.

Exercice 20 *Montrer que si x et y sont des réels distincts de 1, et si $x \neq y$, alors $\frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.*

Solution de l'exercice 20. *Contraposition.*

La contraposée de l'énoncé est *si x et y sont des réels distincts de 1, et si $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$, alors $x = y$* . Et c'est vrai, car

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1} \quad \Rightarrow \quad x-1 = y-1 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

2.4 Raisonnement par l'absurde

Exercice 21 Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Solution de l'exercice 21. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Par l'absurde. Supposons $\sqrt{2}$ rationnel. Alors il existe des entiers p et q sans diviseurs communs tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On l'écrit $p^2 = 2q^2$. On remarque que si p est impair, p^2 est aussi impair. Donc forcément p est pair, $p = 2p'$. Alors $q^2 = 2p'^2$. Pour la même raison, q est pair, $q = 2q'$. Cela signifie que p et q admettent 2 comme diviseur commun, contradiction. On conclut que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2.5 Utiliser un contre-exemple

Pour démontrer une assertion du type $((\exists x \in E) \mathcal{P}(x))$, il suffit de donner un exemple d'un x qui convient. En passant à la négation, pour démontrer qu'une assertion du type $((\forall x \in E) \mathcal{P}(x))$ est fausse, il suffit de donner un exemple d'un x qui ne convient pas. On appelle cela un *contre-exemple* à la propriété \mathcal{P} .

Exercice 22 L'assertion « tout entier naturel est somme de trois carrés d'entiers » est-elle vraie ? fausse ?

Solution de l'exercice 22. Sommes de trois carrés.

Sachant qu'il n'y a que trois carrés d'entiers qui sont inférieurs ou égaux à 7, à savoir 0, 1 et 4, le nombre 7 n'est pas somme de trois carrés. Cela prouve que l'assertion est fausse.

2.6 Raisonnement par récurrence

Exercice 23 Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion $n! \geq 2^n$. Montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à partir d'un certain rang. Lequel ?

Solution de l'exercice 23. Récurrence.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1)n! \\ &\geq (n+1)2^n \\ &\geq 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1},\end{aligned}$$

pourvu que $n \geq 1$. Autrement dit,

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \quad ((n \geq 1) \Rightarrow (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))).$$

Est-ce que cela suffit à montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$?

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit $1 = 0! \geq 2^0 = 1$, c'est vrai. Malheureusement, on n'a pas su démontrer l'assertion $(\mathcal{P}(0) \Rightarrow \mathcal{P}(1))$. D'ailleurs, elle est fausse. En effet, $\mathcal{P}(1)$ s'écrit $1! \geq 2^1$, i.e. $1 \geq 2$, c'est faux.

Poursuivons : $\mathcal{P}(2)$ s'écrit $2! \geq 2^2$, i.e. $2 \geq 4$, c'est faux ; $\mathcal{P}(3)$ s'écrit $3! \geq 2^3$, i.e. $6 \geq 8$, c'est faux ; $\mathcal{P}(4)$ s'écrit $4! \geq 2^4$, i.e. $24 \geq 16$, c'est vrai. Ouf ! On conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 4$.

3 A retenir/à savoir faire

A retenir

- On s’efforce de n’écrire que des assertions *complètes*.
- Changer la nature ou l’ordre des quantificateurs change le sens de l’assertion.
- En mathématiques, le mot *si* a un sens précis.
- Attention à la traduction mathématique du mot *pour*.
- Les termes *il faut* et *il suffit* ne sont pas interchangeables.
- *Si et seulement si* recouvre deux énoncés, et requiert deux démonstrations, une implication et sa réciproque.

A savoir faire

- Déchiffrer une assertion mathématique présentant des quantificateurs.
- Traduire une phrase du langage courant en assertion mathématique.
- Ecrire la négation, la contraposée et la réciproque d’une assertion, sans les confondre.
- Rédiger un raisonnement par l’absurde, un raisonnement par récurrence.

Fin du cours n° 2

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

P. Pansu 2007, S. Lelièvre 2008

1 Ensembles

1.1 Motivation

Comment répartir les 74 étudiants de S1-IFIPS en 4 groupes de façon compatible avec leurs choix d'options et les emplois du temps des groupes ?

Soit I l'ensemble des étudiants de S1-IFIPS. A chaque option (acoustique musicale, conceptions de l'univers, énergie et environnement, forces fondamentales, matériaux, nanotechnologies, robot, physique du sport, web, ...) correspond un sous-ensemble $A, U, E, F, M, R, S, W...$ de I , celui des étudiants qui font cette option. Le problème est de constituer quatre groupes de TD, c'est-à-dire, quatre sous-ensembles G_1, G_2, G_3 et G_4 , deux à deux disjoints, dont la réunion est I . Comment exprimer les contraintes ?

Seul le groupe 1 a un emploi du temps compatible avec l'option robot. Par conséquent,

$$R \subset G_1.$$

Il y a deux horaires possibles pour l'option web, l'un compatible avec le groupe 1, l'autre avec le groupe 3. Par conséquent,

$$W \subset G_1 \cup G_3.$$

Par commodité, la coordinatrice a introduit une contrainte supplémentaire : les étudiants ayant choisi web et robot iront au groupe 1, ceux qui ont choisi web mais pas robot iront au groupe 3. Cela se traduit par

$$W \cap R \subset G_1, \quad W \setminus R \subset G_3.$$

Les opérations réunion \cup , intersection \cap et différence \setminus , la relation d'inclusion \subset sont appelées opérations et relations *booléennes*. Cet exemple montre qu'il est utile, pour dialoguer avec un programme d'ordinateur qui résoud ce genre de problèmes d'organisation, d'être à l'aise avec les opérations booléennes sur les sous-ensembles d'un ensemble.

1.2 Vocabulaire et notations

On part de la notion naïve : un *ensemble* est une collection E d'objets tous distincts. Ceux-ci sont appelés les *éléments de E* . x élément de E se note $x \in E$. Deux ensembles sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments.

Exemple 1 *On s'autorise à manipuler les ensembles de nombres usuels \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C} sans les avoir définis précisément.*

On décrit un ensemble

- ou bien en donnant la liste de tous ses éléments. Par exemple, l'ensemble des enseignants de maths en S1 IFIPS est

$$E = \{E. Cagnache, S. Lelièvre, A. Panati, N. Raymond\}.$$

- ou bien en caractérisant ses éléments parmi ceux d'un ensemble déjà connu. Par exemple,

$$E = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos x < \sin x\}.$$

Exemple 2 L'ensemble E des solutions de l'équation du second degré $x^2 - 3x + 2 = 0$ est

$$E = \{x \in \mathbf{C} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}.$$

Exemple 3 Il y a un ensemble qui n'a aucun élément, c'est l'ensemble vide, noté \emptyset .

On appelle singleton un ensemble de la forme $E = \{x\}$.

On appelle paire un ensemble de la forme $E = \{x, y\}$ avec $x \neq y$. Remarquer que $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Exercice 4 Décrire l'ensemble E des entiers naturels pairs, l'ensemble F des entiers naturels impairs et strictement inférieurs à 8.

Solution de l'exercice 4. Description d'ensembles.

Cela revient à rédiger mathématiquement une assertion.

$$E = \{n \in \mathbf{N} \mid (\exists m \in \mathbf{N})(n = 2m)\}.$$

$$F = \{n \in \mathbf{N} \mid ((\exists m \in \mathbf{N})(n = 2m + 1) \text{ et } (n < 8))\} = \{1, 3, 5, 7\}.$$

1.3 Sous-ensembles

On dit que F est un sous-ensemble de E , ou bien F est contenu dans E , et on note $F \subset E$, si tout élément de F appartient aussi à E . On dit aussi que F est une partie de E .

Exemple 5 Tout rectangle est en particulier un parallélogramme. Autrement dit, l'ensemble R des rectangles du plan est contenu dans l'ensemble P des parallélogrammes, $R \subset P$.

Remarque 6 Soient E et F deux ensembles. Pour montrer que $E = F$, il suffit de montrer que $F \subset E$ et $E \subset F$.

Exercice 7 Déterminer l'ensemble E des réels qui sont strictement inférieurs à tous les rationnels strictement positifs.

Solution de l'exercice 7. Inclusions réciproques.

Montrons que $E = \mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$. En effet, si $x \in \mathbf{R}_-$, alors $\forall y \in \mathbf{Q}$, $((y > 0) \Rightarrow (y > x))$, donc $x \in E$. Cela montre que $\mathbf{R}_- \subset E$.

Réciproquement, montrons par l'absurde que $((x \in E) \Rightarrow (x \in \mathbf{R}_-))$. Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $x \notin \mathbf{R}_-$. Alors $x > 0$. Il existe un entier n tel que $n > 1/x$. Alors $x > 1/n$. Or $1/n \in \mathbf{Q}$ et $1/n > 0$, ce qui contredit l'hypothèse $x \in E$. On conclut que $E \subset \mathbf{R}_-$.

On a donc montré que $E = \mathbf{R}_-$.

Remarque 8 L'inclusion entre ensembles correspond à l'implication :

en notant $F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\}$ et $G = \{x \in E \mid \mathcal{Q}(x) \text{ est vraie}\}$, on a

$$(F \subset G) \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x))).$$

Exemple 9 On sait que $(\forall x \in \mathbf{R})(x > 1 \Rightarrow (x^2 > x))$. Par conséquent,

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x > 1\} \subset \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 > x\}.$$

1.4 Complémentaire

Si F est un sous-ensemble de E , son *complémentaire dans E* est

$$E \setminus F = \{x \in E \mid x \notin F\}.$$

On le note parfois $C_E F$ ou, lorsque qu'il n'y a pas d'ambiguïté, \overline{F} .

Exemple 10 Dans l'ensemble I des étudiants de S1 IFIPS, le complémentaire du groupe 1 est $\overline{G_1} = I \setminus G_1 = G_2 \cup G_3 \cup G_4$.

Exemple 11 Les éléments du complémentaire $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont appelés nombres irrationnels. $\sqrt{2}$ est l'un d'entre eux.

Remarque 12 Le complémentaire d'un ensemble correspond à la négation : si $F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\}$ alors $E \setminus F = \{x \in E \mid \text{non } \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\}$.

1.5 Intersection, réunion

L'*intersection* de deux sous-ensembles F et G de E , c'est

$$F \cap G = \{x \in E \mid (x \in F) \text{ et } (x \in G)\}$$

La *réunion* de deux sous-ensembles F et G de E , c'est

$$F \cup G = \{x \in E \mid (x \in F) \text{ ou } (x \in G)\}$$

Exemple 13 Dans l'ensemble I des étudiants de S1 IFIPS, les étudiants qui font web et robot, c'est l'intersection $W \cap R$ de l'ensemble W de ceux qui font web et de l'ensemble R de ceux qui font robot.

Les étudiants qui ont cours le vendredi de 16h à 18h, ce sont ceux qui font l'une des options de fin d'après-midi, acoustique musicale, bulles gouttes mousses, conceptions de l'univers, plus ceux qui font énergie et environnement et simultanément une des options du début d'après-midi, forces fondamentales, matériaux, nanotechnologies, physique du sport (l'option web du vendredi n'apparaît pas car elle est forcément couplée avec robot). Autrement dit, l'ensemble T des étudiants qui ont cours le vendredi de 16h à 18h est donné par la formule

$$T = A \cup B \cup U \cup (E \cap (F \cup M \cup N \cup S)).$$

Remarque 14 La réunion est à prendre au sens large, i.e. $F \cap G \subset F \cup G$.

1.6 Règles

Des propriétés des opérations logiques, il résulte un grand nombre de règles dont voici quelques-unes. Soient F , G et H trois sous-ensembles d'un ensemble E .

$$\begin{aligned}(\text{non } (F \subset G)) &\Leftrightarrow (F \cap (E \setminus G) \neq \emptyset). \\(F \subset G) &\Leftrightarrow (E \setminus G \subset E \setminus F). \\E \setminus (F \cup H) &= (E \setminus F) \cap (E \setminus H). \\F \cap (G \cup H) &= (F \cap G) \cup (F \cap H).\end{aligned}$$

1.7 Unions et intersections multiples

Si F_1, \dots, F_i, \dots sont des sous-ensembles d'un ensemble E , leur intersection $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} F_i$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les F_i et leur réunion $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} F_i$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins un F_i ,

$$\bigcap_{i \in \mathbf{N}} F_i = \{x \in E \mid (\forall i \in \mathbf{N}) (x \in F_i)\}, \quad \bigcup_{i \in \mathbf{N}} F_i = \{x \in E \mid (\exists i \in \mathbf{N}) (x \in F_i)\}.$$

Exercice 15 Déterminer l'ensemble des réels strictement positifs x tel que $\sin(1/x) < 0$.

Solution de l'exercice 15. Union infinie.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $t > 0$,

$$(\sin t < 0) \Leftrightarrow ((\exists k \in \mathbf{N})((2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi)).$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$,

$$\begin{aligned}(\sin(1/x) < 0) &\Leftrightarrow ((\exists k \in \mathbf{N})((2k+1)\pi < \frac{1}{x} < (2k+2)\pi)) \\ &\Leftrightarrow ((\exists k \in \mathbf{N})\left(\frac{1}{(2k+2)\pi} < x < \frac{1}{(2k+1)\pi}\right)).\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\{x > 0 \mid \sin(\frac{1}{x}) < 0\} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \left] \frac{1}{(2k+2)\pi}, \frac{1}{(2k+1)\pi} \right[.$$

Ensembles disjoints. On dit que F et G sont *disjoints* si $F \cap G = \emptyset$. Ne pas confondre distincts et disjoints.

On dit que des ensembles F_i sont *deux à deux disjoints* si

$$(\forall i \in \mathbf{N}) (\forall j \in \mathbf{N}) \left((i \neq j) \Rightarrow (F_i \cap F_j = \emptyset) \right).$$

Ne pas confondre avec $\bigcap_i F_i = \emptyset$.

1.8 Différence

La *différence* de deux sous-ensembles F et G de E , c'est l'ensemble des éléments de F qui n'appartiennent pas à G ,

$$F \setminus G = \{x \in E \mid ((x \in F) \text{ et } (x \notin G))\} = F \cap (E \setminus G).$$

Exemple 16 La contrainte sur les groupes de TD en S1 IFIPS peut s'écrire $W \setminus R \subset G_3$.

1.9 Différence symétrique

C'est l'opération booléenne qui correspond au *ou exclusif*. La *différence symétrique* de deux sous-ensembles F et G d'un ensemble E , c'est $F \Delta G = (F \setminus G) \cup (G \setminus F) = (F \cup G) \setminus (F \cap G)$.

Exemple 17 Soit $F \subset \mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers divisibles par 2 et $G \subset \mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers divisibles par 3. Alors $F \Delta G$ est l'ensemble des entiers divisibles par 2 ou 3 mais pas par 6, $F \Delta G = \{\dots, -9, -8, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 8, 9, 14, 15, \dots\}$.

Fin du cours n° 3

2 Produit cartésien

2.1 Motivation

Quels étudiants possèdent le numéro de téléphone de quel autre ? Soit I l'ensemble des étudiants de S1 IFIPS. La façon la plus claire de présenter la réponse attendue est sous la forme d'un tableau à double entrée, dans lequel la case d'entrées $x \in I$ et $y \in I$ est cochée si et seulement si x possède le numéro de téléphone de y . Noter que réciproquement, y n'a pas nécessairement le numéro de

téléphone de x , donc l'ordre entre x et y est important. Cet ensemble de couples (x, y) est un sous-ensemble du produit $I \times I$.

Quels sont les couplages d'options offertes en S1-IFIPS dont les emplois du temps sont incompatibles ? Ce sont celles qui ont lieu dans la même partie de l'après-midi du vendredi, et uniquement à ce moment là. Autrement dit, ce sont les sous-ensembles à deux éléments de chacun des ensembles $D = \{F, M, N, S\}$ et $F = \{A, B, U\}$, autrement dit $\{F, M\}$, $\{F, N\}$, $\{F, S\}$, $\{M, N\}$, $\{M, S\}$, $\{N, S\}$ (l'option E n'apparaît pas car elle est proposée deux fois dans l'après-midi du vendredi, l'option web du vendredi n'apparaît pas car elle est forcément couplée avec robot). On parle de sous-ensembles parce que l'ordre n'a pas d'importance.

Il faut donc distinguer *couples* et *paires*, i.e. parties à deux éléments.

2.2 Définition

Soient E et F des ensembles. Leur *produit cartésien* $E \times F$ est l'ensemble qui possède un élément, appelé *couple* (x, y) pour chaque $x \in E$ et chaque $y \in F$, avec la convention que, pour tous $x, x' \in E$ et tous $y, y' \in F$,

$$((x, y) = (x', y')) \Leftrightarrow ((x = x') \text{ et } (y = y')).$$

Exemple 18 *Un procès-verbal de jury d'examen est un tableau à deux entrées, en ordonnée, les candidats, en abscisse, les épreuves. Chaque note est numérotée (le mot juste est indexée) par un couple (candidat, épreuve), c'est-à-dire, par le produit cartésien de l'ensemble des candidats par celui des épreuves.*

Plus généralement, étant donnés des ensembles E_1, \dots, E_n , on définit leur produit $E_1 \times \dots \times E_n$ comme l'ensemble qui possède un élément, appelé *n-uplet* (x_1, \dots, x_n) pour chaque $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., $x_n \in E_n$, avec la même convention. On note E^n le produit de n copies de E .

Exemple 19 *Un parallélépipède de l'espace dont les côtés sont parallèles aux axes s'identifie au produit cartésien de trois intervalles de \mathbf{R} .*

Soit (x_1, \dots, x_n) un élément du produit $E_1 \times \dots \times E_n$. On appelle x_j sa *j-ème coordonnée*, ou sa *j-ème composante*, ou sa *projection sur le j-ème facteur*.

Soient E_1, \dots, E_n des ensembles finis. Si N_i est le nombre d'éléments de E_i , alors le nombre d'éléments de $E_1 \times \dots \times E_n$ est le produit $N_1 \dots N_n$.

3 Somme disjointe

3.1 Motivation

On prépare pour chaque enseignant (cours, TD, TP, communication, langue, option) une liste des étudiants de S1-IFIPS qui sont dans sa classe. On indique sur chaque liste le nombre de noms. Quand on ajoute ces nombres, on trouve bien plus que le nombre (74) d'étudiants en S1-IFIPS. On trouve 74×15 , car chaque étudiant interagit avec 15 enseignants différents. Effectuer cette addition me permet de vérifier que je n'ai oublié d'étudiant dans aucun enseignement.

La collection de tous les noms apparaissant sur ces listes est une somme disjointe. Un même nom peut apparaître plusieurs fois.

3.2 Définition

Soient E_1, \dots, E_n des ensembles. Leur *somme disjointe* $E_1 \coprod \dots \coprod E_n$ est un ensemble qui contient chaque élément de E_1 , chaque élément de E_2 , etc., éventuellement répété.

Exemple 20 *La liste des contrevenants au code de la route pour l'année 2004 est la somme disjointe des listes journalières. Un individu y apparaît autant de fois qu'il a commis de contraventions.*

Soient E_1, \dots, E_n des ensembles finis. Si N_i est le nombre d'éléments de E_i , alors le nombre d'éléments de la somme disjointe $E_1 \coprod \dots \coprod E_n$ est $N_1 + \dots + N_n$.

4 Applications

4.1 Motivation

La liste des étudiants de S1 IFIPS se présente comme un tableau. A chaque étudiant sont associés

- un nom ;
- un prénom ;
- un jour et un mois de naissance ;
- deux options ;
- un numéro de groupe.

Notons **Mots** l'ensemble des mots (chaînes de caractères), et $O = \{A, B, E, F, M, N, R, S, U, W, \dots\}$ l'ensemble des options disponibles en S1 IFIPS.

L'application nom : $I \rightarrow \mathbf{Mots}$ associe à un étudiant son nom.

L'application anniv : $I \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ associe à un étudiant son jour et son mois de naissance.

L'application options $I \rightarrow O \times O$ associe à un étudiant les deux options qu'il a choisies.

L'application numéro de groupe : $I \rightarrow \mathbf{N}$ ne prend que 4 valeurs.

Un étudiant est-il uniquement déterminé par son jour anniversaire ? Autrement dit, si je sais la date d'anniversaire, est-ce que je sais de quel étudiant il s'agit ? Si c'est le cas, on dit que l'application anniv est *injective*.

Tous les couplages d'options ont ils été demandés ? Certainement pas, car il y a des couplages incompatibles du point de vue de l'emploi du temps. On dit que l'application options $I \rightarrow O \times O$ n'est pas *surjective*.

L'ensemble des couplages effectivement demandés par des étudiants du groupe 3 est l'*image* du groupe G_3 par cette application.

L'ensemble des étudiants du groupe 3 qui ont demandé matériaux et robot est l'*image réciproque* de (M, R) par la *restriction* de l'application option au sous-ensemble G_3 .

Les termes mathématiques *injective*, *surjective*, *image*, *image réciproque*, *restriction*... vont être bientôt définis. Les exemples ci-dessus montrent qu'ils font partie de la vie de tous les jours. Ils jouent aussi un rôle en sciences.

En mathématiques, ils expriment l'existence ou l'unicité d'une solution x à une équation de la forme $f(x) = y$.

En physique, les grandeurs sont rarement mesurées de façon directe. Par exemple, la distance d'une étoile s'évalue au moyen de son décalage vers le rouge. Encore faut-il être sûr que la loi, i.e. l'application distance \mapsto décalage est injective. Plus complexe, la transformation mathématique qui associe à un corps avec ses constituants et leurs diverses propriétés mécaniques le signal récupéré par l'échographe.

En informatique, on peut voir tout programme comme une application. Un programme comporte des arguments (données à fournir en entrée) et retourne un résultat, c'est donc une application de l'ensemble des entrées acceptées vers l'ensemble des résultats valides. L'injectivité signifie qu'on peut en principe reconstituer les données à partir du résultat.

4.2 Définitions

Une *application*, c'est deux ensembles E (l'ensemble de départ ou de définition) et F (l'ensemble d'arrivée) et un procédé f pour associer à chaque élément x de E un élément de F noté $f(x)$. Lorsque l'espace d'arrivée $F = \mathbf{R}$, on parle souvent de *fonction*.

Exemple 21 – La fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \sin x$. Sous-entendu $F = \mathbf{R}$.

- La fonction f définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$. Sous-entendu $F = \mathbf{R}$.
- L'application identique $id_E : E \rightarrow E$, définie par $id_E(x) = x$.
- La fonction caractéristique ou fonction indicatrice $c_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ d'un sous-ensemble A de E , définie par $c_A(x) = 1$ si $x \in A$, $c_A(x) = 0$ sinon.

- L'application $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ appelée conjugaison, qui, à un nombre complexe $z = x + iy$ associe son conjugué $\bar{z} = x - iy$.
- Une application de \mathbf{N} dans \mathbf{R} (resp. \mathbf{C}) s'appelle une suite de réels (resp. de complexes), et on note volontiers u_n au lieu de $f(n)$. Par exemple, $u_n = \frac{1}{n+1}$.

4.3 Graphe

Le graphe d'une application $f : E \rightarrow F$ est le sous-ensemble $gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ du produit $E \times F$.

Exemple 22 La courbe représentative d'une fonction définie sur une partie de \mathbf{R} est le graphe de cette fonction.

Une courbe représentative coupe chaque droite parallèle à l'axe Oy en au plus un point. Un cercle n'est donc pas la courbe représentative d'une fonction.

Fin du cours n° 4

4.4 Restriction, prolongement

Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre ensembles et $A \subset E$ une partie de E . La restriction de f à A est l'application $f|_A : A \rightarrow F$ définie par $f|_A(x) = f(x)$ pour $x \in A$.

Exemple 23 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Elle n'est pas croissante, mais sa restriction à $[0, +\infty[$ est croissante, sa restriction à $] -\infty, 0]$ est décroissante.

Prolonger $f : E \rightarrow F$ à des ensembles E' contenant E et F' contenant F , c'est trouver une application $g : E' \rightarrow F'$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Exemple 24 Soit $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Sa courbe représentative suggère fortement de la prolonger à \mathbf{R} entier en posant $g(0) = 1$. Pourquoi ?

4.5 Composition d'applications

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow H$ sont des applications, on définit l'application composée $g \circ f : E \rightarrow H$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$, pour $x \in E$.

Exemple 25 Soit $\text{prems} : \text{Mots} \rightarrow \text{Lettres}$ l'application qui à un mot associe sa première lettre. Alors $\text{prems} \circ \text{nom}$ associe à un étudiant la première lettre de son nom,

$$\text{prems} \circ \text{nom}(\text{Wei Wei Zhao}) = Z.$$

Exemple 26 Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $g(y) = \sin y$. Alors $g \circ f(x) = \sin(\sqrt{x})$ est définie sur \mathbf{R}_+ et n'est pas périodique. $f \circ g(y) = \sqrt{\sin y}$ est une fonction périodique, définie seulement sur une réunion d'intervalles. Par conséquent, $g \circ f \neq f \circ g$.

Proposition 27 La composition des applications est associative, i.e. si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

qu'on peut donc noter $h \circ g \circ f$.

Preuve. Les deux applications composées ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée H . Si $x \in E$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$.

4.6 Image d'une partie

Si $f : E \rightarrow F$ est une application et $A \subset E$ un sous-ensemble de E , son *image* (aussi appelée *image directe*) est

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} = \{ y \in F \mid (\exists x \in A) (y = f(x)) \}.$$

Exemple 28 Quels sont les couplages d'options choisis par les étudiants du groupe 3? C'est l'image de $G_3 \subset I$ par l'application options.

Exercice 29 Soit $f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}$ l'application définie par $f(z) = 1/z$. Soient $A = \{ z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \mid |z| \leq 1 \}$ et $B = \{ z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \mid \Re(z) > 0 \}$. Déterminer les images de A et de B par f .

Solution de l'exercice 29. Image dans \mathbf{C} .

Posons $A' = \{ z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \mid |z| \geq 1 \}$. Montrons que $f(A) = A'$. Si $z \neq 0$ et $|z| \leq 1$, alors $|f(z)| = |1/z| = 1/|z| \geq 1$, donc $f(z) \in A'$. Cela prouve que $f(A) \subset A'$. Réciproquement, soit $w \in A'$. Posons $z = 1/w$. Alors $f(z) = w$ et $|z| = 1/|w| \leq 1$, donc $z \in A$. Cela prouve que $A' \subset f(A)$. On conclut que $f(A) = A'$.

Montrons que $f(B) = B$. Si $\Re(z) > 0$, alors

$$\Re(f(z)) = \Re(1/z) = \Re(\bar{z}/z\bar{z}) = \Re(\bar{z})/z\bar{z} = \Re(z)/z\bar{z} > 0,$$

donc $f(z) \in B$. Cela prouve que $f(B) \subset B$. Réciproquement, on applique f aux deux côtés de l'inclusion $f(B) \subset B$. Il vient $f \circ f(B) \subset f(B)$. Or $f \circ f$ est l'application identique, donc $B \subset f(B)$. On conclut que $f(B) = B$.

4.7 Image réciproque d'une partie

Si $f : E \rightarrow F$ est une application et $B \subset F$ un sous-ensemble de A , son *image réciproque* est

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}.$$

Exemple 30 Quels sont les prénoms des étudiants du groupe 3 qui ont mis Astrophysique en premier choix? C'est l'image par l'application prénom de l'image réciproque de $\{A\}$ par la restriction à G_3 de l'application premier choix; en 2006 :

$$\text{prénom} \left(\left((\text{premier choix})_{|G_3} \right)^{-1}(\{A\}) \right) = \{Hakim, Vincent, Thomas\}.$$

Exercice 31 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \sin x$. Soit $B =]-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2[$. Déterminer $f^{-1}(B)$.

Solution de l'exercice 31. Image réciproque dans \mathbf{R} .

On s'appuie sur deux dessins, le cercle unité coupé par la bande $|y| < \sqrt{2}/2$, et la sinusoïde coupée par la bande $|y| < \sqrt{2}/2$, et sur le tableau des variations de f sur l'intervalle $]-\pi/4, 7\pi/4[$.

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit $A = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}}]2k\pi - \pi/4, 2k\pi + \pi/4[\cup]2k\pi + 3\pi/4, 2k\pi + 5\pi/4[$. Montrons que $f^{-1}(B) = A$. Si $x \in A$, alors modulo 2π , $x \in]-\pi/4, \pi/4[\cup]3\pi/4, 5\pi/4[$, donc $f(x) = \sin x \in]-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2[= B$. Cela prouve que $f^{-1}(B)$ contient A . Réciproquement, soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) \in B$. Alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x - 2k\pi \in]-\pi/4, 7\pi/4[$. Alors $f(x - 2k\pi) = f(x) \in B$, ce qui entraîne que $x - 2k\pi \in]-\pi/4, \pi/4[\cup]3\pi/4, 5\pi/4[$. Autrement dit, $x \in A$. Cela montre que $f^{-1}(B) \subset A$. On conclut que $f^{-1}(B) = A$.

4.8 Applications injectives

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *injective* si, pour tous $x, y \in E$,

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Exemple 32 Une fonction $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, où $A \subset \mathbf{R}$, est injective si et seulement si sa courbe représentative coupe toute droite parallèle à l'axe Ox en au plus un point. Un trinôme du second degré n'est donc jamais injectif.

Remarque 33 Si E et F sont des ensembles finis et s'il existe une application injective de E dans F , alors E a moins d'éléments que F .

Exemple 34 Soit I l'ensemble des étudiants du S1 IFIPS en 2006. L'application *anniv*: $I \rightarrow \{1, 2, \dots, 31\} \times \{1, 2, \dots, 12\}$ est-elle injective ?

Le tableau suivant donne les jours et mois de naissance des 54 étudiants du S1 IFIPS présents en cours de Math2 le 11 septembre 2006.

janvier	février	mars	avril	mai	juin	juillet	août	sept.	oct.	nov.	déc.
2,8,9	23	5,10	1,12	7	1,5	3,5	27	17	15	6	10,15
11,11		18	13,15	17	21	9	28	23	17	16	15,17
12,13		23	21,23	23	23	9			25		17,23
15,15		27	23,30	26	25	22			25		24

On trouve 7 dates (11 janvier, 15 janvier, 23 avril, 9 juillet, 25 octobre, 15 décembre, 17 décembre) qui sont la date d'anniversaire de deux étudiant(e)s. Par conséquent, l'application *anniv* n'est pas injective.

Exercice 35 L'application $f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $f(r, \theta) = r e^{i\theta}$ est-elle injective ? Sa restriction à $A =]0, +\infty[\times \mathbf{R}$ l'est-elle ? Sa restriction à $B =]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ l'est-elle ?

Solution de l'exercice 35. *Injectivité.*

Non, car $f(0, 0) = f(0, \pi) = 0$. La restriction à A non plus, car $(1, 0) \in A$, $(1, 2\pi) \in A$ mais $f(1, 0) = f(1, 2\pi) = 1$. En revanche, la restriction de f à B est injective. En effet, si $f(r, \theta) = f(r', \theta') = w$, alors $r = |w| = r'$ et $\theta = \arg(w) = \theta'$ modulo 2π . Si $\theta, \theta' \in [0, 2\pi[$, ce n'est possible que si $\theta = \theta'$. On conclut que $f|_B$ est injective.

4.9 Applications surjectives

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *surjective* si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Exemple 36 Une fonction $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, où $A \subset \mathbf{R}$, est surjective si et seulement si sa courbe représentative coupe toutes les droites parallèles à l'axe Ox en au moins un point. Un trinôme du second degré n'est donc jamais surjectif.

Remarque 37 Si E et F sont des ensembles finis et s'il existe une application surjective de E dans F , alors E a plus d'éléments que F .

Exemple 38 Soit I l'ensemble des étudiants du S1 IFIPS en 2006. L'application *jour de naissance*: $I \rightarrow \{1, 2, \dots, 31\}$ est-elle surjective ?

On constate que les jours suivants : $\{4, 14, 19, 20, 29, 31\}$ n'apparaissent pas dans le tableau de l'exemple 34. L'application *jour de naissance* n'est donc pas surjective.

Exercice 39 L'application $f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $f(r, \theta) = r e^{i\theta}$ est-elle surjective ? Sa restriction à $A =]0, +\infty[\times \mathbf{R}$ l'est-elle ? Quelle est l'image de A par f ? et l'image de B ?

Solution de l'exercice 39. *Surjectivité.*

Si $w \in \mathbf{C}$, alors $w = |w| e^{i \arg(w)} = f(|w|, \theta)$, où θ est une détermination quelconque de l'argument de w . On conclut que f est surjective.

Si $r \neq 0$, $f(r, \theta) \neq 0$. Par conséquent, $f(A)$ est contenue dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Donc $f|_A$ n'est pas surjective.

A fortiori, $f(B) \subset f(A) \subset \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Réciproquement, si $w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$, alors $w = |w| e^{i \arg(w)} = f(|w|, \theta)$ pour la détermination θ de l'argument de w qui se trouve dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Par conséquent, l'image de $f|_B$ contient $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. On conclut que $f(B) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

A fortiori, $\mathbf{C} \setminus \{0\} \subset f(B) \subset f(A)$, donc $f(A) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Fin du cours n° 5

4.10 Applications bijectives

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est *bijective* si, pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

Exemple 40 Une fonction $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, où $A \subset \mathbf{R}$, est bijective si et seulement si sa courbe représentative coupe toutes les droites parallèles à l'axe Ox en exactement un point. Une fonction affine non constante est bijective.

Remarque 41 Si E et F sont des ensembles finis et s'il existe une application bijective de E dans F , alors E a autant d'éléments que F .

Exercice 42 Montrer que l'application $f :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}$ définie par $f(r, \theta) = r e^{i\theta}$ est bijective.

Solution de l'exercice 35. *Bijektivité.*

On a montré en 35 que cette application est injective, puis en 39 que cette application est surjective. Elle est donc bijective.

Définition 43 Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. Sa réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est définie par l'assertion

$$(f(x) = y) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y)).$$

Exemple 44 La réciproque de l'application $f :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}$ définie par $f(r, \theta) = r e^{i\theta}$ est $g : \mathbf{C} \setminus \{0\} \rightarrow]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ définie par $g(w) = (|w|, \theta)$ où θ est la détermination de l'argument de w qui appartient à l'intervalle $[0, 2\pi[$.

5 A retenir/à savoir faire

A retenir

- La signification des symboles \subset , \cap , \cup , passage au complémentaire.
- Ne pas confondre distinct et disjoint, couple et paire.
- La signification des termes image, image réciproque, injective, surjective, bijective.

A savoir faire

- Montrer l'égalité de deux ensembles $E = F$ en prouvant les deux inclusions $E \subset F$ et $F \subset E$.
- Manipuler des formules faisant intervenir les symboles \cap , \cup et le passage au complémentaire.
- Calculer une image, une image réciproque.