Math 203 – Analyse et convergence II
–
Examen partiel, 11 mars 2015

Durée : 2h ; documents et calculettes interdits.
Chaque exercice est à composer sur une feuille distincte.
Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté.
Il est toujours possible d'admettre la réponse à une question précédente pour traiter les suivantes.

Exercice 1 (8 points)**.** Considérer la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies par

$$f_n(x) = n\frac{x(1-nx)(1+nx)}{1+n^4x^4}.$$

1. Trouver la limite simple de cette suite de fonctions.
2. Dire s'il s'agit d'une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. Prouver que, pour $a > 0$, $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$.
4. *(Plus difficile) :* Considérer le cas général où f_n est définie par $f_n(x) = g(nx)$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée, et telle que les limites $\lim_{x\to+\infty} g(x) := \ell^+$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) := \ell^-$ existent et sont finies.
   (a) Prouver que la suite $(f_n)_n$ converge simplement pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Prouver que la convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$ si on n'a pas $\ell^+ = \ell^- = g(0)$.
   (c) Prouver que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est constante.

Solution

1. Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout n, et la limite simple en 0 est donc 0. Si $x \neq 0$, on a une fraction rationnelle, de dégré 3 au numérateur et 4 au dénominateur par rapport à la variable n. Sa limite est donc 0. La limite simple est alors la fonction nulle.
2. Pour avoir convergence uniforme, il faudrait $||f_n - 0||_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Or, $||f_n - 0||_\infty = ||f_n||_\infty = \sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. En écrivant $y = nx$ on a $f_n(x) = g(y)$, où

$$g(y) = \frac{y(1-y)(1+y)}{1+y^4}$$

   et on peut écrire $||f_n||_\infty = \sup\{|g(y)| : y \in \mathbb{R}\}$. Or, cette dernière quantité ne dépend pas de n. our avoir convergence uniforme il faudrati donc qu'elle soit nulle, mais elle l'est si et seulement si g est la fonction nulle, ce qui n'est pas le cas (par exemple, $g(-2) = 6/17$). Attention : si g est positive sur $\mathbb{R}$, alors $\sup\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$, mais ce résultat n'est pas vrai en général. En particulier, il fallait faire attention ici car f_n change de signe en $x = \frac{1}{n}$.
3. Il suffit de prouver que, pour $a > 0$, on $\sup\{|f_n(x)| : x \geq a\} \to 0$. On a $\sup\{|g(y)| : y \geq na\}$ et $\lim_{y\to\infty} g(y) = 0$, donc on a bien : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe M tel que $y \geq M$ implique $g(y) \leq \varepsilon$. Il suffit de prendre $n \geq M/a$ pour obtenir le résultat souhaité. Attention : pour $n \geq 1$ fixé, la fonction f_n n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$. En effet, si c'était le cas, comme f_n est continue, nulle en 0, et tend vers 0 en $+\infty$, alors elle serait identiquement nulle.
4. On se met dans le cas général $f_n(x) = g(nx)$.
   (a) La limite simple existe et est égale à ℓ^+ si $x > 0$, ℓ^- si $x < 0$ et $g(0)$ si $x = 0$, par hypothèse sur g.
   (b) Pour que la convergence soit uniforme sur $\mathbb{R}$ il faudrait la continuité de la limite. Or, la limite simple ci-dessus n'est continue en 0 que si les trois valeurs ℓ^+, ℓ^- et $g(0)$ coïncident.

(c) Si g est constante, et égale à une valeur ℓ on a évidemment $f_n = \ell$ et la limite est uniforme parce que la suite est constante. Si la limite est uniforme, on appelle $\ell = \ell^+ = \ell^- = g(0)$ et on a $||f_n - \ell||_\infty \to 0$. Or, $||f_n - \ell||_\infty = \sup\{|g(nx) - \ell| \,:\, x \in \mathbb{R}\} = \sup\{|g(y) - \ell| \,:\, y \in \mathbb{R}\}$. Cette dernière expression ne dépend pas de n donc il faut qu'elle soit nulle, mais cela ne se produit que si la fonction $g - \ell$ est la fonction nulle, donc g est constante. Attention : une fonction g qui vérifie $\ell^+ = \ell^- = g(0)$ n'est pas nécessairement constante (poser par exemple $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$).

Exercice 2 (6 points)**.** Considérons les séries entières suivantes

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}, \quad \sum_{n\geq 0} nx^n, \quad \sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}, \quad \sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n, \quad \sum_{n\geq 0} n^2x^n.$$

Prouver que ces séries convergent toutes pour $x \in]-1,1[$ et calculer leur somme.

Solution On commence en remarquant que la série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge pour $x \in]-1,1[$ et sa somme est $\frac{1}{1-x}$.

La première série proposée est la série des dérivées de x^n. Elle a donc le même rayon de convergence que la série géométrique ci-dessus et sa somme est la dérivée de $\frac{1}{1-x}$, donc $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Pour la deuxième, il suffit de multiplier tout par x. Le rayon de convergence est le même, et la somme est $\frac{x}{(1-x)^2}$.

La troisème série entière est la somme des dérivées secondes de x^n. Le rayon de convergence est le même, et la somme est la dérivée seconde de $\frac{1}{1-x}$, donc $\frac{2}{(1-x)^3}$.

Pour la quatrième, il suffit de multiplier par x^2 : même rayon de convergence, et la somme est $\frac{2x^2}{(1-x)^3}$.

La cinquième est la somme de la deuxième et de la quatrième, donc elle converge aussi pour $x \in]-1,1[$ et la somme est

$$\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x(1-x)+2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

.

Exercice 3 (11 points)**.** Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (-1)^n \sin(\frac{x}{n})$.

1. Démontrer que la série
$$\sum_{n\geq 1} f_n(x)$$
converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; on appelera $S(x)$ la fonction somme de cette série.
2. Démontrer qu'il ne s'agit pas d'une convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$,
3. Démontrer qu'il ne s'agit pas d'une convergence normale sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$.
4. *(Plus difficile) :* prouver qu'en revanche il y a convergence uniforme sur $[0,a]$, quel que soit $a > 0$.
5. Donner l'expression de la dérivée $f_n'(x)$.
6. Vérifier que la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n'(0)$ converge.
7. Prouver que l'on a $|f_n'(x) - f_n'(0)| \leq \frac{|x|}{n^2}$.
8. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[0,a] \subset \mathbb{R}_+$. S'agit-il d'une convergence normale sur ces mêmes intervalles ?
9. Prouver $S \in C^1(\mathbb{R}_+)$.
10. On considère maintenant les dérivées $f_n^{(k)}$ d'ordre supérieur, et en particulier on regarde la série
$$\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}(x)$$
pour $k \geq 2$. Pour tout $k \geq 2$, prouver la convergence normale de cette série sur $\mathbb{R}_+$.
11. En déduire $S \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Solution

1. Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$, on voit que x/n décroit vers 0. Du coup, à partir d'un certain rang, on a $x_n \in [0, \pi/2]$, qui est un intervalle où le sinus est positif et croissant. À partir du même rang, $\sin(x/n)$ sera positif et décroissant et, grâce au signe $(-1)^n$, on a une série alternée qui satisfait les critère suffisant pour converger. On a donc convergence simple. Attention : le fait que $\sin(x/n)$ soit équivalent à x/n pour $n \to \infty$ ne peut pas être évoqué dans le cadre d'une série alternée. Par exemple, la série alterné $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ où$a_n = b_n + c_n$, $b_n = n^{-1/2}$ et $c_n = (-1)^n n^{-1}$ est telle que $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$, $a_n \approx b_n$, mais la série alternée $\sum_{n\geq 1}(-1)^n b_n$ converge, alors que $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ ne converge pas. Aussi, il ne faut pas oublier de préciser que dans notre cas on a bien une série alternée décroissante, mais seulement à partir d'un certain rang.

2. On sait que, si la convergence était uniforme sur $\mathbb{R}_+$, on aurait $||f_n||_\infty \to 0$. Or, $||f_n||_\infty = \sup\{|\sin(x/n)| : x \in \mathbb{R}_+\} = \sup\{|\sin(y)| : y \in \mathbb{R}_+\} = 1$, ce qui exclut la convergence uniforme. Attention : il est vrai que pour nier une convergence uniforme on peut évaluer les fonctions en des points quelconque, y compris dépendant de n ; cependant, on ne peut pas évaluer les termes d'une série de fonctions en des points qui changent d'un terme à l'autre. Autrement dit : si $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0, alors f_n ne converge pas uniformément vers la fonction nulle ; par contre, le fait que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x_n)$ ne converge pas ne nous dit rien sur la converge uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

3. Puisque $[0, 1] \subset [0, \pi/2]$, on est dans un intervalle où le sinus est croissant et positif. Donc $||f_n||_\infty = \sup\{|\sin(x/n)| : x \in [0, 1]\} = \sin(1/n)$. La convergence normale signifierait $\sum_{n\geq 1} \sin(1/n) < +\infty$, alors que $\sin(1/n)$ se comporte comme $1/n$ et la série diverge. Attention : toute inégalité du type $\sin(x/n) \leq x/n$, suivi du fait que la série majorante ne converge pas, ne répond pas à la question : on ne peut pas déduire la non-convergence d'une série en disant qu'une série *qui la majore* ne converge pas.

4. Prenons un intervalle $[0, a]$ et un entier n_0 tel que $a/n_0 < \pi/2$. À partir du rang n_0 la série est alternée décroissante pour tout $x \in [0, a]$. Or, pour toute série alternée décroissante $\sum_{n\geq n_0}(-1)^n u_n$ on a
$$|(\sum_{n\geq n_0}(-1)^n u_n) - (\sum_{n=n_0}^{N}(-1)^n u_n)| \leq u_N.$$
Ceci signifie que le reste dans la série est inférieur ou égal au terme $N-$ième. Si on définit donc $S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ on a, pour tout $x \in [0, a]$ et tout $N \geq n_0$
$$|S_N(x) - S(x)| \leq \sin(x/N) \leq \frac{a}{N}.$$
Cette quantité tend vers 0 uniformément, ce qui prouve la convergence uniforme.

5. On a évidemment
$$f_n'(x) = (-1)^n \frac{1}{n} \cos(x/n).$$

6. La série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n'(0)$ est donnée par $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et c'est bien connu qu'elle converge.

7. Le théorème des accroissements finis nous fonne $|f_n'(x) - f_n'(0)| = |x||f_n''(c)|$ pour un point $c \in [0, x]$. Or, $f_n''(c) = (-1)^{n+1}\sin(c/n)\frac{1}{n^2}$ et, quel que soit le point c, on a $|f_n''(c)| \leq \frac{1}{n^2}$. Attention : on peut utiliser des DL d'ordre supérieur, mais il faut choisir le reste de Lagrange (pour avoir une vraie égalité, et pas un comportement asymptotique qui pourrait ne pas être uniforme en x ou en n. On obtiendrait $|f_n'(x) - f_n'(0)| \leq \frac{1}{2}|x|^2/n^3$ et il faudrait justifier qu'il s'agit en fait d'une estimation meilleure que celle demandée.

8. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ est la somme de deux séries : $f_n'(x) = f_n'(0) + (f_n'(x) - f_n'(0))$. La somme de deux séries converge uniformément dès que les deux convergent uniformément. Or, la première série converge et ne fait pas apparaître x, donc la convergence est forcément uniforme. Pour la deuxième on a converge normale sur $[0, a]$, puisque $||f_n' - f_n'(0)||_\infty \leq \frac{a}{n^2}$ et la série des

$1/n^2$ converge. Il ne s'agit pas d'une convergence normale, parce que si c'était le cas, il faudrait que la première série, $\sum_{n\geq 1} f'_n(0)$ converge normalement. S'agissant d'une série qui ne dépend pas de x, cela équivaut à la convergence absolue, mais c'est justement l'exemple typique de série qui converge mais ne converge pas absolument !! Attention : écrire $f'_n(x) \leq f'_n(0) + (f'_n(x) - f'_n(0))$ ne sert à rien, parce qu'on n'a pas affaire à des termes positifs. Et si on met les valeurs absolues $|f'_n(x)| \leq |f'_n(0)| + |f'_n(x) - f'_n(0)|$ on ne peut pas conclure non plus parce que la première somme ne converge pas (elle converge seulement grâce au facteur $(-1)^n$).

9. Les fonctions f_n sont C^1, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformément et la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f'_n(x)$ converge aussi uniformément. Donc $S \in C^1$.

10. On utilise $|f_n^{(k)}(x)| \leq 1/n^k$ et le fait que, pour $k > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^k$ converge. Attention à calculer correctement la dérivée. On a $f_n^{(k)}(x) = (-1)^n \frac{1}{n^k} g_k(x/n)$, où g_k est égale soit au sinus, soit au cosinus, soit à leurs opposés (on peut distinguer sur le reste de k dans la division par 4).

11. Les fonctions f_n sont C^m, et toutes les séries des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}(x)$ convergent uniformément pour $k \leq m$. Donc $S \in C^m$. Mais m est arbitraire, donc $S \in C^\infty$.