Optimisation

—

Examen partiel, 27 février 2023

Durée : 2h ; tout document est autorisé.

Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté.

Le barème dépasse largement 20, il n'est pas obligatoire de résoudre tous les exercices.

Exercice 1 (7 points)**.** Résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min \left\{ x + y^2 + \frac{4}{3}z^3 \;:\; z \geq \frac{x^2+y^2}{2} \right\}.$$

Prouver que le minimum existe, en calculer la valeur, et trouver le ou les points qui la réalise(nt).

Solution :

Soit $A := \{(x,y,z) \;:\; z \geq \frac{x^2+y^2}{2}\}$ et $f(x,y,z) := x + y^2 + \frac{4}{3}z^3$. Pour démontrer que le minimum existe, on va montrer que l'on a $\lim_{\|p\|\to\infty, p\in A} f(p) = +\infty$, où $p = (x,y,z)$. On note d'abord que $\|p\| \to \infty$ implique $z \to +\infty$. Ensuite, on écrit $f(p) \geq x + \frac{4}{3}z^3 \geq -\sqrt{z} + \frac{4}{3}z^3$ et cette fonction tend vers $+\infty$ quand $z \to +\infty$. On a donc existence par le théorème de Weierstrass.

On calcule ∇f et on trouve $\nabla f(x,y,z) = (1, 2y, 4z^2)$. Ce gradient ne s'annule jamais, ce qui nous dit que le minimum est forcément sur le bord $z - \frac{x^2+y^2}{2} = 0$.

En posant $g(x,y,z) = z - \frac{x^2+y^2}{2}$ on a $\nabla g(x,y,z) = (-x,-y,1)$. Le système des multiplicateurs de Lagrange nous donne

$$\begin{cases} 1 = -\lambda x, \\ 2y = -\lambda y, \\ 4z^2 = \lambda, \\ z = \frac{x^2+y^2}{2}. \end{cases}$$

On cherche à résoudre ce système et la deuxième équation nous donne soit $y = 0$, soit $\lambda = -2$. Pourtant, cette deuxième possibilité n'est pas compatible avec $\lambda = 4z^2 \geq 0$, donc on a $y = 0$. On a donc $2z = x^2$ et donc $\lambda = 4z^2 = x^4$. En mettant cette information dans la première équation on trouve $x^5 = -1$ donc $x = -1$. Finalement on trouve une seule solution $(x,y,z,\lambda) = (-1, 0, 1/2, 1)$. Le point de minimum est donc $p = (-1, 0, 1/2)$ qui donne $f(p) = -\frac{5}{6}$.

Exercice 2 (6 points)**.** Considérer les fonctions suivantes, définies sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y > 0\}$:

$$f_1(x,y) = x^2 + y, \quad f_2(x,y) = x^2 - y, \quad f_3(x,y) = x^2 y, \quad f_4(x,y) = \frac{x^2}{y}.$$

Lesquelles sont convexes ? lesquelles sont strictement convexes ?

Solution : Sur le domaine donné toutes ces fonctions sont C^2, et on va donc écrire leurs Hessiennes. On a

$$D^2 f_1(x,y) = D^2 f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 f_3(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 f_4(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}.$$

La matrice Hessienne de f_1 et f_2 est semi-définie positive, donc ces deux fonctions sont convexes. Elles ne sont pas strictement convexes parce que chacune de ces deux fonctions est affine sur $x = 0$ comme fonction de y.

La matrice Hessienne de f_3 est de déterminant égal à $-4x^2$ qui est strictement négatif pour $x \neq 0$. Cette matrice n'est donc pas semi-définie positive et f_3 n'est pas convexe.

La matrice Hessienne de f_4 a des termes non-négatifs sur la diagonale et son déterminant vaut 0. Elle est donc semi-définie positive et f_4 est convexe. Elle n'est pas strictement convexe parce que $f_4(t,t) = t$, donc f_4 est affine sur la diagonale.

Exercice 3 (9 points)**.** Étant donné $S \in \mathbb{R}$, considérer le problème d'optimisation suivant

$$\inf \{\arctan x + \arctan y + \arctan z \ : \ x + y + z = S\}.$$

1. En utilisant les conditions d'optimalité (multiplicateurs de Lagrange) prouver que, si (x_0, y_0, z_0) est un point de minimum de ce problème sous contraintes, alors $x_0^2 = y_0^2 = z_0^2$.
2. En utilisant les conditions d'optimalité d'ordre deux, prouver que, si (x_0, y_0, z_0) est un point de minimum de ce problème sous contraintes, alors au plus une cordonnée x_0, y_0 ou z_0 est strictement positive.
3. Avec les mêmes conditions, prouver qu'en fait on aurait $x_0, y_0, z_0 \leq 0$ (les trois cordonnées seraient négatives).
4. Prouver que le minimum ne peut pas être atteint si $S > 0$.
5. Toujours dans le cas $S > 0$, prouver que l'infimum vaut $-\frac{\pi}{2}$.
6. Prouver que l'infimum vaut $-\frac{\pi}{2}$ pour tout $S > -\sqrt{3}$ et que l'infimum vaut $3\arctan(S/3)$ et est atteint en $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{S}{3}, \frac{S}{3}, \frac{S}{3}\right)$ pour tout $S \leq -\sqrt{3}$.

Solution : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \arctan x$. On utilisera $f \in C^2$ avec f' paire et $f'' > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $f'' < 0$ sur $]0, +\infty[$. En particulier, f' n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ (parce que paire) mais elle l'est sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ séparément. Les multiplicateurs de Lagrange nous disent, si (x_0, y_0, z_0) est un point de minimum de ce problème sous contraintes, que l'on a, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f'(x_0) = \lambda, \\ f'(y_0) = \lambda, \\ f'(z_0) = \lambda, \\ x_0 + y_0 + z_0 = S. \end{cases}$$

Cela implique que x_0, y_0 et z_0 diffèrent au plus dans le signe et répond à la première question.

On regarde maintenant la condition d'optimalité d'ordre deux, qui nous dit que la Hessienne de la fonction à minimiser moins λ fois celle de la contrainte est semi-définie positive sur l'espace orthogonal au gradient de la contrainte. Ici, comme la contrainte est une fonction affine, on trouve que la matrice $\operatorname{diag}(f''(x_0), f''(y_0), f''(z_0))$ devrait être semi-définie positive sur $\{(h, k, l) \ : \ h + k + l = 0\}$. Donc $f''(x_0)h^2 + f''(y_0)k^2 f''(z_0)l^2 \geq 0$ pour tout triplet (h, k, l) tel que $h + k + l = 0$. Si deux nombres parmi $f''(x_0)$, $f''(y_0)$ et $f''(z_0)$ étaient négatifs on pourrait annuler une des composantes et n'utiliser que celles-ci, et on trouverait un résultat négatif. Donc au plus une des trois dérivées secondes est négatives, donc au plus une cordonnée x_0, y_0 ou z_0 est strictement positive, ce qui répond à la deuxième question.

Pour prouver qu'en fait les trois seraient négatifs, on suppose par l'absurde $f''(z_0) < 0$ (quitte à changer l'ordre des trois variables). On aurait dans ce cas $-f''(z_0) = f''(x_0) = f''(y_0)$. On remplace l par $-(h+k)$ et on obtient une forme quadratique en (h, k) régie par la matrice

$$\begin{pmatrix} f''(x_0) + f''(z_0) & f''(z_0) \\ f''(z_0) & f''(y_0) + f''(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f''(z_0) \\ f''(z_0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, cette matrice n'est pas semi-définie positive parce que son déterminant vaut $-|f''(z_0)|^2 < 0$. Cela répond à la troisième question.

Si $S > 0$ le minimum ne peut pas être atteint parce qu'il ne peut être atteint qu'en un point qui satisfait les conditions d'ordre un et deux, mais cela implique, comme on vient de le voir, $x_0, y_0, z_0 \leq 0$ et donc $S \leq 0$. Cela répond à la quatrième question.

Pour répondre à la cinquième question, on observe qu'en prenant $x = y = -n$ et $z = S+2n$ pour $n \to +\infty$ on trouve $\inf \leq -\frac{\pi}{2}$. Prenons maintenant une suite minimisante (x_n, y_n, z_n). Si elle restait dans un compact on pourrait extraire une sous-suite convergente et en déduire l'existence du minimum, ce qui est absurde. Elle n'est donc pas bornée, et au moins une coordonnée tend vers $\pm\infty$. Pour préserver la somme égale à S, il faut qu'au moins une autre coordonnée tende vers $\mp\infty$ (dans la direction opposée, pour compenser). Si on suppose $x_n \to +\infty$ et $y_n \to -\infty$ on trouve $\liminf f(x_n) + f(y_n) + f(z_n) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \liminf f(z_n) \geq -\frac{\pi}{2}$. On trouve donc que l'infimum vaut exactement $-\frac{\pi}{2}$.

Si $S > -\sqrt{3}$ on trouve encore que le minimum ne peut pas exister, et le même argument nous donne la valeur de l'inf. En effet, si le minimum était atteint en (x_0, y_0, z_0), on aurait $x_0 = y_0 = z_0 = S/3$ et le minimum vaudrait donc $3\arctan(S/3)$. Pourtant, on sait aussi que l'infimum est au plus $-\frac{\pi}{2}$, ce qui nous donne $\arctan(S/3) \leq -\frac{\pi}{6}$ donc $S/3 \leq -\tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ce qui est une contradiction. Si par contre $S \leq -\sqrt{3}$ le minimum existe. En effet, le même argument ci-dessus nous donne que la liminf en l'infini de cette fonction avec cette contrainte vaut $-\frac{\pi}{2}$ et si $S \leq -\sqrt{3}$ le point $(S/3, S/3, S/3)$ donne une valeur strictement plus petite. Le minimum existe, donc, et on sait qu'il est atteint en ce point. Cela répond à la dernière question.

Exercice 4 (5 points)**.** Soient a, b deux paramètres réels. Prouver que l'on a

$$\min\{xy + ax + by \,:\, |x| \leq 1, |y| \leq 1\} = \min\{a + b + 1, a - b - 1, -a + b - 1, -a - b + 1\}.$$

Solution : Soit $f(x, y) := xy + ax + by$. Il s'agit d'une fonction C^2. On a

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et cette matrice n'est pas semi-définie positive, parce que son déterminant vaut -1. On en déduit que f ne peut pas avoir de point de minimum local à l'intérieur du carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Son minimum est donc atteint sur le bord. Le bord est composé de quatre segments. Sur chacun, une des deux variables est fixées (égale à ± 1) et la fonction est affine par rapport à l'autre. Or, une fonction affine sur un intervalle prend toujours son minimum sur une des bornes (éventuellement, si la fonction est de pente nulle, elle est constante et son minimum est atteint partout, mais en particulier il y a une borne qui minimise). On en déduit qu'on peut se restreindre, dans la recherche du minimum, aux quatre points $(\pm 1, \pm 1)$. La valeur à droite dans l'énoncé est exactement égale au minimum parmi ces quatre points.