Calcul Différentiel et Analyse Complexe
Épreuve de 2e chance, 24 juin 2020

Durée : 2h ; calculettes, notes personnelles et textes sont autorisés (de toute manière on ne pourrait rien vérifier) ; seulement, ne vous faites pas aider par d'autres humains.

Exercice 1 (6 points)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (z(x^2 - y^2), 2xyz, z).$$

1. Prouver que f est C^∞ et écrire sa matrice jacobienne en tout point.
2. Trouver tous les points de l'espace au voisinage desquels f est un difféomorphisme local.
3. La fonction f est-elle injective sur $\mathbb{R}^3$? surjective à valeurs dans $\mathbb{R}^3$?
4. Soit $\Pi_a \subset \mathbb{R}^3$ l'hyperplan défini par $\Pi_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = a\}$. Vérifier que f envoie Π_a sur Π_a pour tout $a \in \mathbb{R}$. En identifiant chaque Π_a à $\mathbb{C}$ (par l'application $(x, y, a) \mapsto x + iy$), dire si la restriction de la fonction f à chaque Π_a est holomorphe. Pour quelles valeurs de a cette restriction est-elle surjective ? et injective ?

Corrigé

1. Chaque composante de f est polynomiale, donc C^∞. La matrice jacobienne vaut
$$\begin{pmatrix} 2zx & -2zy & x^2 - y^2 \\ 2yz & 2xz & 2xy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Pour que f soit un difféomorphisme local au voisinage d'un point il faut et il suffit que le déterminant de la matrice jacobienne en ce point ne soit pas 0. Ce déterminant vaut $4z^2(x^2 + y^2)$. Il s'annule si $z = 0$ ou $x = y = 0$. Au voisinage de tout autre point (le complémentaire de l'axez z et du plan (x, y), donc), la fonction f est un difféomorphisme local.
3. La fonction f n'est pas injective sur $\mathbb{R}^3$ puisqu'on a $f(x, y, z) = f(-x, -y, z)$. Elle n'est pas surjective à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ non plus, parce que le point $(1, 0, 0)$ n'appartient pas à l'image (si la troisième composante de f s'annule, les deux premières s'annulent forcement aussi).
4. La fonction f envoie Π_a sur Π_a parce que la troisième composante de f est l'identité. En identifiant chaque Π_a à $\mathbb{C}$ comme indiqué, la restriction de f s'écrit donc comme $f(u) = au^2$. Il s'agit d'une fonction hoomorphe mais pas injective. Elle est surjective dès que $a \neq 0$.

Exercice 2 (8 points)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction holomorphe définie par

$$f(z) := \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n + 1)!}$$

et Ω l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $\Omega = \{z \in C \,:\, |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}\}$.

1. Prouver que f est la seule extension holomorphe de la fonction réelle $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(x)$.
2. Prouver que f est la seule fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\mathrm{Re}(f(z)) = \sin(\mathrm{Re}(z))\frac{e^{\mathrm{Im}(z)}+e^{-\mathrm{Im}(z)}}{2}$ et $f(0) = 0$
3. Prouver que f est localement un biholomorphisme au voisinage de tout point de $\mathbb{C} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.
4. Prouver que f est injective sur Ω et qu'elle est un biholomorphisme entre Ω et $f(\Omega)$.
5. Prouver que l'on a $f(\Omega) \neq \mathbb{C}$.
6. Trouver l'image $f(\Omega)$.

Corrigé

1. La fonction f coïncide avec le sinus sur les réels et est holomorphe. Deux fonctions holomorphes qui coïncident sur l'axe réel coïncident forcément partout comme conséquence du principe des zéros isolés, elle est donc la seule extension holomorphe de la fonction réelle $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(x)$.
2. La fonction f satisfait bien les deux conditions ($f(0) = 0$, ainsi que celle sur la partie réelle : écrivons $z = x + iy$, on a donc

$$f(x+iy) = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = \frac{(\cos x + i \sin x)e^{-y} - (\cos x - i \sin x)e^{y}}{2i} = i \cos x \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} + \sin x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2},$$

d'où l'on peut obtenir l'expression recherché). deux fonctions holomorphes dont la partie réelle coïncide doivent forcement coïncider à une constante additive près, comme conséquences des conditions de Cauchy-Riemann (parce qu'on peut retrouver $\partial Q/\partial x$ et $\partial Q/\partial y$ en termes de $\partial P/\partial x$ et $\partial P/\partial y$, pour une fonction holomorphe $P + iQ$ avec P, Q réelles). Comme on fixe la valeur en 0, elles doivent coïncider.
3. Pour une fonction holomorphe, être un biholomorphisme au voisinage d'un point z_0 équivaut à ce que la dérivée $f'(z_0)$ ne s'annule pas. Puisqu'on a

$$f'(z) = \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

(même formule que dans $\mathbb{R}$), il faut trouver les points où le cosinus s'annule. Pour avoir $\cos(z) = 0$ il faut imposer $e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i\pi - iz}$, donc $iz = i\pi - iz + i2k\pi$, donc $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$. En dehors de ces points, f est localement un biholomorphisme.
4. En aucun point de Ω la dérivée f' s'annule, donc f est un biholomorphisme local sur Ω. Il faut donc vérifier l'injectivité. Supposons $f(z) = f(z_0)$. On écrit $A = e^{iz}$ et $B = e^{iz_0}$. On a

$$A - \frac{1}{A} = B - \frac{1}{B} \Rightarrow A^2 - A(B - \frac{1}{B}) - 1 = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(B - \frac{1}{B} \pm \sqrt{(B - \frac{1}{B})^2 + 4}\right) = \frac{1}{2}\left(B - \frac{1}{B} \pm (B + \frac{1}{B})\right).$$

Les deux valeurs possibles de A sont B et $-\frac{1}{B}$. On doit donc résoudre $e^{iz} = e^{iz_0}$ ou $e^{iz} = e^{i\pi - iz_0}$, donc $z = z_0 + 2k\pi$ ou $z + z_0 = \pi + 2k\pi$. Dans ce deuxième cas on a $|\mathrm{Re}(z + z_0)| \geq \pi$. Or, la partie réelle des points de Ω appartient à $]-\pi/2, \pi/2[$, la somme de deux parties réelles ne peut donc pas dépasser π en module. Reste le cas $z = z_0 + 2k\pi$. Dans ce cas là on a soit $z = z_0$, soit $|\mathrm{Re}(z - z_0)| \geq 2\pi$, ce qui est impossible pour la même raison. Donc $z = z_0$ et f est injective. Il s'agit donc d'un biholomorphisme entre Ω et $f(\Omega)$.
5. Si on avait $f(\Omega) = \mathbb{C}$ on aurait une fonction f^{-1} holomorphe et non constante de $\mathbb{C}$ vers Ω. Le fonction $\mathrm{Re}(f^{-1})$ serait donc bornée, ce qui entraine que $e^{f^{-1}}$ serait une fonction holomrphe bornée, donc constante, ce qui est absurde.
6. L'image $f(\Omega)$ est constituée de tous les complexes qui ne sont pas des réels de module supérieur ou égale à 1. Pour le voir, on cherche à trouver les valeurs de Z telles qu'on puisse résoudre l'équation

$$A - \frac{1}{A} = 2iZ \Rightarrow A^2 - 2iZA - 1 = 0 \Rightarrow A = iZ \pm \sqrt{1 - Z^2},$$

pour $A = e^{iz}$ et $z \in \Omega$. En écrivant $z = x + iy$ avec $|x| < \pi/2$, la condition sur $A = e^{-y}e^{ix}$ revient à imposer $\mathrm{Re}(A) > 0$. On cherche donc tous les Z tels qu'une des deux solutions $A = iZ \pm \sqrt{1 - Z^2}$ a partie réelle positive.

On remarque qu'on peut se limiter au cas $\mathrm{Im}(Z) \leq 0$ parce que l'image $f(\Omega)$ est sûrement symétrique par rapport à l'axe réel. Or, si $\mathrm{Im}(Z) < 0$ on voit que la somme des deux valeurs possibles de A, qui vaut $2iZ$, a sa partie réelle qui vaut $-2\mathrm{Im}(Z)$ et qui est donc positive. Au moins une des deux valeurs de A satisfait donc la condition cherchée. On en déduit que tous les complexes Z avec $\mathrm{Im}(Z) < 0$ appartiennent à $f(\Omega)$ et, par symétrie, on conlut de même que tous les complexes $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ appartiennent à $f(\Omega)$.

Il reste à considérer le cas $Z \in \mathbb{R}$. Si $|Z| < 1$ on a $\sqrt{1 - Z^2} \in R$ et exactement une des deux valeurs de $A = iZ \pm \sqrt{1 - Z^2}$ a sa partie réelle qui est positive. Si $|Z| \geq 1$ le nombre $\sqrt{1 - Z^2}$ est imaginaire pur, et donc les deux valeurs de A sont sur l'axe complexe et ne sont pas acceptables.

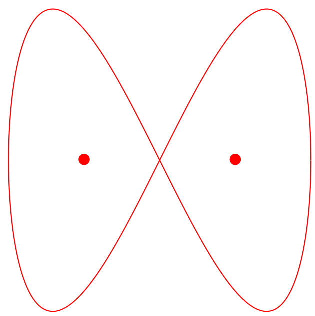
Exercice 3 (6 points)**.** Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le lacet donné par $\gamma(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(2\theta)$. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{1}{4z^2 - 1} dz.$$

Corrigé

On calcule l'intégrale par la formule des résidus. Les pôles de la fonction f donnée par $f(z) = (4z^2 - 1)^{-1}$ se situent en $z = \pm 1/2$ et sont des pôles simples. Comme f est de la forme $f = g/h$ le résidu au point a est donné par $g(a)/h'(a)$. Ici $g = 1$ et $h(z) = 4z^2 - 1$, donc $h'(z) = 8z$ et le résidu en a vaut $\frac{1}{8a}$.

On dessine la courbe γ, qui n'est pas une courbe simple (injective) :



L'indice du point $1/2$ est 1 et celui du point $-1/2$ est -1.

On trouve donc

$$\int_\gamma \frac{1}{4z^2 - 1} dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Ind}(z_k; \gamma)\mathrm{Res}(f; z_k) = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + (-1)(-\frac{1}{4})\right) = \pi i.$$

Exercice 4 (7 points)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. Rappeler pourquoi la condition "$|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$" implique que f est constante.
2. S'il existe deux constantes $a, m > 0$ telles que $|f(z)| \leq a(1 + |z|)^m$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, que peut-on dire sur la fonction f ?
3. Prouver que si l'on a $|f(z)| \geq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors f est constante.
4. Prouver que si l'on a deux constantes $a, m > 0$ telles que $|f(z)| \geq \frac{1}{a(1+|z|)^m}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ alors f est constante.

Corrigé

1. Le théorème de Liouville nous dit que toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.
2. On rappelle la preuve du théorème de Liouville, qui se base sur la formule de Cauchy pour les dérivées :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0,R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

(où $C(z_0, R)$ est le cercle de centre z_0 et rayon R parcouru dans le sens direct) donc

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{C(z_0,R)} |f|.$$

Pour $n = 1$ et f bornée, en prenant $R \to \infty$, cela donne $f' = 0$ et donc f constante. Si f satisfait $|f(z)| \leq a(1 + |z|)^m$ on obtient donc

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!a(1 + R + |z_0|)^m}{R^n}$$

et donc $f^{(n)} = 0$ pour tout $n > m$, en prenant $R \to \infty$. En particulier, on trouve que f est un polynôme, dont le dégré dépend de m (plus préciséement, un polynôme de dégré égal au plus à la partie entière de m).

3. Si on a $|f(z)| \geq 1$, soit $g = 1/f$ (fonction bien définie et holomorphe parce que $f \neq 0$). La fonction g serait bornée ($|g| \leq 1$) et holomorphe, donc constante. La fonction f serait alors constante aussi.
4. Supposons $|f(z)| \geq \frac{1}{a(1+|z|)^m}$. En prenant à nouveau $g = 1/f$ on obtient $|g(z)| \leq a(1+|z|)^m$. On trouve alors que g est un polynôme. Or, le théorème de D'Alembert nous dit que tout polynôme non constant s'annule, mais g ne peut pas s'annuler puisque $fg = 1$. Donc g est constante, et f aussi.