Calcul Différentiel et Analyse Complexe
Épreuve terminale de 2e session, 28 juin 2019

Durée : 2h ; calculettes interdites ; seule une feuille A4 (recto-verso) de notes est autorisée ;
composer chaque exercice sur une feuille distincte. Les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté ;
le barème étant sur 27, il n'est pas obligatoire de tout traiter.

Exercice 1 (5 points)**.** Soit $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Pour une valeur donnée $m \in \mathbb{R}$, considérer la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (\ln(x^2 + y^2), m \arctan(y/x)).$$

1. Prouver que f est bien définie et C^∞.
2. Écrire la matrice jacobienne de f en tout point.
3. En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, pour quelles valeurs de m la fonction f est-elle holomorphe sur Ω ?

1. Par composition de fonctions usuelles, la première composante de f est bien définie et C^∞ à condition que $x^2 + y^2 > 0$ et la deuxième à condition que $x \neq 0$. Ces deux conditions sont bien satisfaites pour $(x, y) \in \Omega$.
2. La matrice jacobienne de f est
$$\begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{-my}{x^2+y^2} & \frac{mx}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$
3. Pour que f soit holomorphe il faut et il suffit $\partial \mathrm{Re} f/\partial x = \partial \mathrm{Im} f/\partial y$ et $\partial \mathrm{Re} f/\partial y = -\partial \mathrm{Im} f/\partial x$, ce qui correspond à $m = 2$. Dans ce cas, nous avons en effet $f(z) = 2 \log z$.

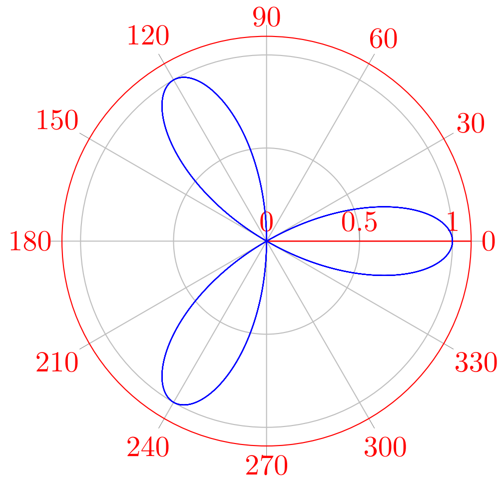
Exercice 2 (8 points)**.** Considérer l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$, où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2 y + y^3.$$

1. Prouver que A est un ensemble compact contenant l'origine $(0, 0)$.
2. Prouver que A est localement paramétrisable par une courbe régulière en dehors de l'origine $(0, 0)$.
3. En utilisant évenutellement la formule $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$ donner une paramétrisation de A en cordonnées polaire, en le représentant comme l'image d'un lacet $[0, \pi] \mapsto \gamma(\theta)$ et faire un dessin schématique de l'ensemble A.
4. En considérant A comme un lacet dans $\mathbb{C}$, calculer l'indice par rapport à A des points $z_k = e^{ik\pi/6}$ pour $k = 0, 1, \dots, 12$.

1. La fonction f étant continue, A est fermé. Si on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ on a, pour $(x, y) \in A$, $r^4 \leq 4r^3$, donc $r \leq 4$. L'ensemble A est donc contenu dans une boule et est donc compact. On a bien $f(0, 0) = 0$, donc $(0, 0) \in A$.
2. Le théorème des fonctions implicites permet de paramétriser A localement comme un graphe (et donc une courbe régulière) au voisinage de tout point $(x, y) \in A$ où $\nabla f(x, y) \neq 0$. Il faut donc exclure les solutions du système
$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 3x^2 y - y^3, \\ 4(x^2 + y^2)x = 6xy, \\ 4(x^2 + y^2)y = 3x^2 - 3y^2. \end{cases}$$
Dans la deuxième équation, considérons d'abord le cas $x = 0$. Si $x = 0$ on trouve, dans la première, $y^4 = -y^3$ et, dans la deuxième, $4y^3 = -3y^2$. Ceci implique $y = 0$. Donc si $x = 0$ le point à exclure est l'origine $(0, 0)$. Si on suppose maintenant $x \neq 0$ on a, dans la deuxième équation $4(x^2 + y^2) = 6y$. En remplaçant dans la troisième on obtient $6y^2 = 3x^2 - 3y^2$, donc $x^2 = 3y^2$. En remplaçant à nouveau dans la première on a $16y^4 = 8y^3$, donc $y = 0$ ou $y = 1/2$. Si $y = 0$ on trouve, dans la première équation, $x^4 = 0$, donc on revient au point $(0, 0)$. Si $y = 1/2$ on trouve $x^2 + y^2 = 4y^2 = 1$ mais la deuxième équation donnait $4(x^2 + y^2) = 6y$, ce qui correspondrait à $4 = 6/2$, une contradiction. Le seul point à exclure est donc $(0, 0)$ et en tout autre point de A on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.

3. Si on écrit $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ on a $(x, y) \in A \Leftrightarrow r^4 = r^3 \sin(3\theta)$, donc $r = \sin(3\theta)$ (ce qui implique $\sin(3\theta) \geq 0$, donc $\theta \in [0, \pi/3] \cup [2\pi/3, \pi] \cup [4\pi/3, 5\pi/3]$). Or, si on prend la fonction $\gamma(\theta) = (\sin(3\theta)\cos(\theta), \sin(3\theta)\sin(\theta))$ pour $\theta \in [0, \pi]$ on retrouve la même image parce que l'intervalle $\theta \in]\pi/3, 2\pi/3[$ donne les valeurs correspondant à $\theta \in]4\pi/3, 5\pi/3[$ (mais $\sin(3\theta) < 0$). L'ensemble A se représente ainsi



4. Parmi les points de la forme $e^{ik\pi/6}$, seulement ceux pour $k = 0, 4, 8$ sont à l'intérieur des composantes connexes bornées déterminées par A. Ils ont un indice de 1, et les autres de 0.

Exercice 3 (7 points)**.** Calculer, en appliquant la formule des résidus à la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2 - 16z^2},$$

la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 - \cos^2(\theta)} d\theta.$$

La théorie vue en cours explique que, pour calculer les intégrales du type $\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))dt$ où R est une fonction rationnelle, il faut considérer la fonction

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right)$$

et en calculer la somme des résidus aux pôles contenus dans le disque unité. L'intégrale sera ensuite égale à cette somme multipliée fois $2\pi i$. Dans notre cas on a

$$f(z) = \frac{4z}{i(16z^2 - (z^2+1)^2)}.$$

Les pôles de cette fonction se trouvent là où $z^2+1 = \pm 4z$, c'est-à-dire $z = \pm 2 \pm \sqrt{3}$. On peut écrire $16z^2 - (z^2+1)^2 = -(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$, où $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \{\pm 2 \pm \sqrt{3}\}$. Pour calculer le résidu en z_j, il suffit de remarquer qu'on a écrit $f(z) = (z - z_j)h(z)$ pour h holomorphe avec $h(z_j) \neq 0$. Le résidu est donc égal à $h(z_j)$. On a donc $\text{Res}(f, z_j) = \frac{4z_j}{-i\Pi_{k\neq j}(z_j - z_k)}$ et, en particulier

$$\text{Res}(f, 2 - \sqrt{3}) = \text{Res}(f, -2 + \sqrt{3}) = \frac{1}{4i\sqrt{3}}.$$

On a donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 - \cos^2(\theta)} d\theta = 2\pi i \frac{2}{4i\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Il est possible de vérifier que ce résultat est raisonnable : on a bien $1/4 \leq (4 - \cos^2\theta)^{-1} \leq 1/3$, donc l'intégrale que l'on cherche doit être une valeur entre $2\pi/4$ et $2\pi/3$, ce qui est vrai grâce à $3/2 \leq \sqrt{3} \leq 2$.

Exercice 4 (7 points)**.** Étant donnée une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ avec $f(0) = 0$ mais non identiquement nulle, soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$\phi(R) := \sup\{|f(z)| \,:\, |z| \leq R\}.$$

1. Démontrer que ϕ est une fonction strictement croissante.
2. Démontrer que ϕ est une fonction continue.
3. Démontrer que l'on a $\phi(tR) \leq t\phi(R)$ pour tout $t \in [0, 1]$
4. Démontrer que, si l'on a $\phi(R) \leq CR^2$ pour tout $R \geq 0$, alors on a $f(z) = az^2$ pour un certain $a \in \mathbb{C}$ et finalement $\phi(R) = |a|R^2$.
5. Démontrer que, si l'on a $\phi(R) \leq C(R^2 + 1)$ pour tout $R \geq 0$, alors on a deux cas : soit il existe $c > 0$ tel que $\phi(R) = cR$ pour tout $R \geq 0$, soit il existe $c > 0$ tel que $\phi(R) \geq c(R^2 - 1)$ pour tout $R \geq 0$.

1. La fonction ϕ est évidemment non-décroissante. Si jamais on avait $\phi(R_1) = \phi(R_2)$ pour $R_1 < R_2$ on aurait alors un point z avec $|z| \leq R_1 < R_2$ qui réalise le maximum de $|f|$ sur une boule plus grande. Comme il n'est pas sur le bord de cette boule, par le principe du maximum f serait constante, ce qui n'est pas le cas.
2. Soit z_0 un point qui réalise le maximum de $|f|$ sans $\overline{B(0, R)}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un rayon r tel que $|f(z)| \geq \phi(R) - \varepsilon$ pour tout $z \in B(z_0, r)$. On a donc $\phi(R') \geq \phi(R) - \varepsilon$ pour tout R' tel que $|R' - R| < r$. Il faut démontrer également $\phi(R') \leq \phi(R) + \varepsilon$, quitte à changer le rayon r. Supposons par l'absurde qu'il existe $R'_n \to R$ avec $\phi(R'_n) \geq \phi(R) + \varepsilon$. Soit z_n une suite de points tels que $|f(z_n)| = \phi(R'_n)$ et $|z_n| \leq R'_n$. À une sous-suite près on peut supposer $z_n \to z$ et $|z| \leq R$. On aurit donc, par continuité de $|f|$, $|f(z)| \geq \phi(R) + \varepsilon$, ce qui est absurde.
3. Considérons la fonction $g(z) = f(Rz)/\phi(R)$. Cette fonction est holomorphe, envoie $B(0, 1)$ dans $B(0, 1)$, et $g(0) = 0$. Alors $|g(z)| \leq |z|$. On a donc $\phi(tR) = \sup\{|f(z)| \,:\, |z| \leq tR\} = \phi(R) \sup\{|g(z)| \,:\, |z| \leq t\} \leq \phi(R)t$.
4. On sait que toute fonction holomorphe à croissance au plus quadratique est un polynôme d'ordre au plus deux. Donc si l'on a $\phi(R) \leq CR^2$ alors on a $f(z) = az^2 + bz + c$. La condition $f(0) = 0$ impose $c = 0$ et $|f(z)| \leq C|z|^2$ implique $b = 0$, ce qui donne le résultat voulu.
5. Si on a juste $\phi(R) \leq C(R^2 + 1)$ on obtient $f(z) = az^2 + bz$. Si $a \neq 0$ on est dans le deuxième cas, et si $a = 0$ dans le premier.