

---

Feuille d'exercices n° 11: Principe des zéros isolés, théorème des résidus

---

**Exercice 1.** Soient  $R > 0$ ,  $D = D(0, R)$  (disque ouvert),  $\partial D$  sa frontière. Soient  $\Omega$  un domaine contenant  $\overline{D}$  et  $f$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$ .

1. Montrer que si  $f|_{\partial D}$  est constante alors  $f$  est constante sur  $\Omega$ .
2. On suppose que  $f$  est non constante et que  $|f|_{|\partial D}$  est constante égale à  $c$ .
  - (a) Montrer que  $c \neq 0$  et que pour tout  $z \in D$ ,  $|f(z)| < c$ .
  - (b) En considérant  $g : z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ , montrer que  $f$  a au moins un zéro dans  $D$ .

**Exercice 2.** Soit  $f$  une fonction entière telle qu'il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $a\operatorname{Re}(f(z)) + b\operatorname{Im}(f(z)) \leq c$ . En considérant l'application  $z \mapsto \exp((a - ib)f(z))$ , montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 3.** Soit  $f$  une fonction entière. On cherche à montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| = 1$ ,  $|f(z)| = 1$ .
  - (b) Il existe  $c \in \mathbb{C}$  tel que  $|c| = 1$  et il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = cz^n$ .
1. Vérifier l'implication (b)  $\Rightarrow$  (a).
  2. On suppose la condition (a) satisfaite.
    - (a) Soit  $n$  l'ordre du zéro de  $f$  à l'origine et soit  $g : z \mapsto f(z)/z^n$ . Vérifier que  $g$  est entière.
    - (b) Montrer que la fonction  $h$  donnée par  $h(z) = \overline{g(1/\bar{z})}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$  et que pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $g(z)h(z) = 1$ .
    - (c) En déduire qu'il existe une fonction entière  $k$  telle que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $g(z) = e^{k(z)}$ .
    - (d) Montrer que  $h$  est entière et constante et que la fonction  $k$  est constante imaginaire pure. Conclure.

**Exercice 4.** Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}$ .

1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes sur  $\Omega$  telles que le produit  $fg$  soit nul sur  $\Omega$ . Montrer que l'une des fonctions est nulle sur  $\Omega$ .
2. Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$ . On suppose qu'il existe deux déterminations de la racine carrée de  $f$ , notées  $g_1$  et  $g_2$ . Montrer que  $g_1 = g_2$  ou  $g_1 = -g_2$ .

**Exercice 5.** Étudier l'existence et l'unicité d'une fonction holomorphe  $f$  sur un voisinage connexe de 0 telle que :

1. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $f(1/n) = \frac{1}{2n+1}$ .
2. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $f(1/n) = e^{-n}$ .
3. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $f(1/n) = e^{-n^2}$ .

**Exercice 6.** Déterminer les zéros de la fonction  $z \mapsto 1 - \exp\left(\frac{z}{z-1}\right)$  dans le disque ouvert  $D(0, 1)$ . Cela contredit-il le principe des zéros isolés ?

**Exercice 7.** On fixe  $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . On pose  $a = e^{2i\pi t}$  et on note  $U = \{z \in \mathbb{C}, \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que :

$$\forall z \in U, \quad f(az) = f(z).$$

Enfin, on définit  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  par  $g(z) = zf'(z) - f'(1)$ .

1. Calculer  $g(a^n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Montrer que  $g$  est nulle sur  $U$ .
3. Montrer que  $f$  est constante.
4. La conclusion est-elle encore vraie si on prend  $t \in \mathbb{Q}$  ?

**Exercice 8.** Calculer  $I = \int_{\gamma} f(z)dz$  dans les cas suivants.

1.  $\gamma(t) = 2e^{it}, t \in [0, 2\pi]; f(z) = \frac{5z^2+1}{z(z-1)}$ .
2.  $\gamma(t) = \frac{3}{2}e^{it}, t \in [0, 2\pi]; f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}$
3.  $\gamma(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]; f(z) = \frac{\exp(1/z)}{z-1}$ .

**Exercice 9.** Soit  $P$  un polynôme et  $\gamma$  un lacet contenant tous les zéros de  $P$  dans son intérieur. Calculer  $\int_{\gamma} z \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ .

**Exercice 10.** Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  n'ayant que des racines simples et soit  $Q$  un polynôme de degré  $\leq n - 2$ . On considère  $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ .

1. Déterminer  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{Q(z)}{P(z)} dz$ .
2. Soient  $z_1, \dots, z_n$  les racines complexes de  $P$ . Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{Q(z_k)}{P'(z_k)}$ .