Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
Calcul différentiel, courbes et surfaces

Feuille d'exercices n° 12: algorithmes itératifs

Exercice 1. (Théorème de l'enveloppe) Soit f et g_i, $i = 1, \ldots, k$ des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $p = (p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{R}^k$, f atteint son minimum $F(p)$ sur l'ensemble $\{x \,|\, g_i(x) = p_i,\ \forall i = 1, \ldots, k\}$ en un point $x(p)$, et qu'il existe $\lambda_1(p), \ldots, \lambda_k(p)$ tel que

$$\nabla f(x(p)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(p) \nabla g_i(x(p)).$$

Enfin, on suppose que $p \mapsto x(p)$ est de classe C^1. Montrer que F est C^1 et que pour tout p et tout $i = 1, \ldots, k$,

$$\lambda_i(p) = \frac{\partial F}{\partial p_i}(p).$$

Exercice 2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\tau > 0$, et $(x_k)_{k \geq 0}$ la suite définie par récurrence par $x_{k+1} = x_k - \tau e^{x_k}$.

a) De quel algorithme s'agit-il ? À quelle fonction est il appliqué ?
b) Montrer que la suite (x_k) diverge vers $-\infty$.
c) En utilisant théorème des accroissements finis et le lemme de Cesàro sur $e^{-x_{k+1}} - e^{-x_k}$, montrer que

$$\lim_{k \to +\infty} k e^{x_k} = \frac{1}{\tau}.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la hessienne $H_f(x)$ de f en x satisfait la majoration :

$$H_f(x) \leq M \,\mathrm{Id}$$

au sens des matrices symétriques.

a) Montrer que la fonction $g(x) = \frac{M}{2}|x|^2 - f(x)$ est convexe.
b) À quelle condition sur τ l'algorithme de gradient à pas fixe de paramètre τ appliqué à f donne-t-il lieu à une suite (x_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$?
c) Est-ce une condition suffisante pour que cet algorithme converge ?

Exercice 4. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$. La fonction f est-elle convexe ? Déterminer explicitement les termes de la suite (x_n) générée par l'algorithme de gradient à pas fixe associé à f. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que cette suite est bien définie, mais ne converge pas.

Exercice 5. On s'intéresse au problème de minimisation de $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sous contrainte $g = 0$, où $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, et où f et g sont de classe C^1. Soit x_0 un point de minimum local pour ce problème. Supposons que $\nabla g(x_0) \neq 0$ et soit λ_0 le multiplicateur de Lagrange associé. Donner une condition suffisante pour que l'algorithme de Newton appliqué à la résolution du système

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x), \\ g(x) = 0, \end{cases}$$

converge au voisinage de (x_0, λ_0).