Université de Paris Sud 11 **L2 – MPI**
Mathématiques **2ème semestre 13/14**

Math203 – Analyse et Convergence II
Feuille d'Exercices 2

Exercice 2.1.— Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{(1-x)^n}{1+x^n}\cdot$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.
2. Expliquer pourquoi il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur $[0,1]$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,1]$.

Exercice 2.2.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,2]$ par

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n.$$

1. Dresser le tableau de variations de f_n. On discutera en fonction de la parité de n.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
3. Etudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $[0,1]$.
4. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, 2-a]$.

Exercice 2.3.— Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}e^{-x}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,+\infty[$? Sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$?
3. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,+\infty[$.
4. Soit $A > 0$. Calculer la limite de $\displaystyle\int_0^A f_n(t)dt$ quand $n \to +\infty$. On pourra pour cela d'abord chercher à calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^A f_n(t) - f(t)\,dt$.
5. Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2.4.— Soit (P_n) une suite de polynômes, qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Que dit le critère de Cauchy uniforme pour la suite (P_n) ?
2. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, le polynôme $P_n - P_N$ est borné.
3. En déduire qu'il existe une suite (a_n) de réels tels que, pour tout $n \geq N$, $P_n(x) = P_N(x) + a_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que la suite (a_n) converge. Notant a sa limite, montrer que $f(x) = P_N(x) + a$.
5. Que peut-on en déduire sur la nature de la fonction f ?

Exercice 2.5.— Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n(1-x)$. On s'intéresse à la série de terme général f_n.

1. En utilisant le critère de D'Alembert, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$, et qu'elle diverge en dehors de cet intervalle.
2. Calculer la somme S de cette série de fonctions.
3. Comparer $S(1)$ et $\lim_{x\to 1^-} S(x)$. Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $0 \leq a < 1$.

Exercice 2.6.— On s'intéresse à la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$, avec $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

1. En étudiant la suite de ses sommes partielles, montrer que cette série converge uniformément sur $[-1,1]$.
2. Calculer la borne supérieure de f_n sur $[0,1]$. La série peut-elle être normalement convergente sur [0,1] ?
3. Même question sur $[-1,0]$. On pourra étudier la fonction $g_n = (-1)^n f_n$.

Exercice 2.7.— Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2. Calculer la dérivée de f_n. Montrer alors que la série ne peut pas converger normalement sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que si une série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I, alors $\|f_n\|_{I,\infty} \to 0$ quand $n \to +\infty$. On pourra introduire les fonctions $R_n(x) = \sum_{p\geq n} f_p(x)$.
4. En déduire que cette série ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.
5. Pour $\alpha > 0$, on pose $g_n(x) = \dfrac{x^\alpha}{x^2+n^2}$. En vous aidant de ce qui précède, étudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ sur $[0,+\infty[$.
6. Montrer que pour $\alpha \in [1,2[$, la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. On pourra minorer $R_n(x)$ par $R_n(x) - R_{2n+1}(x)$.
7. Montrer néanmoins que pour tout $\alpha \geq 1$, la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge uniformément sur tout compact $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 2.8.— Montrer que la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.9.— Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}(\cos x)^n \sin(nx)$, pour $n \geq 1$. On étudie la série de fonctions de terme général f_n.

1. Montrer qu'il suffit d'étudier cette série de fonctions sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note désormais S sa somme
3. Montrer que $f_n'(x) = (\cos x)^{n-1}\cos((n+1)x)$, et que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Que peut-on en déduire pour S ?
4. Que vaut $\mathrm{Re}\sum_{n\geq 1}(\cos(x)e^{ix})^{n+1}$? En déduire une expression simple pour $S'(x)$, puis pour $S(x)$.

Quelques exercices supplémentaires, plus théoriques et/ou difficiles :

Exercice 2.10.— Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = (1 - x/n)^n$ si $x \in [0, n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$. Étudier le mode de convergence de (f_n).

Exercice 2.11.— Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues et définies sur $[a, b]$. On suppose que f_n converge uniformément vers une fonction f. Montrer que $\inf\limits_{[a,b]} f_n \to \inf\limits_{[a,b]} f$.

Exercice 2.12.— Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est elle-même une fonction uniformément continue.

Exercice 2.13.— Soient I un intervalle ouvert et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que (f_n) converge simplement sur I. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Exercice 2.14.—Théorème de Dini
Soient des fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, la suite réelle $(f_n(x))$ est décroissante et l'on désire montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$ ainsi que l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$.

b) En observant que $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$ pour tout $p \leqslant n$, montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ et conclure.

Exercice 2.15.— On note E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ continues et on pose $\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$ pour $f \in E$. Définissons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

a) Étudier la suite (f_n).

b) Soit $f = \lim f_n$. Trouver une équation différentielle dont f est solution. Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

Exercice 2.16.— Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \in [0, 1] \mapsto n^\alpha x^n (1 - x) \in \mathbb{R}$. Étudier le mode convergence de la suite de fonctions (u_n), puis de la série de fonctions $\sum u_n$.

Exercice 2.17.— Soient $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n f(x)$.

a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ ssi $f(1) = 0$ et f dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.

Exercice 2.18.— Soient (a_n) et (x_n) des suites réelles telles que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série $\sum a_n (1 + |x_n|)$ converge. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n |x - x_n|$.

Où la fonction f est-elle définie, continue, dérivable, $\mathcal{C}^1$?

Exercice 2.19.— Soient U l'ensemble des complexes de module 1 et $\omega \in \mathbb{C} \setminus U$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ soit limite uniforme sur U d'une suite de fonctions polynomiales.