

---

Feuille d'exercices n° 4: Théorèmes d'inversion locale et globale

---

**Exercice 1.** (★) Soit  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  et soit  $f$  définie sur  $U$  par  $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ . Montrer que  $f$  est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de  $U$  mais n'est pas un difféomorphisme global.

**Exercice 2.** (★) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x,y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y)$ .

1. Justifier que  $f$  est de classe  $C^1$ . Calculer sa différentielle en tout point et vérifier qu'elle est inversible.
2. Montrer que  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $f(\mathbb{R}^2)$ . Justifier que  $f(\mathbb{R}^2)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
3. Montrer que  $f^{-1}$  est lipschitzienne (on travaillera avec la norme 1 de  $\mathbb{R}^2$ ).
4. En déduire que  $f$  est difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
5. Calculer  $Df^{-1}(p)$  où  $p = (1 - \pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$ .

**Exercice 3.** (★) Soit  $E = M_n(\mathbb{R})$  et on note  $I$  la matrice identité de  $E$ . Soit  $f : E \rightarrow E$  définie par  $f(A) = A^2$ . Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $A \in E$  tel que  $\|A - I\| < \alpha$ ,  $A$  admet une racine carrée.

**Exercice 4.** (★) Soit  $E$  l'espace des matrices  $n \times n$  à coefficients réels. Montrer que l'exponentielle de matrice est un difféomorphisme local (d'un voisinage de 0 sur un voisinage de  $I$ ), mais que ce n'est pas un difféomorphisme global de  $E$  sur son image pour  $n \geq 2$ .

**Exercice 5** (Réduction des formes quadratiques, version différentiable). On note  $E$  l'espace des matrices réelles  $n \times n$  et  $S$  le sous-espace des matrices symétriques. On fixe  $A_0 \in S$ , inversible. Soit  $\varphi : E \rightarrow S$  l'application définie par

$$\varphi(M) = {}^t M A_0 M.$$

1. Montrer que  $D\varphi_I$  est surjective, et préciser son noyau.
2. Montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $A_0$  dans  $S$  et une application  $A \mapsto M$  de  $V$  dans l'ensemble des matrices inversibles, de classe  $C^1$ , telle que  $A = {}^t M A_0 M$  pour tout  $A \in V$ . [On pourra considérer l'ensemble  $F$  des  $M \in E$  telles que  $A_0 M \in S$ , et appliquer le théorème d'inversion locale à la restriction de  $\varphi$  à  $F$  en montrant que  $D\varphi(I) : F \rightarrow S$  est inversible.]

**Exercice 6.** (★) [Séparation de variables et ondes sur le plan] On travaille dans le plan  $\mathbb{R}^2$  avec coordonnées  $(t,x)$ . Chercher des nouvelles coordonnées  $(u,v)$  de  $\mathbb{R}^2$  telles que, comme fonctions de  $(t,x)$ , elles vérifient l'équation

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \varphi = 0$$

et l'équation réécrite en termes des  $(u,v)$  se résout facilement.  
En déduire toutes les solutions de l'équation ci dessus.

**Exercice 7** (Deux équations, deux inconnues). 1. Discuter des solutions du système linéaire

$$\begin{aligned}ax + by &= u \\ex + dy &= v,\end{aligned}$$

où  $u, v$  sont donnés et  $x, y$  sont les inconnues, selon le rang de la matrice du système.

2. Soient maintenant  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application de classe  $C^1$ . On écrira

$$\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y)). \quad (1)$$

On veut discuter le système d'équations

$$f(x, y) = u, g(x, y) = v$$

aux inconnues  $(x, y)$  pour  $u, v$  donnés. On suppose que la différentielle  $D\varphi(x, y)$  est de rang 2 en tout point  $(x, y) \in U$ . Montrer que le système (1) admet une solution unique (localement, en un sens que l'on précisera).

**Exercice 8** (Inversion globale). Soient  $k$  une constante strictement positive et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$ , supposée  $k$ -dilatante (pour une certaine norme), i.e.

$$\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|$$

pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . On veut montrer que  $f$  est alors un difféomorphisme global de  $\mathbb{R}^n$  sur lui-même.

1. Montrer que  $f$  est injective, et que l'image  $f(\mathbb{R}^n)$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}^n$ . [On pourra raisonner sur des suites.]
2. Montrer que la différentielle  $Df(x)$  est inversible pour tout  $x$ .
3. Montrer par inversion globale que  $f(\mathbb{R}^n)$  est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$ . Conclure.